0 516933 390007

51-69-33-39
(30.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов - 2023"
наменование олимпиады

по космонавтике
профиль олимпиады

Прохорова Павла Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«4» марта 2023 года

Подпись участника

Прох

51-69-33-39
(30.1)

ЧИСТОВИК

75 (семьдесят пять)

В.С. (Сазонов В.В.)

(Владыкина В.Е.)

1

$$x_0 + \frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0^3-1}} = 2023 \qquad \frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0^3-1}} = 2023 - x_0$$

$$x_1 = \frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0^3-1}} = 2023 - x_0 \neq 1$$

~~$x_0 \neq 2023$, так как~~

~~$x_0 + \frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0^3-1}} = x_0\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x_0^3-1}}\right) > x_0$ при $x_0 > 1$~~

Также $x_0 \neq 2022$:

$$2022 + \frac{2022}{\sqrt[3]{2022^3-1}} \overset{?}{=} 2023$$

$$\frac{2022}{\sqrt[3]{2022^3-1}} \overset{?}{=} 1 \quad \Big|\wedge 3$$

$$\frac{2022^3}{2022^3-1} > 1$$

Поэтому деления на 0 при вычислении x_2 гарантированно не будет: $\underbrace{\sqrt[3]{x_1^3-1}}_{\neq 0} \neq 0$

$$x_2 = \frac{x_1}{\sqrt[3]{x_1^3-1}} = \frac{x_1}{\sqrt[3]{\frac{x_0^3}{x_0^3-1}-1}} = \frac{\frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0^3-1}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x_0^3-1}}} = x_0$$

верно

$$2023\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_1 = 2023 - x_0 \end{cases}$$

$$2023\begin{cases} x_2 = x_0 \\ x_3 = x_1 = 2023 - x_0 \end{cases}$$

$$2023\begin{cases} x_4 = x_0 \\ \ldots \end{cases}$$

$$2023\begin{cases} x_{2022} = x_0 \\ x_{2023} = 2023 - x_0 \end{cases}$$

Так как каждый следующий член последовательности зависим только от одного предыдущего, при повторе $x_2 = x_0$ получается цикл: $x_3 = x_1, \ldots$ из чередования x_0 на чётных местах и $2023 - x_0$ на нечётных.

Разобьём сумму $x_0 + x_1 + \ldots + x_{2023}$ на пары $(\underset{\text{чёт}}{x_0} + \underset{\text{нечет}}{x_1}) + (x_2 + x_3) + \ldots + (x_{2022} + x_{2023})$, в каждой паре сумма 2023, всего пар $\frac{2022-0}{2} + 1 = 1012$.

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{2023} = 2023 \cdot 1012 = 2047276$$

верно

ЧИСТОВИК

② Пусть сфера имеет радиус R.

Тогда:

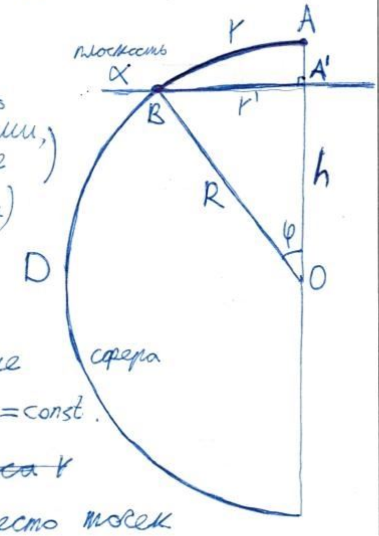
$D = \pi_0 R$ (дуга между диаметрально противоположными точками, max расстояние на сфере)

$\cancel{R = D/\pi_0}$

$r = \varphi R$ $\qquad \varphi = \frac{r}{R}$ (в радианах)

$r' = R \sin\varphi$ $\qquad \varphi = \pi_0 \frac{r}{D}$

$h = R \cos\varphi$

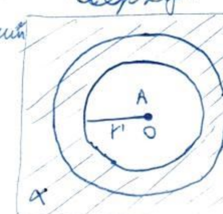


При фиксированном r угол φ тоже фиксирован. Тогда и r', и h — тоже $= const$.

~~Получается, что окружность радиуса r~~

Получается, что геометрическое место точек окружности ~~на сфер~~ радиуса r на сфере — это точки на высоте h отн. OA (т.е. принадлежащие "сверху" плоскости α, перпендикулярной OA на расстоянии h от O) и на расстоянии r' от точки A'.

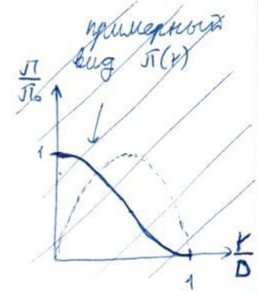
То есть это окружность на плоскости α радиуса r'.



$L = 2\pi_0 r' = 2\pi(r) r$

$\pi(r) = \frac{\pi_0 r'}{r} = \frac{\pi_0 R \sin\varphi}{r} = \frac{D}{r} \sin\left(\pi_0 \frac{r}{D}\right)$

$\pi(r) = \frac{D}{r} \sin\left(\pi_0 \frac{r}{D}\right)$ верно



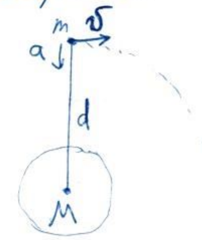
При малых r: $\frac{D}{r} \sin\left(\pi_0 \frac{r}{D}\right) \approx \frac{D}{r} \cdot \left(\pi_0 \frac{r}{D}\right) = \pi_0$

действительно, $\pi(\text{малые } r) \approx \pi_0$

51-69-33-39
(30.1)

③ Выведем формулу первой космической скорости

ЧИСТОВИК



$$a = G\frac{M}{d^2} = \frac{\upsilon^2}{d}$$

гравитационное ускорение — ускорение при движении по окружности

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{d}}$$

$$E_{кин} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{GMm}{2d} \sim \frac{1}{d}$$

$$\frac{E_{кин}(d = R+h+\Delta h)}{E_{кин}(d = R+h)} = \frac{1/(R+h+\Delta h)}{1/(R+h)} = \frac{R+h}{R+h+\Delta h} = 0,9962547$$

При подъёме орбиты на Δh кинетич. энергия спутника изменилась в 0,99625 раз, то есть уменьшилась на $\eta = 0,3745\%$

верно

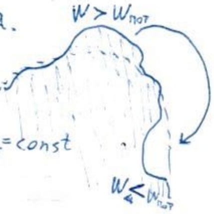
④ python 3.10

~~s1 = inpu~~

```python
s1, s2 = input().split()
for i in range(len(s1)-1):
  if s2.startswith(s1[i:]):
    print(s1[:i] + s2)
    break
else:
  print(s1+s2)
```

проходим по всем ~~пост~~ суффиксам S1: S1[i:], начиная от самого длинного S1[0:] - всей строки, до самого короткого - одного последнего символа.
Если S2 начинается с этого ~~пост~~ суффикса, то соединяем строки с удалением повтора суффикса. (Это гарантированно самый длинный подходящий постфикс, так как более длинные не подошли) и прекращаем программу.
Если никакой ~~суффи~~ ~~пост~~ суффикс не подошёл, и цикл не прервался, выводим просто склеенные строки.

(5) Поверхность воды принимает форму эквипотенциальной поверхности ~~такого же объёма~~.



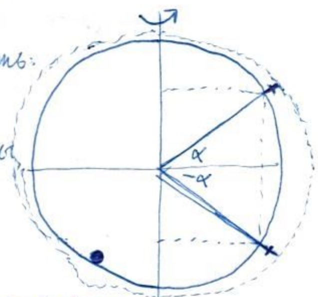
~~Иначе часть воды была бы с одной стороны от эквипот. пов-ти, а с другой стороны недоставало бы такого же объёма (а объём воды равен объёму~~

Общеизвестный факт. ~~Если~~ Если это не так, то вода, стремящаяся занять положение энергетического минимума, переливалась бы из точек с большей $W_{пот}$ в области с меньшей $W_{пот}$, уменьшая свою энергию, пока $W_{пот}$ не выровняется везде.

ЧИСТОВИК

У вращающегося тела есть две пот. энергии: гравитации и „центробежной силы". При удалении от оси вращения пот. энергия „центробежной силы" уменьшается ($F_{цс}$ направлена от оси), поэтому возле экватора ~~вода~~ уровень воды должен быть выше, чем у полюсов, чтобы компенсировать $W_{пот}$ увеличением $W_{пот}$ гравитации. Этот перепад порядка 3,5 метров виден в таблице задачи.

Всё это только для того, чтобы сказать: Перепад высоты воды (т.е. потенциальной энергии), вызванный вращением планеты одинаков для широт, симметричных относительно экватора. ($\pm\alpha$)



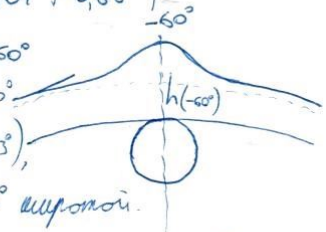
А инородное массивное включение в однородной планете притянет к себе воду (уменьшит $W_{пот}$ возле себя) и образует возле себя некий "горб" из воды. (поверхность $W_{пот}$ = const будет находиться выше ожидаемого, чтобы увеличением высоты ~~ко~~ и увеличением $W_{пот}(mg)$ компенсировать негативное влияние залежи металов)

Предположим, что залежи расположены не под экватором. Тогда можно найти "горб", сравнивая высоту воды на симметричных широтах:

Везде отличие довольно незначительные, кроме широты -60°:

ШИРОТА	57	58	59	60	61	62	63
h_1 водн	1001,90	1001,84	1001,79	1001,74	1001,69	1001,63	1001,58
ШИРОТА	-57	-58	-59	-60	-61	-62	-63
h_2 водн	1002,56	1002,85	1003,81	1022,41	1003,71	1002,64	1002,24
$h_2 - h_1$	0,66	1,01	2,02	20,67	2,02	1,01	0,66

ЧИСТОВИК

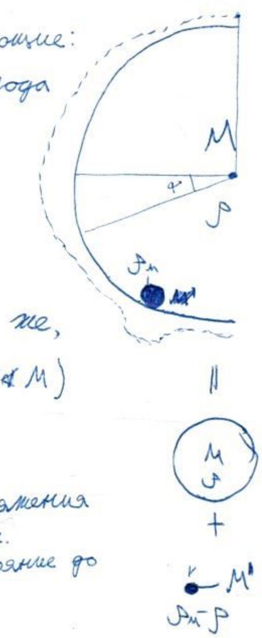


Виден горб высотой 20,67 метров на -60°
Так как он симметричен отн. широты -60°
($h_2 - h_1$ совпадает у -59° и -61°, -58° и 62°, -57° и 63°),
залежи расположены точно под -60° широтой.

Теперь исследуем потенциальную энергию возле горба:
Так как $R+h$ изменяется мало (~ 23 метров $\ll R \approx 6370$ км),
приблизим $W_{пот}(M) \approx mgh$ (возьмём R: $W_{пот}(mg) = 0$)

Заменим объём залежи металла на 2 эквивалентные составляющие:

1) будто в этом объёме продолжается порода планеты плотностью ρ
2) поверх ~~планеты~~ планеты добавлены залежи плотностью $\rho_м - \rho$ ($\rho_м$ - реальная плотность залежи) и массой M'



Распределение массы осталось такое же, зато все тела стали шарами.
(масса планеты почти не изменилась, $M' \ll M$)

$$W_{пот} = mgh + mf(\alpha) - G\frac{mM'}{d}$$

$mf(\alpha)$ — $W_{пот}$ вращения планеты, о которой писал ранее. Главное, что $f(\alpha) = f(-\alpha)$

$G\frac{mM'}{d}$ — $W_{пот}$ притяжения к залеже. d - растояние до неё.

α — широта

$W_{пот}(\alpha) = const$.

$W_{пот}(60°) = W_{пот}(-60°)$

$mgh(60°) + \cancel{mf(60°)} = mgh(-60°) + \cancel{mf(-60°)} - G\frac{mM'}{r + h(-60°)}$

Так как в районе горба d имеет порядок 1-100 км, $\ll R$ пренебрегём влиянием залежи на широты выше экватора.

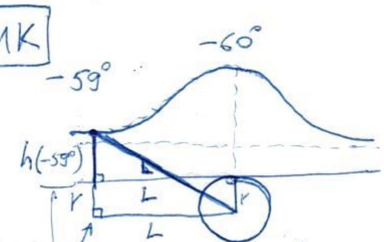
$$G\frac{M'}{r+h(-60°)} \overset{(*)}{=} g(h(-60°) - h(60°)) = G\frac{M}{R^2}\Delta h(-60°)$$

$(*)$ $M' = M \cdot \frac{\Delta h(-60°) \cdot (r + h(-60°))}{R^2}$ — вернёмся к этому позже.

Также рассмотрим соседние с залежей широты. (-59°, -61°)
Влияние залежи здесь ещё достаточно велико, $\Delta h = 2{,}02$ м.

$L = 1° \cdot R = 111{,}18$ км

$\boxed{\text{ЧИСТОВИК}}$



$$mgh(-59°) - G\frac{mM'}{\sqrt{L^2+(r+h(-59°))^2}} = mgh(59°)$$
$$+\,mf(-59°) \qquad\qquad +\,mf(59°)$$

$$G\frac{M'}{\sqrt{L^2+(r+h(-59°))^2}} = g\left(h(-59°)-h(59°)\right) =$$
$$\overset{*}{=} G\frac{M'}{r+h(-60°)}\cdot\frac{\Delta h(59°)}{\Delta h(-60°)}$$

пренебрегём искривлением в 1°, это почти прямая и ≈ прямой угол.

$$\frac{1}{\sqrt{L^2+(r+h(-59°))^2}} = \frac{1}{r+h(-60°)}\cdot\frac{\Delta h(-59°)}{\Delta h(-60°)}$$

$$\frac{(r+h(-60°))^2}{L^2+(r+h(-59°))^2} = \left(\frac{\Delta h(-59°)}{\Delta h(-60°)}\right)^2 = k \qquad k=\left(\frac{2{,}02\text{ м}}{20{,}67\text{ м}}\right)^2 = 0{,}0095504$$

$$\frac{r^2+2rh(-60°)+h(-60°)^2}{r^2+2kh(-59°)+h(-59°)^2+L^2} = k$$ | · знаменатель, перенести влево

$$r^2(1-k)+2r\left(h(-60°)-kh(-59°)\right)+\left(h(-60°)^2-kh(-59°)^2-kL^2\right)=0$$

$$r^2(1-k)+2r\cdot 1{,}0128232\text{ км} - 117{,}0168\text{ км}^2 = 0$$

$$r = \frac{1}{1-k}\left(-1{,}0128\text{ км}+\sqrt{(1{,}0128\text{ км})^2+(1-k)\cdot 117{,}02\text{ км}^2}\right) = 9{,}895\text{ км}$$

$\underline{r = 9{,}895\text{ км}}$ ~~≈ 10 км~~ $\underline{2r = 19{,}79\text{ км}}$

$$(*):\ M' = M\cdot\frac{\Delta h(-60°)\cdot(r+h(-60°))}{R^2} = 1{,}642\cdot 10^{18}\text{ кг}$$

$$M' = (\rho_м-\rho)\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 5514\text{ кг/м}^3$$

$\cancel{\rho_м = M'/(\tfrac{4}{3}\pi r^3)+}$

$$\rho_м = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3}+\rho = 410{,}187\text{ кг/м}^3$$

Ответ: залежи радиусом 9,9 км (диаметром 19,8 км) металла плотностью 410,2 Т/м³ находится на широте -60°.

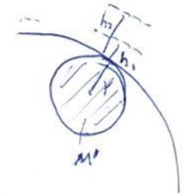
(6) Стыковать корабли без помощи человека, программно. ~~при помощи~~ или
Смотреть на экран, поворачивая камеру, а не голову

нет ответа на вопрос задачи

ЧЕРНОВИК

$h_1 = 1001{,}74$ м

$h_2 = 1022{,}41$ м



$$mgh_1 = mgh_2 - G\frac{M'm}{r+h_2}$$

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

$$G\frac{M}{R^2}(h_2-h_1) = G\frac{M'}{r+h_2}$$

$$(r+h_2)M(h_2-h_1) = M'R^2$$

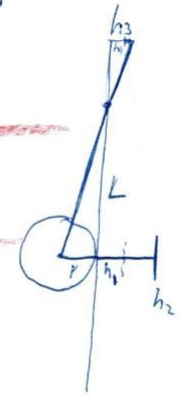
$$(r+h_2)(h_2-h_1) = \frac{M'}{M}R^2$$

$$(r+h_2)(h_2-h_1) = \frac{r^3}{R}\cdot\left(\frac{\rho_m}{\rho}-1\right)$$

$$M' = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_m-\rho)$$

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

$$\frac{M'}{M} = \frac{r^3}{R^3}\cdot\frac{\rho_m-\rho}{\rho}$$



$$mg(h_4-h_3) = G\frac{M'm}{\sqrt{L^2+r^2}}$$

$$\cancel{G\frac{M}{R^2}(h_4-h_3) = G\frac{M'm}{\sqrt{L^2+r^2}}}$$

$$G\frac{M'}{r+h_2}\cdot\frac{h_4-h_3}{h_2-h_1} = G\frac{M'}{\sqrt{L^2+r^2}}$$

$L = 111{,}18$ км

$$\left(\frac{h_4-h_3}{h_2-h_1}\right)^2 = \frac{(r+h_2)^2}{r^2+L^2}$$

$= \pm 59°: k_{59} = 0{,}009550405$

$\pm 61°$: same

$\pm 58°$: $0{,}0023876$

$$k_{59}(r^2+L^2) = r^2+2rh_2+h_2^2$$

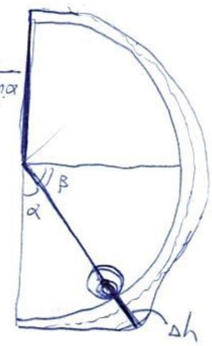
$$(1-k_{59})r^2 + 2rh_2 - (kL^2-h_2^2) = 0$$

$$r = \frac{-h_2+\sqrt{h_2^2+(1-k)(kL^2-h_2^2)}}{1-k} = 9885{,}65 \text{ м}$$

$9853{,}45$ м

ЧЕРНОВИК

$$mg\cdot 0 = mg\Delta h - \frac{1}{2}m\omega^2(R+h+\Delta h)^2\sin\alpha \quad \Big| \cdot \frac{2}{m\omega^2\sin\alpha}$$



$$\cancel{\frac{2g\Delta h}{\omega^2} + \omega^2(R+h)^2 + 2\omega^2(R+h)\Delta h + \omega^2\Delta h^2 = 0}$$

$$\cancel{\Delta h^2 + 2\left(\frac{g}{\omega^2}+R+h\right)\Delta h}$$

$\Delta h << R+h$

$$\frac{2g}{\omega^2\sin\alpha}\Delta h + (R+h)^2 + 2(R+h)\Delta h + \Delta h^2 = 0$$

$$\Delta h^2 + 2\left(R+h+\frac{g}{\omega^2\sin\alpha}\right)\Delta h + (R+h)^2 = 0$$

$$\Delta h = -\left(R+h+\frac{g}{\omega^2\sin\alpha}\right) + \sqrt{\left(R+h+\frac{g}{\omega^2\sin\alpha}\right)^2 - (R+h)^2}$$

$$\frac{2g}{\omega^2\sin\alpha}(R+h) + \left(\frac{g}{\omega^2\sin\alpha}\right)^2$$

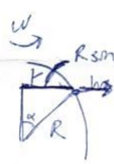
$\Delta h = 22{,}41$ м

$$g\Delta h - \frac{1}{2}\omega^2(R+h)^2\sin\alpha < 0$$

$$\Delta h = \frac{\omega^2(R+h)^2}{2g}\,\frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cos\beta}$$

$$W = \frac{2\pi}{82400\,c}$$

$R+h = 6371$ км



$$a = \omega^2 \cancel{R\sin\alpha}\ r$$

$$F_{цб} = m\omega^2 \cancel{R\sin\alpha}\ r$$

$$W = \int_0^{R\sin\alpha} m\omega^2 r\,dr = \frac{1}{2}m\omega^2(R\sin\alpha)^2$$

ЧЕРНОВИК

$h = 1000$ м

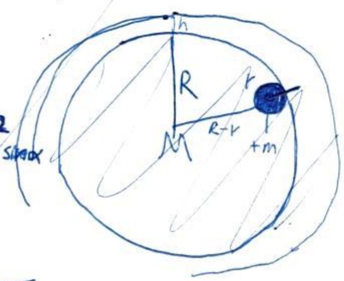
$F(g(x))' = F'(g(x))\cdot g'(x)$

$\frac{d(a+x)^2}{dx} = 2(a+x)\cdot x =$

$\Delta h \ll R$

$W_{пот} =$

$W_{пот} = mg\Delta h - G\frac{M'm}{L} + \frac{1}{2}m\omega^2(R+h+\Delta h)^2\sin\alpha$

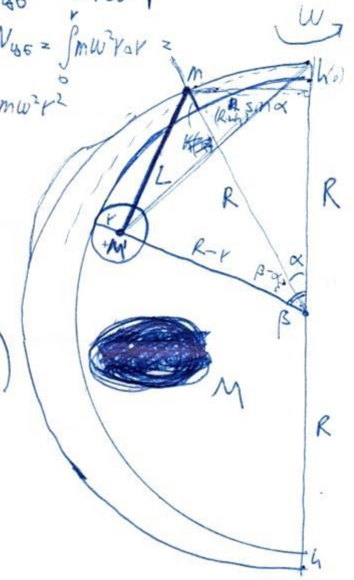


$\frac{dW_{пот}}{d\Delta h} = mg - GM'm\frac{d\frac{1}{L}}{d\Delta h} +$

$+ m\omega^2(R+h+\Delta h)\Delta h = 0$

$F_{цб} = m\omega^2 r$

$W_{цб} = \int_0^r m\omega^2 r\,dr = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$

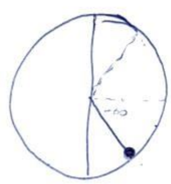


~~g~~

$mg\Delta h - G\frac{M'm}{L} + \frac{1}{2}m\omega^2(R+h+\Delta h)^2\sin\alpha =$

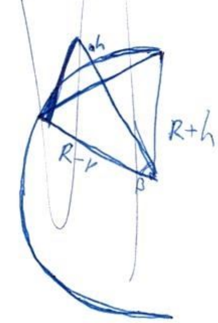
$\overset{\alpha=0}{=} -G\frac{M'm}{L_0}$

$g\Delta h + \frac{1}{2}m\omega^2(R+h+\Delta h)^2\sin\alpha = GM'\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L_0}\right)$



$\cancel{L = \sqrt{R^2+(R-r)^2-2R(R-r)\cos(\beta-\alpha)}}$

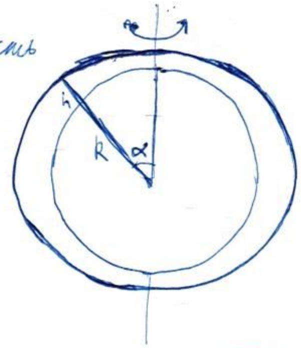
$L = \sqrt{(R+h+\Delta h)^2+(R-r)^2-2(R+h+\Delta h)(R-r)\cos(\beta-\alpha)}$



ЧЕРНОВИК

$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 5514$ кг/м³ $< \rho_{\text{же}}$

Эквипотенциальная поверхность

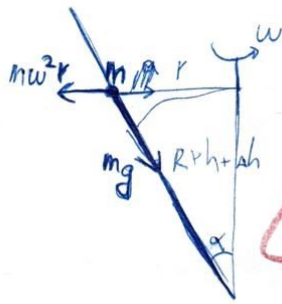


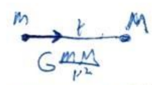
На $\overset{m}{M}$: F_M

F_m

$W_M = g$

mg





$\boxed{W = -G\frac{mM}{r}}$

ЧЕРНОВИК

3) 

$$a = G\frac{M}{d^2} = \frac{v^2}{d}$$

$$\underline{v = \sqrt{\frac{GM}{d}}}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2d} \sim \frac{1}{d}$$

$$\frac{E(d = R+h+\Delta h)}{E(d = R+h)} = \frac{R+h}{R+h+\Delta h} = 1{,}00376$$

$$\underline{+0{,}376\%}$$

4)

```
s1 = input()
s2 = input()
for i in range(len(s1)):   # or -1 ?
    if s2.startswith(s1[i:]):
        print(s1[:i] + s2)
        break
else:
    print(s1 + s2)
```

ЧЕРНОВИК

1) $x_0 + \frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0^3-1}} = 2023 = k$

$x_0 \neq 1$

$x_0 \neq 2023$

$x_1 = \frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0^3-1}} = 2023 - x_0$

$x_2 = \frac{x_1}{\sqrt[3]{x_1^3-1}} = \frac{\frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0^3-1}}}{\sqrt[3]{\frac{x_0^3}{x_0^3-1}-1}} = x_0$

$\sqrt[3]{\frac{1}{x_0^3-1}}$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \ldots \quad x_{2022} \quad x_{2023}$

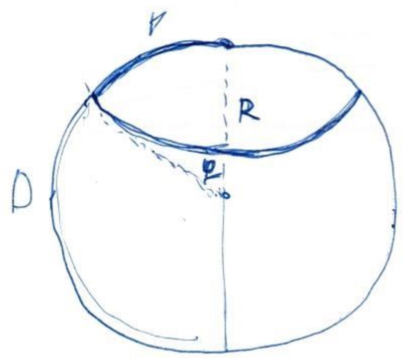
$x_0 \quad k-x_0 \quad x_0 \quad k-x_0 \quad x_0 \quad \ldots \quad x_0 \quad k-x_0$

$k \quad k \quad k \quad \ldots \quad k$

0 2 ... 2022 → 1012 шт

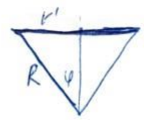
$\underline{1012k}$

2)



$r = \varphi R$ $r' = R\sin\varphi$

$D = \pi_0 R$ $R = \frac{D}{\pi_0}$



$L = 2\pi_0 r' = 2\pi_0 R \sin\varphi$

$\cancel{= 2\pi_0 \frac{D}{\pi_0}\sin\varphi = 2D\sin\varphi}$

$\underline{\varphi = \frac{r}{R} = \frac{r}{D}\pi_0}$

$L = 2\pi_0 \frac{D}{\pi_0} \sin\frac{r}{D}\pi_0 = 2D\sin\left(\frac{r}{D}\pi_0\right) = 2\pi r$

$\underline{\pi = \frac{D\sin\left(\frac{r}{D}\pi_0\right)}{r} = \frac{D}{r}\sin\left(\frac{r}{D}\pi_0\right)}$

$2022 + \frac{2022}{\sqrt[3]{2022^3-1}} \overset{?}{=} 2023$

$\frac{2022}{\sqrt[3]{2022^3-1}} \overset{?}{=} 1$