0 849308 840006

84-93-08-84
(86.7)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

дешифр

Вариант 1

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Австрийского Владимира Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

| Шифр | Сумма | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 84-93-08-84 | 70 | + | + | + | — | — | ± | + | — |

Оценка 70б. (семьдесят.) 12.04.2024

84-93-08-84 (86.7)

Черновик

70 (семьдесят)

дешифр

$45 \times 45 = 225 + 180$ 2025

$A = \sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}}$

$[A] - ?$ $\quad a \quad b$

$A\left(\sqrt{45-\sqrt{2023}} + \sqrt{45+\sqrt{2023}}\right) = \cancel{45} - \sqrt{2023} - \cancel{45} - \sqrt{2023}$

$= -2\sqrt{2023}$

$A = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$ab = 2$ $\quad A = \sqrt{a} - \sqrt{\frac{2}{a}}$

$a + b = 90$ $\quad A =$

$-10$

$\cancel{A^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$

$A^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 90 + 2\sqrt{2}$

$A = -\sqrt{90 + 2\sqrt{2}}$ $\quad -10 + \varepsilon$

---

Оценка

$\frac{1234}{2023} = \sin\varphi$ $\quad \frac{789}{2023} = \cos\varphi$

$\frac{1234}{2023}\sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{789}{2023}\cos^{23}\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\sin\varphi \sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\varphi \cos^{23}\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\left[0; \frac{1234}{2023}\right]$ $\quad \left[-\frac{789}{2023}; \frac{789}{2023}\right]$ $\quad a = 9$

---

$\log_2(|x^2-2|^3+1) + \sqrt{4x^4-3x^2+5} = \sqrt{2x^4+5x^2-3} = \sqrt{2(x^2-1)(x^2+\frac{3}{2})}$

ОДЗ

$\frac{4x^4-3x^2+5+2x^4+5x^2-3}{2} = \frac{6x^4+2x^2+2}{2}$ $\quad = 3x^4 + x^2 + 1 = p$

$\sqrt{p + (x^4 - 4x^2 + 4)}^2$ $\quad p - (x^4 - 4x^2 + 4)$ $\quad p = 3x^4 + x^2 + 1$

$\log_2(|x^2-2|^3+1) + \sqrt{p + (x^2-2)^2} = \sqrt{p - (x^2-2)^2}$ $\quad x^2 - 2 = a$

$\log_2(|a|^3+1) + \sqrt{p + a^2} = \sqrt{p - a^2}$

$\log_2(|a|^3+1) = \sqrt{p - a^2} - \sqrt{p + a^2}$

$\cancel{2^{\sqrt{p-a^2}} \cdot 2^{\sqrt{p+a^2}} = |a|^3 + 1}$

Черновик

$\log_2(|a|^3+1) = \sqrt{p-a^2} - \sqrt{p+a^2} \geq 0$

$\sqrt{p-a^2} > \sqrt{p+a^2}$

$\cancel{p}-a^2 > \cancel{p}+a^2$

$-a^2 \geq a^2 \quad a=0$

$x = \pm\sqrt{2}$

---

$2^{2023}$

$10^{\alpha} \leq 2^{2023} \leq 10^{\alpha+1}$

$\sqrt[2023]{10^{\alpha}} \leq 2 \leq \sqrt[2023]{10^{\alpha+1}}$

$\sqrt[2023]{10^{\alpha}} \leq 2 < \sqrt[2023]{10^{\alpha}} + \sqrt[2023]{10} \approx 1$

$\underset{1}{x} \leq 2 \leq \underset{2}{x} + 1{,}000\ldots a$

1) $\cancel{\sqrt[2023]{10^{\alpha}} = 1}$ $\quad \cancel{10^{\alpha} = 1}$

2) $\sqrt[2023]{10^{\alpha}} = 2$

$10^{\alpha} = 2^{2033}$

$\alpha = \lg 2^{2023}$

$\cancel{\alpha = 2023 \lg 2}$

$2^{2023} < 10^{\alpha+1}$

$2023 \lg 2 < (\alpha+1)$

$2023 \lg 2 - 1 < \alpha$

$\cancel{2^{2023} \geq 10^{\alpha}}$

$\cancel{\ln 2^{2023} \geq \alpha \ln 10^{\alpha}}$

$\cancel{2023 \ln 2}$

$2^{2023} \geq 10^{\alpha}$

$\lg 2^{2023} \geq \lg 10^{\alpha}$

$2023 \lg 2 \geq \alpha \cancel{\lg 10}$

$\alpha \leq 2023 \lg 2$

$x \quad 2023 \lg 2 \quad x+1$

$\lg 2 = \frac{1}{\log_2 10} = \frac{1}{1+\log_2 \frac{5}{2}} \approx \frac{1}{3}$ $\quad 2{,}8$

$2023 \cdot \frac{1}{3}$

$674 + \frac{1}{3}$

$2022 \,|\, 3$ $\quad 222$

$674$

черновик

$674 < 2023 \lg 2$

$\lg_{10} \frac{674}{2023} < \lg 2$

$10^{\frac{674}{2023}} < 2$

$2023 \lg 2 < 675$

$2 < \frac{675}{2023}$

4

0
1
10
11
100
101
110
111

9) 2)

$2^2_{10} = 100$,

$2^{2023} = \underbrace{1000\ldots0}_{2023 \text{ нул}}{}_2$

---

$-A = -\sqrt{45 - \sqrt{2023}} + \sqrt{45 + \sqrt{2023}} < 0$

$B = \sqrt{45 + \sqrt{2023}} - \sqrt{45 - \sqrt{2023}}$

$B^2 = 90 - 2\sqrt{2}$

$B = \sqrt{90 - 2\sqrt{2}}$

$A = -\sqrt{90 - 2\sqrt{2}}$

$A = -9, \ldots$

$[A] = -10$

$[\sqrt{90 - 2\sqrt{2}}] \approx 9; 10$

$\approx \sqrt{82, \ldots}$

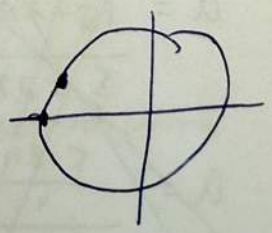
$\approx 9, \ldots$

---

$1234 \sin^{20}(x - \frac{\pi}{3}) - 789 \cos^{23}(ax - \frac{\pi}{4}) = 1013$

$[0; 1234]$ $\quad$ $[-789; 789]$

$\begin{cases} \sin^{20}(x - \frac{\pi}{3}) = 1, \\ \cos^{23}(ax - \frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{3}) = \pm 1, \\ \cos(ax - \frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases}$



1) $x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

$ax - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$

$x = \frac{5\pi}{4a} + \frac{2\pi k}{a}$

дешифр

Смена Черника

Чистовик | № 1

$A = \sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}} < 0$

$B = -A > 0$

$B = \sqrt{45 + \sqrt{2023}} - \sqrt{45 - \sqrt{2023}}$

$B^2 = 90 - 2\sqrt{2}$

$B = \sqrt{90 - 2\sqrt{2}}$ $\quad 9 < \sqrt{90 - 2\sqrt{2}} < 10 \Rightarrow B = 9 + \varepsilon$; где $\varepsilon \in (0;1)$

$A = -B = -9 - \varepsilon \Rightarrow A = -10 + \varepsilon'$, где $\varepsilon' \in (0;1) \Rightarrow$

$\Rightarrow [A] = -10$

Ответ: $-10$

№ 2

$\underbrace{1234 \sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}_{a} \underbrace{- 789 \cos^{23}\left(ax - \frac{\pi}{4}\right)}_{b} = 2023$

$\left.\begin{array}{l} a \in [0; 1234] \\ b \in [-789; 789] \end{array}\right\} \Rightarrow$ замечаем, что $a + b = 2023$ возможно когда $a$ и $b$ максимальны, отсюда получаем равносильную уравнению систему

$\begin{cases} \sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos^{23}\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow$ 1) $\begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \\ \cos\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$

рассмотрим 1 случай:

(1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

(2) $\cos\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow ax - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{5\pi}{a4} + \frac{2\pi n}{a}$, $n \in \mathbb{Z}$

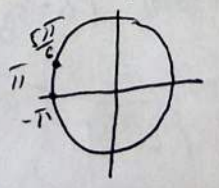
$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k = \frac{5\pi}{a \cdot 4} + \frac{2\pi n}{a}$

$\frac{5}{6} a + 2ak = \frac{5}{4} + 2n$

$a = \frac{\left(\frac{5}{4} + 2n\right)}{\frac{5}{6} + 2k}$ | $a = \frac{3(5 + 8n)}{2(5 + 12k)}$

$a = \frac{\frac{5 + 8n}{4}}{\frac{5 + 12k}{6}}$

рассмотрим отрезок $[-\pi; \pi]$




уравнение (1) имеет на этом отрезке 1 решение

$\Rightarrow \frac{5\pi}{4a} + \frac{2\pi n}{a} = \frac{5\pi}{6}$

$\frac{5}{4} + 2n = \frac{5a}{6}$

$15 + 24n = 10a$

$|a|_{min}$ при $n = -1$ $\quad a = \frac{-9}{10}$

$|a| = \frac{9}{10}$

см сл. лист

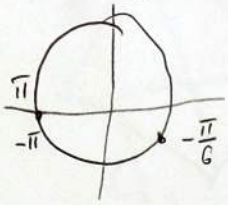
Чистовик

рассмотрим 2 случай:

(3) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1 \Rightarrow x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$

(4) $\cos\left(ax-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Rightarrow x=\frac{5\pi}{4a}+\frac{2\pi n}{a},\ n\in\mathbb{Z}$

на отрезке $[-\pi;\pi]$ уравнение (3) имеет одно решение




$$\Rightarrow -\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{4a}+\frac{2\pi n}{a}$$

$$-\frac{a}{6}=\frac{5}{4}+2n$$

$$-2a=15+24n$$

$$a=\frac{-15-24n}{2}$$

$|a|_{min}$ при $n=-1$ $\quad a=\frac{9}{2}$

$$\frac{9}{10}<\frac{9}{2}$$

Ответ: $\frac{9}{10}$

№3

$$\log_2(|x^2-2|^3+1)+\sqrt{4x^4-3x^2+5}=\sqrt{2x^4+5x^2-3}$$

$$\log_2(|x^2-2|^3+1)+\sqrt{(3x^4+x^2+1)+(x^4-4x^2+4)}=\sqrt{(3x^4+x^2+1)-(x^4-4x^2+4)}$$

$3x^4+x^2+1=a \qquad x^2-2=b$

$$\log_2(|b|^3+1)+\sqrt{a+b^2}=\sqrt{a-b^2}$$

$$\log_2(|b|^3+1)=\sqrt{a-b^2}-\sqrt{a+b^2}$$

т.к. $|b|^3+1\geq 1$, то $\log_2(|b|^3+1)\geq 0$, отсюда можем сказать что

$\sqrt{a-b^2}-\sqrt{a+b^2}\geq 0$ – проверим, когда такое возможно

$a-b^2\geq a+b^2$

$-b^2\geq b^2 \Rightarrow b=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$, проверим:

$\sqrt{4\cdot 4-3\cdot 2+5}=\sqrt{2\cdot 4+5\cdot 2-3}$

$\sqrt{15}=\sqrt{15}$ – оба корня подходит

Ответ: $x=\pm\sqrt{2}$

черновик

$a_1 = 19$

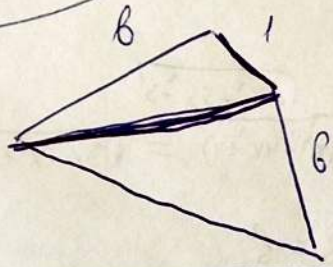
$a =$

$$-\frac{5\pi}{4}\cdot\frac{5}{2\cdot 9} + \frac{2\pi}{2}\cdot\frac{10}{2\cdot 9} = \frac{5\pi}{2\cdot 3}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1}$$

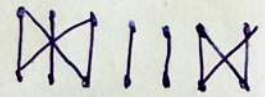
$a = 6$
$b = 6$
$c = 1$

$S_{max}$ при




1 2 3 4

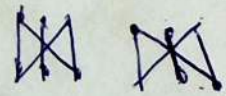
1)



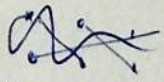
$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$

$\frac{4\cdot 3}{2} = 6$

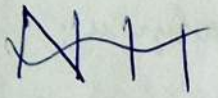
X – 1 пара

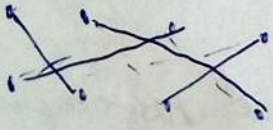


– 3 пары

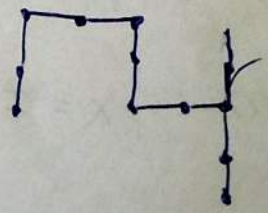


2 пары



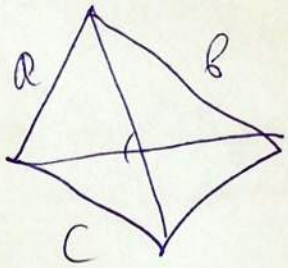


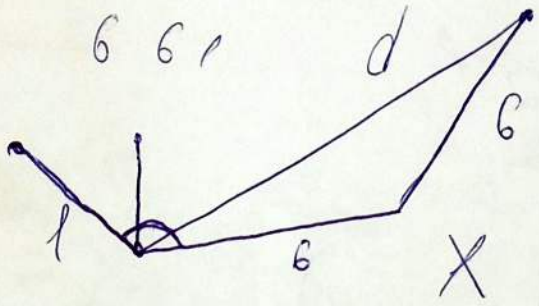
– 3 пары



черновик

$d_1 \cdot d_2 \sin 2$




6!

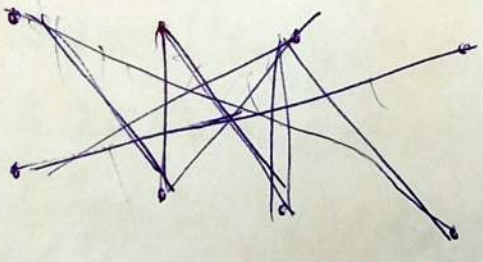
~~7 - 2+5 ; 2+2+3 ; 2+2+2+1~~

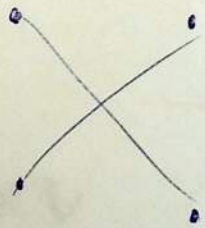
$7 = a + b + c$

$7 = 1 +$

$C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 12$

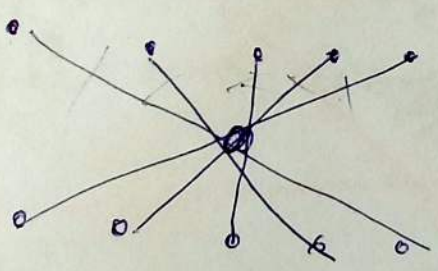
7 пар есть
5 пар нет

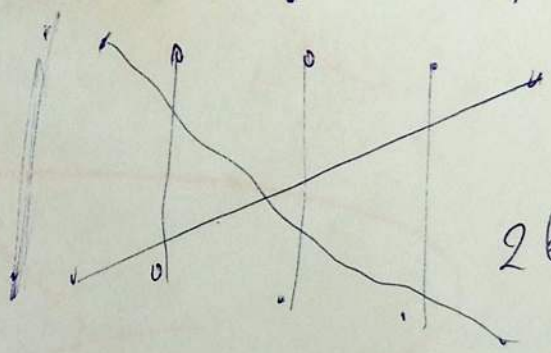




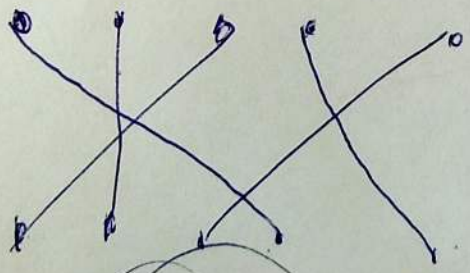
7

2 вар





2 вар

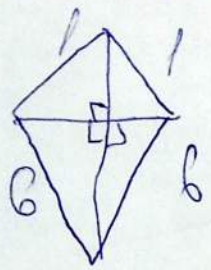


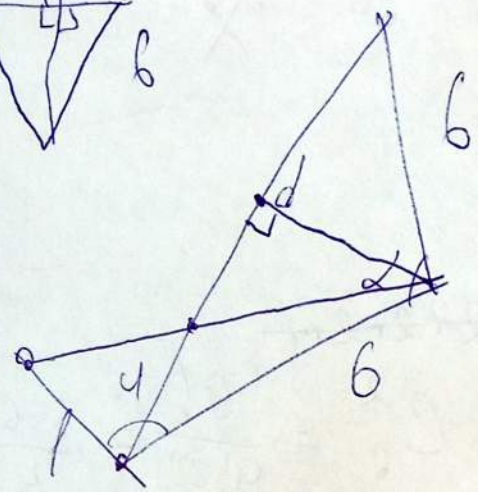
7

3 +3 6

черновик

$d_1 d_2 \cdot \sin\alpha = l$



Чистовик № 5

$10^{\alpha} \le 2^{2023} < 10^{\alpha+1} \quad | : \lg \quad 10^{\beta} \le 5^{2023} \le 10^{\beta+1} \quad | \lg$

$\alpha \le 2023 \lg 2 < \alpha+1 \qquad \beta \le 2023 \lg 5 \le \beta+1$

$\alpha + \beta + 2 = S(2^{2023}) + S(5^{2023}) = Q$

$+ \begin{array}{l} \alpha \le 2023 \lg 2 \le \alpha+1 \\ \beta \le 2023 \lg 5 \le \beta+1 \end{array}$

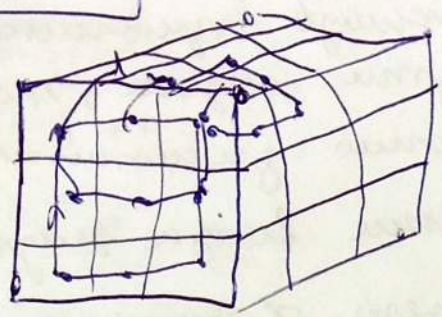
$\alpha+\beta \le 2023(\lg 2 + \lg 5) \le \alpha+\beta+2$

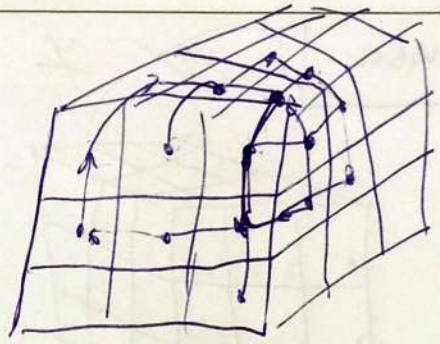
$\alpha+\beta \le 2023 < \alpha+\beta+2$

$2024 \le Q \le 2025 \quad Q \in \{\}$

черновик

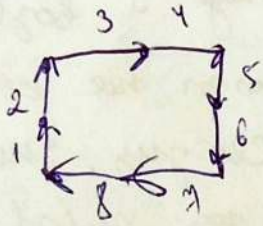
1с.

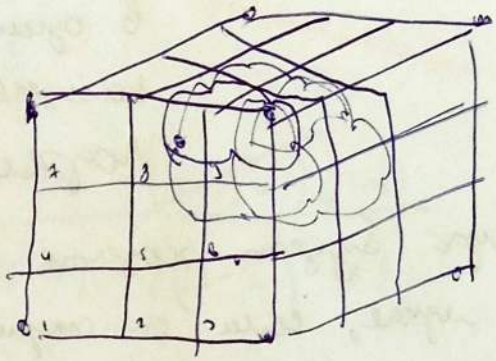




5 сек

8 с.



18

17

24

первым ходом

~~В/:~~

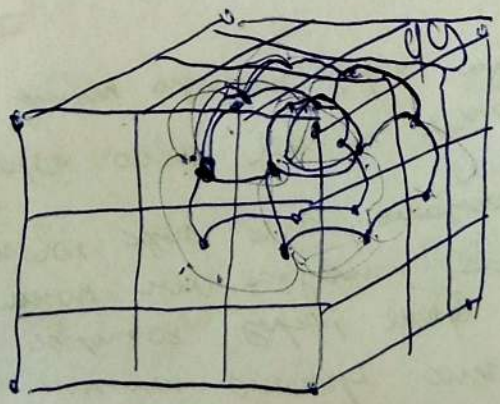
1) 1 → 4 (квадрат)

2) 1 → 2 (квадрат)

3) 2 → 1 (квадрат)

4) 2 → 3 (квадрат)

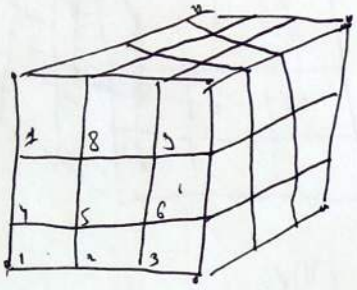
5)



5

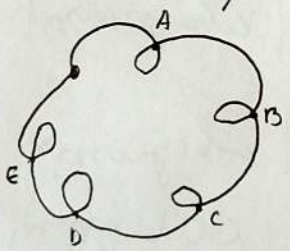
чистовик

№ 7




1) прикинув возможные пути жука, то можно заметить, что почти всегда ~~жук~~ он будет ходить по квадрату и возвращаться в один и тот же квадратик каждые 8 секунд, что не подходит под условие.

2) жук будет ходить не квадратом только в том случае, если он стартует с клеток под номерами 2, 6, 8, 4 и переходит на другую грань. В таком случае жук тоже будет ходить циклом, но уже другим, он похож на:




и после прохода через каждую точку (A или B или C..) он возвращается в неё ровно через 5 секунд.

3) по условию сказано, что жук повторно проходит по этой тропе, откуда мы поняли, что чтобы найти время, через которое он опять сюда вернется, нужно просто найти время прохождения полного цикла и отнять из него 5, т.к ровно за 5 секунд до конца цикла он придет в эту самую нужную точку.

4) длина цикла 24 с

24-5 = 19 с

Ответ: 19 с

черновик

$$a_n = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{n^3+n}{n^2-2n+2} a_{n-1}$$

$$17 \cdot \frac{\cancel{10}\,5}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{30}\,6}{\cancel{5}} \cdot \frac{17 \cdot 4}{10}$$

$$a_n = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} a_{n-1} = \frac{(n^2+1)n \cdot \cancel{((n-1)^2+1)}(n-1)}{\cancel{((n-1)^2+1)} \cdot ((n-2)^2+1)}$$

$$a_n = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} a_{n-1} = \frac{(n^2+1)n}{\cancel{((n-1)^2+1)}} \cdot \frac{\cancel{((n-1)^2+1)}(n-1)}{\cancel{((n-2)^2+1)}} \cdot \frac{\cancel{((n-2)^2+1)}(n-2)}{(n-3)^2+1} \cdot \ldots$$

$$a_{2023} = \frac{(2023^2+1)\,2023 \cdot 2022 \cdot 2021 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} \cdot 19$$

$$a_n = (n^2+1)\,n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 19$$

$a_2 = 5 \cdot 19 =$

$a_3 = 10 \cdot 3 \cdot 19$

$a_4 = 17 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 19$

$a_5 = 26 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 19$

$$\frac{a_3}{a_2+a_1} = \frac{30 \cdot 19}{19(1+5)} = \frac{30}{6} = 5$$

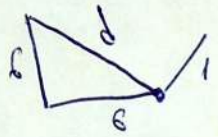
$$\frac{a_4}{a_3+a_2+a_1} = \frac{17 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{19}}{\cancel{19}(1+5+30)} = \frac{\cancel{12} \cdot 17}{\cancel{36}\,3} = \frac{17}{3}$$

$$\cancel{19 \cdot 3^{2022} \cdot 4^{2022}}$$

черновик

1) $a = b = 6$

$c = 1$




$10^{\alpha} \le 2^{2023} \le 10^{\alpha+1}$

$\alpha \le 2023 \lg 2 \le \alpha+1$

$2023 \lg 2 = 2023 \cdot \frac{1}{\log_2 10}$

$\frac{1}{\log_2 10} = \frac{2023}{1+\log_2 5}$

$674 \le \log_2 2023$

$674 \log_2 10 \le 2023$

$\log_2 5 \; 674 \le 1349$

$\cancel{\log_2 5 \le \frac{2023-2}{2}}$

$673 \log_2 10 \le 2023$

$673 \log_2 5 \le 1350$

$\log_2 2{,}5 \le \frac{4}{673}$

$2 \log_2 10 < 2023 \le (2+1) \log_2 10$

$674 \log_2 10 < 2023$

$674 + 674 \log_2 5 < 2023$

$674 \log_2 5 \le 1349$

$\log_2 5 < \frac{1349}{674}$

$\log_2 5 < 2 + \frac{101}{674}$

$\log_2 2{,}5 < \frac{101}{674}$

$2023 - 674 = 1349$

$1348$

$101$

Чистовик № 6

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} \Rightarrow a_n = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} a_{n-1} = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} \cdot \frac{((n-1)^2+1)(n-1)}{(n-2)^2+1} a_{n-2}$$

$$= \frac{(n^2+1)n}{\cancel{(n-1)^2+1}} \cdot \frac{\cancel{((n-1)^2+1)}(n-1)}{\cancel{(n-2)^2+1}} \cdot \frac{\cancel{((n-2)^2+1)}(n-2)}{(n-3)^3+1} a_{n-2}$$

можно заметить, что при продолжении расписывания этой формулы числитель и знаменатель будут сокращаться. Итоговая формула примет следующий вид:

$$a_n = \frac{(n^2+1)\, n\,(n-1)\ldots(n-n+1)}{2} a_1 \text{, тогда}$$

$$a_{2023} = \frac{(2023^2+1)\,2023\cdot 2022\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}{2} \cdot 19$$

$$\frac{a_{2023}}{S_{2022}} = \frac{(2023^2+1)\,2023\cdot 2022\cdot 2021\cdot \ldots \cdot 3}{5+3(10+4(17+5(26+\ldots\ldots+2021(2021^2+1+2022(2022^2+1))))))}$$

черновик

$10^{\alpha} \le 2^{2023} < 10^{\alpha+1}$

$\alpha \le 2023 \lg 2$

$\lg 2 = \frac{1}{1+\log_2 5} \approx \frac{1}{1+2} \approx \frac{1}{3}$

$2023 : 3 = 674$ (18, 22, −21, 13)

$2023 : 7 = 289$ (−14, 62, −56, 63)

$289$

$17^2 \cdot 7$

$674$

$\cancel{674}$

$17 \cdot 39$

$\cancel{510}$ $\cancel{485}$

$\cancel{680}$ $5$

$17$

$663$

$\times 17$

$1$

$139$

$2023$

$-664$

$1359$

$2 \cdot \log_2 10 \le 2023$

$\cancel{663} \cdot \log_2 10 \le \cancel{2023}$

$39 \log_2 10 \le 139$

$\cancel{39} + 39 \log_2 5 \le 100$

$\cancel{\log_2 5 \le}$

$39 + 39 \log_2 2{,}5 \le 100$

$\boxed{39 \log_2 2{,}5 \le 61}$

$664 \log_2^3 10 \ge 2023$

$1300$

$128$

$\cancel{664}$ $\cancel{31}$ $\cancel{1552}$

$664 \log_2 5 \ge 1359$

$2$ $\frac{31}{664}$

$1359$

$-664$

$695$

$664 + \log_2 2{,}5$

$\log_2 2{,}5 \ge \frac{695}{664}$