0 217434 720002

21-74-34-72
(86.11)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Александрова Олега Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
21-74-34-72	95	15	15	15	15	15	15	5	0

21-74-34-72
(86.11)

95 (девяносто пять)

Черновик

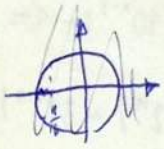
№2) $\begin{array}{r} 1234 \\ +\ 789 \\ \hline 2023 \end{array}$

$\frac{3}{2}-\frac{12}{5}=\frac{15-24}{10}=-\frac{9}{10}=0{,}9$

$1234\sin^{20}(x-\frac{\pi}{3})\le 1234$

$-789\cos^{23}(\alpha x-\frac{\pi}{4})\le 789$

$\begin{cases}\sin^{20}(x-\frac{\pi}{3})=1\\ \cos^{23}(\alpha x-\frac{\pi}{4})=-1\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin(x-\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in Z\\ \sin(x-\frac{\pi}{3})=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in Z\end{array}\right.\\ \cos(\alpha x-\frac{\pi}{4})=-1\end{cases}$



$\begin{cases}x=-\frac{5\pi}{6}+\pi k;\ k\in Z\\ \alpha x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\ k\in Z\end{cases}$

$(3\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2})=$

$=\sin\frac{\alpha}{2}(6\cos\frac{\alpha}{2}+1)$

$\alpha\cdot\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\ k\in Z$

$\alpha=\frac{3}{2}+\frac{12\pi k}{5};\ k\in Z$

$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 8 \\ \hline 288 \\ -\ 1 \\ \hline 295 \end{array}$

$\frac{7}{36}$

$;-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}$

$\alpha\cdot-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\ k\in Z$

$\frac{3}{2}$

$\alpha=-\frac{15}{2}-12k;\ k\in Z$

$\alpha=-\frac{15}{2}$

$-\frac{15}{2}+12=\frac{24-15}{2}=\boxed{\frac{9}{2}}$

$36t^2+3t-18$

$D=9+4\cdot18\cdot36=$

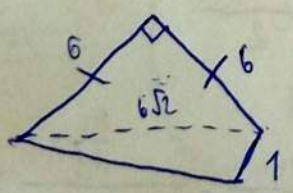
$=9(1+8\cdot36)=9\cdot17^2$

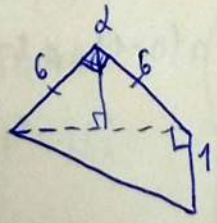
$\frac{2}{3}$

$\Rightarrow t=\frac{-3\pm51}{72}=\left[\begin{array}{l}\frac{7}{36}\ \frac{48}{72}\\ -\frac{5}{18}\end{array}\right.$

$-\frac{3}{4}$

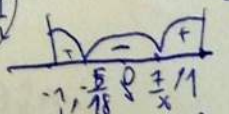
№4)





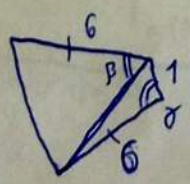
$18\sin\alpha+$

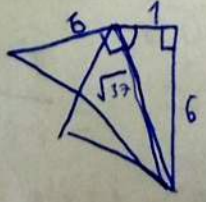
$12\sin\frac{\alpha}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}$



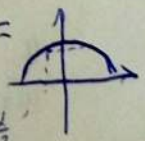
$18\sin\alpha+6\sin\frac{\alpha}{2}\le18+6\sqrt{2}$

>24

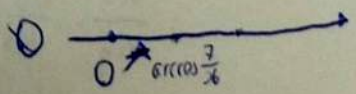




$18\cos\alpha+3\cos\frac{\alpha}{2}=$



$=36\cos^2\frac{\alpha}{2}-18+3\cos\frac{\alpha}{2}$



$3\sqrt{37}+3\le24$

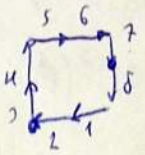
N5) Черновик.

$S(2)+S(5)=S(10)$

$S(4)+S(25)=S(100)=S(10^2)$ $\qquad$ $S(16)+S(625)=S(10000)$

$S(8)+S(125)=S(1000)$ $\qquad$ $2023 \underset{8}{\equiv} 7$

$S(2^n)+S(5^n)=S(10^n)$ $\qquad$ $\boxed{2024}$



$S(10^{n-1})+1=S(10^n)$

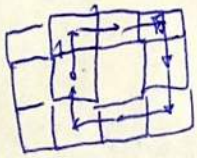
$S(2^n)+S(5^n)=1+S(2^{n-1})+S(5^{n-1})$

$8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128 \to 256 \to 512 \to 1024 \to 2048 \to 4192 \to 8$

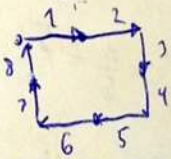
$625+\ldots \to \ldots \to \ldots$

2	16	128	1024	16
4	32	256	2048	
8	64	512	4192	
			8384	

$S(2^n)+S(5^n)=2+S(2^{n-1})+S(5^{n-1})$



$\underbrace{\quad}_{\geq 5}\ldots \qquad \underbrace{\quad}_{\geq 2}\ldots$



$(n-1)^2+1$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}\cdot\frac{\cancel{(n^2-2n)}(n-1)}{(n-2)^2+1}=\frac{(n^2+1)\cdot n(n-1)}{(n-2)^2+1}$$

$$\frac{a_n}{a_1}=(n^2+1)\cdot n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=\frac{(n^2+1)\cdot n!}{2}$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{5\cdot 2}{2}=5$$

$$\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}=\frac{\frac{a_n}{a_1}}{1+\frac{a_2}{a_1}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_1}}=$$

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1}{a_1}\frac{a_3}{a_2}=\frac{10\cdot 3}{5}\cdot 5=10\cdot 3$$

$$=\frac{(n^2+1)\,n!}{1+(2^2+1)\,2!+\ldots+((n-1)^2+1)\cdot(n-1)!}$$

$$\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_2}=\frac{17\cdot 4}{10}\cdot 10\cdot 3=17\cdot 4\cdot 3$$

21-74-34-72
(86.11)

черновик

$\sqrt{45-\sqrt{2023}} = \sqrt{\frac{90-2\sqrt{2023}}{2}}$

$2023 : 17 = 119$

-17, 32, -17, 153, -153, 0

$119 : 7 = 17$

-7, 49

$7 \cdot 17^2$

$\sqrt{2023} = 17\sqrt{7}$

$17^2 =$

17×17: 119, 17, 289

$45^2 =$

45×45: 225, 180, 2025, -2023, 2

$\left(90 - 2\sqrt{2025-2023}\right) = \sqrt{90-2\sqrt{2}}$

$\left(\sqrt{45^2-2023}+90\right)$

$\log_2\left(|x^2-2|^3+1\right) + \sqrt{4x^2-3x^2+5} \geq 0$

$4x^4-3x^2+5$ $D = 9-20 = -11$

$2x^4+5x^2-3=0$

$D = 25+24 = 7^2$

$x^2 = \frac{-5\pm 7}{4} = \left[\begin{array}{l} -3 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \pm\sqrt{2}$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} -$

$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{(n-1)^2+1}{(n^2+1)\cdot n} =$

$= \frac{n^2-2n+2}{n^3+n}$

$-\sqrt{90-2\sqrt{2}}$

$[-9, \ldots] = -10$

$\left|\sqrt{90-2\sqrt{2}}\right| \cancel{\geq} |t|$

$|90-2\sqrt{2}| \cancel{\geq} t^2$

$90 \cancel{\geq} t^2 + 2\sqrt{2}$

2023×2023

$2023^2 = (2022-1)^2 =$

$= \frac{2022^2+2\cdot 2022+1}{2022} =$

$= 2024 + \frac{1}{2022}$

$\frac{n^2-2n+2}{(n^2+1)\cdot 2n}$

$\frac{(n^2+1)-2n}{(n^2+1)\cdot n}$

$2x^4+5x^2-3 \leq 4x^4-3x^2+5$

$2x^4-8x^2+8 \geq 0$ ≤ 0

$(x^2-2)^2 \geq 0$ ≥ 0

№6) черновик.

$S(a)+S(1)=S(10a)$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}$ $S(4)+S(25)=S(100)$

$S(2^2$ $S(2)+S(5)=S(10)$

$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{((n-1)^2+1)\cdot(n-1)}{(n-2)^2+1}$

$S(a)+S(2)=S(10a)$

$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}=\frac{((n-2)^2+1)\cdot(n-2)}{}$

$2^4=16$

$2^7=128$

$2,3$

$5,6$

$7,8$

$2^9=512$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ $-$ 625 (125 (3) (4)

3125 – 5

15625 – 6

78125

390625 – 7

8

a_1

$1\to 5$

a

$a+\frac{1000}{a}$

$2\cdot\frac{10}{2}=10$ $\underbrace{2^x}_{n\text{ чис.}}$ $\underbrace{10^x}_{x+1\text{ чис.}}$

$S(5^x)=x+1-n$

$a_{n-1}+a_n=a_{n-1}+\frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}\cdot a_{n-1}=$ $\frac{\times\frac{2}{5}}{10}$ $\frac{\times\frac{3}{5}}{15}$

$S(5^{n-1})=n-S(2^{n-1})$

$=\frac{n^3+n^2-n+2}{(n-1)^2+1}a_{n-1}$

$S(5^n)=S(5^{n-1})$

$S($

$\frac{(n^2+1)\cdot n!}{2}a_1=a_n$

12

$a_1+a_2=a_1+\frac{5\cdot 2}{2}a_1=6a_1$ $\frac{10^n}{10^x-\dots}\geq\frac{10^n}{10^x}$

$a_1+a_2+a_3=a_1+5a_1+\frac{10\cdot 3}{5}a_2=36a_1$

$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+5a_1+30a_1+\frac{17\cdot 4}{10}\cdot a_3=$

$S(a)+S(\frac{10}{a})$ $S(2^n)+S(\frac{10^n}{2^n})$ $\frac{10^n}{2^n}\approx$

$=36a_1+17\cdot 12a_1=240a_1$ 20

$\frac{a_n}{a_1}=\frac{n!}{2}(n^2+1)$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=240a_1+\frac{26\cdot 5}{17}\cdot a_4=$

$\frac{\frac{2023!}{2}\cdot(2023^2+1)a_1}{\frac{2023!}{2}\cdot 2022\cdot a_1}=$ $\frac{10}{2}=$ $a\leq 10^x$ 30

$=240a_1+26\cdot 60a_1=1800a_1$ 10

$1\to 2\to 4\to 6\to$ $S(\frac{10^n}{a})=n-x$

$=\frac{2023^2+1}{2022}=$

$1\to 2\to 4\to 8$ $\sum_{n-1}+\frac{(n^2+1)\cdot n!}{2}a_1=\frac{n!}{2}(\sum_{n-1}+n^2+1)=\frac{(n+1)!}{2}$

$\sum_n$

$1\to 3\to 6$

$+1$

$1+1$

2

3

1	1
5	2
25	4
(125	8
5)	16
	+132
	64
	128

$S(2^n)=a\cdot 10^x$

$S(\frac{2^n}{10^x})=$

$\frac{1800}{12}$

15

$\frac{n!}{2}\cdot(\sum_n)$ $n(n+1)$

$\sum_n=\frac{n!}{2}\cdot n(n+1)a_1=\frac{(n+1)!}{2}\cdot n\cdot a_1$

$\sum_{n-1}=\frac{(n-1)!}{2}n\cdot(n-1)=\frac{n!(n-1)}{2}$

21-74-34-72
(86.11)

Беловик

№1) Т.к. $\sqrt{45-\sqrt{2023}} < \sqrt{45+\sqrt{2023}}$, то

$$\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} = -\sqrt{\left(\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{45-\sqrt{2023} - 2\cdot\sqrt{(45-\sqrt{2023})\cdot(45+\sqrt{2023})} + 45+\sqrt{2023}} =$$

$$= -\sqrt{90-2\cdot\sqrt{45^2-2023}} = -\sqrt{90-2\sqrt{2}}.$$

Заметим, что $90-2\sqrt{2} > 81$, но $90-2\sqrt{2} < 100 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9 < \sqrt{90-2\sqrt{2}} < 10$$

$$-10 < -\sqrt{90-2\sqrt{2}} < -9$$

$$-10 < \sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} < -9.$$

Т.к. $-10 < \sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}}$, а $\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} < -9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}}\right] = -10$$

Ответ: -10

№2) $1234\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - 789\cos^{23}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = 2023.$

Т.к. $-1 \le \sin x \le 1$ и $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1234\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \le 1234$$

$$-789\cos^{23}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \le 789$$

$$1234\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - 789\cos^{23}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \le 2023.$$

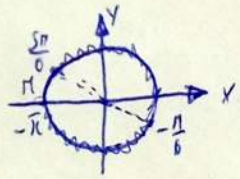
Равенство выполняется при:

$$\begin{cases} 1234\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 1234 \\ -789\cos^{23}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = 789 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 \\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}+\pi k;\ k\in Z \\ 2x-\frac{\pi}{4} = \pi+2\pi n;\ n\in Z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6}+\pi k;\ k\in Z\ (1) \\ 2x = \frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z\ (2) \end{cases}$$

4 1-ое уравнение и её решения на промежутке от $-\pi$ до π: $\boxed{\text{Беловик}}$

Нам удовлетворяют $x \in \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.



Тогда нам удовлетворяет α, удов. след. совокуп:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha\cdot\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{4}+2\pi n; n\in\mathbb{Z} \\ \alpha\cdot\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{4}+2\pi m; m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \alpha=-\frac{15}{2}+12n; n\in\mathbb{Z} \ (\mathrm{I}) \\ \alpha=\frac{3}{2}+\frac{12}{5}m; m\in\mathbb{Z}. \ (\mathrm{II}) \end{array}\right.$$

В случае I: $\min|\alpha|=\frac{7}{2}$, если $n>0$, то к α мы будем прибавлять числа >0, и $\alpha\uparrow$.

Если $n<0$, то мы из α будем вычитать 12, и $12>7$, т.е. $\left|\frac{7}{2}-12\right|>\left|\frac{7}{2}-7\right|=\left|-\frac{7}{2}\right|=\frac{7}{2}$, т.е. α тоже будет $\uparrow$.

В случае II: $\min|\alpha|=0{,}9$, т.к. $\frac{12}{5}>1{,}8$, то $\left|\alpha-\frac{12}{5}m\right|>|\alpha-1{,}8m|>|0{,}9-1{,}8|=0{,}9$ и $\left|\alpha+\frac{12}{5}m\right|>|\alpha+0|=\alpha$ (при $m>0$).

Т.к. $0{,}9<\frac{7}{2} \Rightarrow \min\alpha=0{,}9$

Ответ: 0,9

Задача №3.

$$\log_2(|x^2-2|^3+1)+\sqrt{4x^4-3x^2+5}=\sqrt{2x^4+5x^2-3}$$

$$\log_2(|x^2-2|^3+1)=\sqrt{2x^4+5x^2-3}-\sqrt{4x^4-3x^2+5}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^4+5x^2-3\geq 0 \\ 4x^4-3x^2+5\geq 0 \\ |x^2-2|^3+1>0 \end{cases}$

Заметим, что $F(x)=|x|\geq 0$ при $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^2-2|^3+1\geq 0+1=1 \Rightarrow$

21-74-34-72
(86.11)

Задача №4 продолжение... Беловик

Т.к. $\sin\alpha \in [-1;1] \Rightarrow$

$\Rightarrow S(\alpha) = 15\sin\alpha + 6\sin\frac{\alpha}{2} \le 15 + 6 = 24 < 30 < 15\sqrt{5} \Rightarrow$

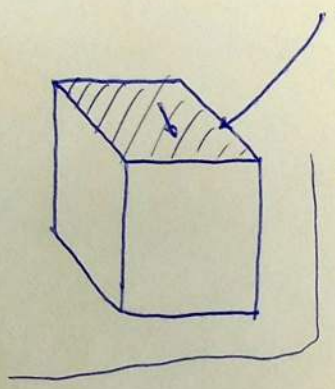
$\Rightarrow$ Если рёбра = 6 имеют общ. точку, то их $S < S_{ABCD}$, когда нет общ. точки $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABCD\,max} = 15\sqrt{5} \Rightarrow AD = 9$

Ответ: 9

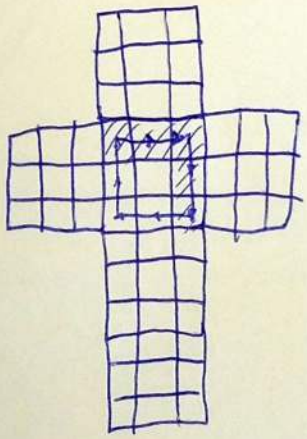
Задача №7.

Пусть ~~жучок движется~~ мы повернём кубик так, чтобы первый шаг жучка был в нашу сторону, т.е.



на этой грани находится жучок, а — это направление его движения.

∡ развёртку куба:



Заметим, что если жучок будет находится на заштрихованной области, то он будет двигаться по циклу длиной 8, описывая при этом квадрат, ~~состоящий из 8 клеток~~

Т.к. ~~за~~ 5 секунд < 8 секунд, и каждую вершину жучок посещал только 1 раз, то через 5с, он не сможет оказаться в другой точке.

$\Rightarrow \log_2(|x^2-2|^3+1) \geq \log_2 1 = 0. \Rightarrow \log_2(|x^2-2|^3+1) \geq 0$ при $x \in ОДЗ$.

(!) $\sqrt{2x^4+5x^2-3} \leq \sqrt{4x^2-3x^2+5}$.

Т.к. на ОДЗ данные многочлены ≥ 0, то мы можем это возвести в квадрат.

$2x^4+5x^2-3 \leq 4x^2-3x^2+5$

$2x^4-8x^2+8 \geq 0$

$2(x^2-2)^2 \geq 0$.

Равенство выполняется при $x^2=2$.

Имеем. $\left.\begin{array}{l}\log_2(|x^2-2|^3+1) \geq 0 \\ \sqrt{2x^4+5x^2-3} - \sqrt{4x^4-3x^2+5} \leq 0\end{array}\right| \Rightarrow$ равенство выполняется при

$\begin{cases}\log_2(|x^2-2|^3+1)=0 \\ x^2-2=0\end{cases}$ $\begin{cases}|x^2-2|^3+1=1 \\ x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$ $\left.\begin{cases}x^2=2 \\ x=\pm\sqrt{2}\end{cases}\right| \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Проверим удовлетворяют корни ОДЗ:

Если $x=\sqrt{2}$, то.

$\begin{cases}2\cdot(\sqrt{2})^4+5\cdot(\sqrt{2})^2-3 \geq 0 \\ 4\cdot(\sqrt{2})^4-3\cdot(\sqrt{2})^2+5 \geq 0 \\ |(\sqrt{2})^2-2|^3+1>0\end{cases}$ $\left.\begin{cases}15>0 \\ 15>0 \\ 1>0\end{cases}\right| \Rightarrow x=\sqrt{2} \in ОДЗ$.

Аналогично, подставим $x=-\sqrt{2}$ в ОДЗ, убедимся, что он входит.

Ответ: $x=\pm\sqrt{2}$

Беловик

Беловик

№6)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}\\
&\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{((n-1)^2+1)\cdot(n-1)}{(n-2)^2+1}\\
&\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = \frac{((n-2)^2+1)\cdot(n-2)}{(n-3)^2+1}\\
&\dots\\
&\frac{a_2}{a_1} = \frac{(2^2+1)\cdot 2}{(2-1)^2+1}
\end{aligned}\right\}\text{ умножаем равенства.}$$

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}\cdot\frac{((n-1)^2+1)\cdot(n-1)}{(n-2)^2+1}\cdot\ldots\cdot\frac{(2^2+1)\cdot 2}{2} = \frac{(n^2+1)\cdot n\cdot n-1\cdot\ldots\cdot 2}{2} = \frac{(n^2+1)\cdot n!}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(n^2+1)\cdot n!}{2}\cdot a_1$$

(!), что $a_1+a_2+\ldots+a_n = \frac{(n+1)!\cdot n}{2}\cdot a_1$, ~~с помощью~~ введя мат. индукцию по n.

База: $\underline{n=2}$: $a_1+a_2 = a_1+\frac{(2^2+1)\cdot 2!}{2}\cdot a_1 = 6a_1$

$a_1+a_2 = \frac{(2+1)!\cdot 2}{2}a_1 = 3!\cdot a_1 = 6a_1$.

$\underline{n=3}$: $a_1+a_2+a_3 = \left(\cancel{a_1}+\frac{(2^2+1)\cdot 2!}{2}+\frac{(3^2+1)\cdot 3!}{2}\right)a_1 = 36a_1$

$a_1+a_2+a_3 = \frac{(3+1)!\cdot 3}{2}a_1 = \frac{4!\cdot 3}{2}a_1 = 4\cdot 3\cdot 3a_1 = 36a_1$.

$\boxtimes$

База доказана.

Перепод: Пусть мы знаем, что выполняется для $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1} = \frac{n!(n-1)}{2}a_1$.

(!) что выполняется $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n = \frac{(n+1)!\cdot n}{2}$

Док-во:

$a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n = \frac{(n-1)\cdot n!}{2}a_1+a_n = \left(\frac{(n-1)\cdot n!}{2}+\frac{(n^2+1)\cdot n!}{2}\right)a_1 =$

$= \frac{n!}{2}(n^2+1+n-1)\cdot a_1 = \frac{n!\cdot n\cdot(n+1)}{2}a_1 = \frac{(n+1)!\cdot n}{2}a_1$.

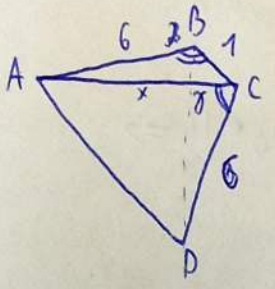
$\boxtimes$

Мы доказали базу и переход => $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n\cdot(n+1)!}{2} a_1$. Белових

$$\frac{a_{2023}}{a_1+a_2+\ldots+a_{2022}} = \frac{\frac{(2023^2+1)\cdot 2023!}{2} a_1}{\frac{2022\cdot 2023!}{2} a_1} = \frac{2023^2+1}{2022} = 2024\frac{1}{1011}$$

Ответ: $2024\frac{1}{1011}$

N4) Пусть стороны, которые равны по 6 не имеют общей точки, тогда наш многоугольник выглядит так:



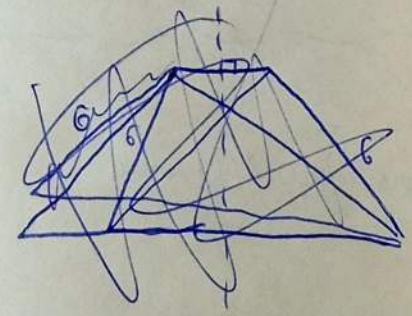
$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} =$

$= \frac{1}{2}6\sin\beta + \frac{1}{2}AC\cdot 6\cdot\sin\gamma =$

$= 3(\sin\beta + AC\sin\gamma)$

Т.к. S_{ABCD} — max => S_{ACD} — max, т.е. $\sin\gamma = 1$ =>

=> $S_{ABCD} = 3(\sin\beta + AC)$



4 4-уг. ABCD:

Проведём в т. B окружность радиуса 6:

Заметим, что $S_{ABCD} = S_{BCA} + S_{ABD}$

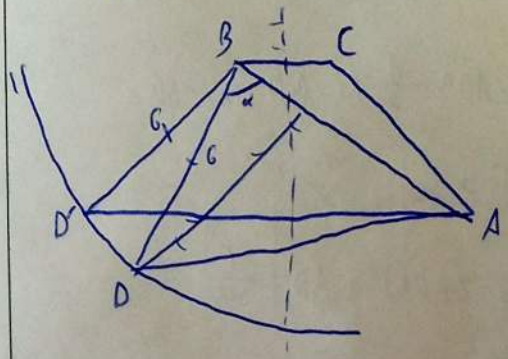
$S_{ABCD'} = S_{BCA} + S_{ABD'}$

$S_{ABCD'} > S_{ABCD}$, if $S_{ABD'} > S_{ABD}$.

$S_{ABD'} = \frac{1}{2}BD'\cdot AB\cdot\sin\angle ABD'$

$S_{ABD} = \frac{1}{2}BD\cdot AB\sin\angle ABD$

=> $S_{ABD'} > S_{ABD}$ if $\sin\angle ABD' > \sin(ABD)$.



Т.е., чтобы S_{ABCD} была max, нужно, чтобы $\angle ABD = 90°$, аналогично (!), что $\angle ACD$ должен быть $= 90°$

Белових

№5) Ответ: 2024

$$S(2^{2023}) + S(5^{2023}) = S(2^{2023}) + S\left(\frac{10^{2023}}{2^{2023}}\right)$$

Пусть a – целое число и существует x – целое полож. число, такое, что $a \le 10^x$ и x – наименьшее из возможных чисел.

Т.к. $a \le 10^x \Rightarrow S(a) < x$.

(!) $S\left(\frac{10^n}{a}\right) = n - S(a) = n - x$.

Если $S\left(\frac{10^{n-1}}{a}\right) > n - x \Rightarrow S\left(\frac{10^{n-1}}{a}\right) \ge n - x + 1$, т.е. $a \le 10^{x-1}$, и x – наименьшее число такое что $10^{x-1} \le a \le 10^x$. Пр-ие!

Если $S\left(\frac{10^{n-1}}{a}\right) < n - x \Rightarrow S\left(\frac{10^{n-1}}{a}\right) \le n - x - 1$, т.е. $a > 10^x$!? $\Rightarrow$

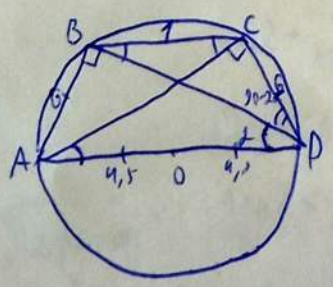
$\Rightarrow S\left(\frac{10^{n-1}}{a}\right) = n - S(a)$.

$$S(2^{2023}) + S\left(\frac{10^{2023}}{2^{2023}}\right) = S(2^{2023}) + 2024 - S(2^{2023}) = 2024$$

■

~~№4)~~ Задача №4 продолжение...

Т.е. мы получили, что $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, т.е. около 4-угол. $ABCD$ можно описать окружность с диам. $= AD$.



Т.к. $AB = CD$ и $ABCD$ – вписан, то нетрудно док., что $ABCD$ – р/б трап.

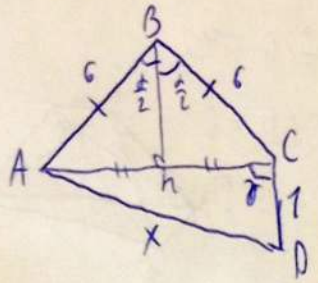
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot BD \cdot \sin\angle ADB + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \cdot \sin\angle CBD =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 9) \cdot 3\sqrt{5} = 15\sqrt{5} > 30$$

$\angle ADB$ можно найти по т. синусов: $\frac{BC}{\sin(90-2\alpha)} = \frac{6}{\sin\alpha}$ ($\alpha = \angle ADB$), а $AD = \frac{6}{\sin\alpha}$.

Если ребра = 6 имеют общ. точку:

Беловик



Д.п. $BH \perp AC$ ($\triangle ABC$ = р/б ($AB = BC$)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle \triangle AHB$: $AH = AB \cdot \sin\angle ABH = 6 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 2 \cdot AH = 12\sin\frac{\alpha}{2}$

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} AC \cdot CD \cdot \sin\gamma =$

$= 18\sin\alpha + 6\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\gamma.$

Т.к. S_{ABCD} – max $\Rightarrow \sin\gamma = 1 \Rightarrow S_{ABCD} = 18\sin\alpha + 6\sin\frac{\alpha}{2}$.

$S(\alpha) = 18\sin\alpha + 6\sin\frac{\alpha}{2}$

$S'(\alpha) = 18\cos\alpha + 6 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} = 18(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1) + 3\cos\frac{\alpha}{2} =$

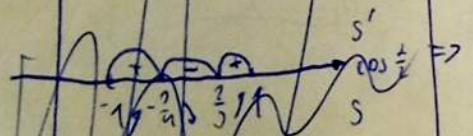
$= 36\cos^2\frac{\alpha}{2} + 3\cos\frac{\alpha}{2} - 18 > 0$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{12}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} > 0$

$(\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3})(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}) > 0$

Т.к. $\alpha \in (0; 180°) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in (0; 90°) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{4} \\ \cos\frac{\alpha}{2} = 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} = \arccos(-\frac{3}{4}) + 2\pi k; k \in Z \\ \frac{\alpha}{2} = 2\pi k; k \in Z \end{array}\right.$

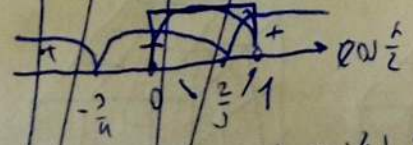


$\Rightarrow S_{max} = \max($

$\cos\frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 0°$

$\cos\frac{\alpha}{2} = 0$

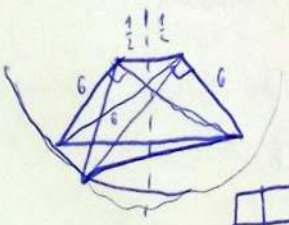
$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} \in [0; 1) \Rightarrow$

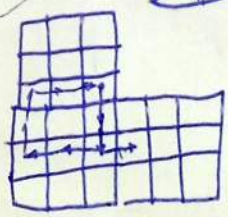


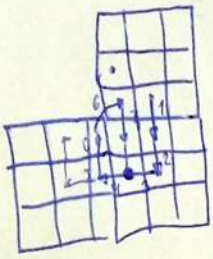
Т.к. на проч. $\cos\frac{\alpha}{2} \in (0; \frac{2}{3})$ $S \downarrow$, а $\cos\frac{\alpha}{2} \in (\frac{2}{3}; 1)$: $S \uparrow \Rightarrow$

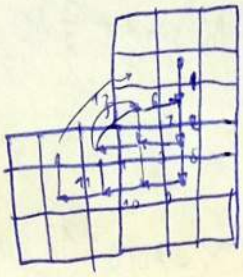
$S_{ABCD} = \max(S($

Черновик

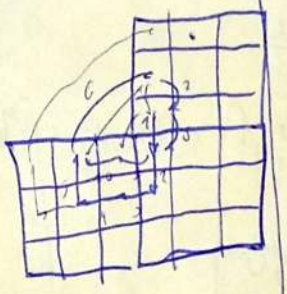


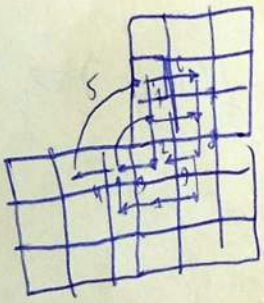




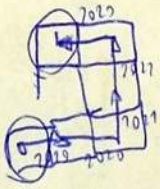


$2023-8=2020 \underset{5}{\equiv} 0$





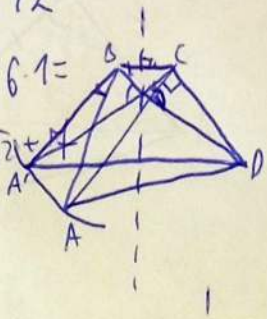
2023 →

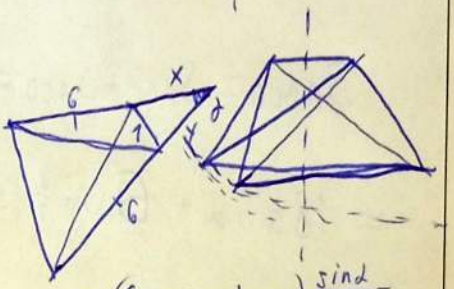


$7\cdot 6=42$

$6\cdot 6\sqrt{2}+6\cdot 1=$

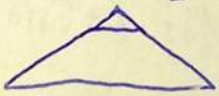
$=36\sqrt{2}+1$

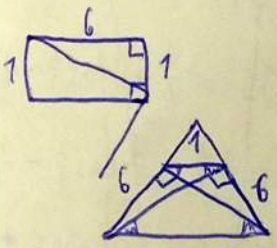




$S=((6+x)(6+y)-xy)\frac{\sin\alpha}{2}=$

$=$





$\frac{6}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin(90-2\alpha)}=\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{6}$

$6-12\sin^2\alpha=\sin\alpha$

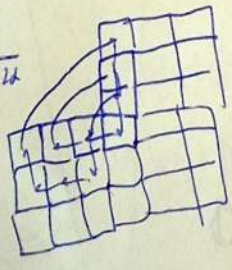
$12\sin^2\alpha+\sin\alpha-6=0$

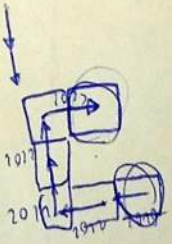
$D=1+24\cdot 11=$

17^2

$\sin\alpha=\frac{-1\pm 17}{24}=\left[\frac{2}{3}\right.$

$\sqrt{81-36}=$

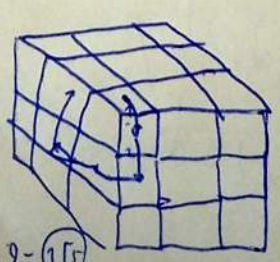




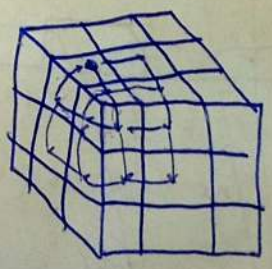
$2R=\frac{6}{\frac{2}{3}}=9$

$R=4{,}5$

$\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot 9=3\sqrt{5}$



19c



24c.

$1_c \to 5c \to 25c.$