0 362933 100005

36-29-33-10
(88.7)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

+ 1 лист (Лучшев)
+ 1 лист Вг

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бондин Петра Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

| Шифр | Сумма | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36-29-33-10 | 95 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 5 | 15 | 0 |

36-29-33-10 (88.7)

Черновик

95

№1

$-x = \sqrt{45-\sqrt{2022}} - \sqrt{45+\sqrt{2022}}$

$x^2 = 45-\cancel{\sqrt{2022}} - 2\sqrt{45^2-2022} + 45 + \cancel{\sqrt{2022}}$

$x^2 = 90 - 2\sqrt{45^2-2022} =$

$= 90 - 2\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} \times 45 \\ 45 \\ \hline 225 \\ +\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

Тогда, $x = \sqrt{x^2} = \sqrt{90-2\sqrt{3}}$,

и $9 < x < 10$

$81 < \left(\sqrt{90-2\sqrt{3}}\right)^2 < 100$

$81 < 90-2\sqrt{3} < 100$

$2\sqrt{3} < 9$ $\quad 10 > -2\sqrt{3}$

$4\cdot 3 < 81 \Rightarrow -9 > -x > -10$

$\Rightarrow [-x] = -10$.

Ответ: $[-x] = -10$.

№2

$1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - 789\cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{4}\right) = 2023$ –

– имеет решение при $x \in [-\pi;\pi]$.

$$\begin{array}{r} 1234 \\ +\ 789 \\ \hline 2023 \end{array} \Rightarrow$$

т.к. $\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \le 1$, и

$-\cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{4}\right) \le 1$, $\Rightarrow$

$1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \le 1234 \Rightarrow$

$-789\cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{4}\right) \le 789$

$1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - 789\cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{4}\right) \le 2023 \Rightarrow$

$\begin{cases} \sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^{2}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \cos\left(\alpha x+\frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \cos\left(\alpha x+\frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -1 \\ \cos\left(\alpha x+\frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}+\pi n \\ \alpha x+\frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k; \ n,k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$x = \frac{\pi}{3}+\pi n \Rightarrow x \in \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$

Черновик

N6

$\cancel{\alpha\left(\frac{1}{3}+n\right) = \frac{3}{4} + 2k,\ n,k \in \mathbb{Z}}$

$a_1 = 11$

$\alpha = \frac{3+8k}{4\left(\frac{1}{3}+n\right)} = \frac{9+24k}{4+12n},\ n,k \in \mathbb{Z}$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}$

$\alpha = \frac{1}{4+12n} + 2\left(\frac{4+12k}{4+12n}\right),\ n,k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a_n = \frac{11}{2} n!\cdot(n^2+1)$

В то же время, $\frac{a_n}{a_1} = \prod_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_{i-1}} = \prod_{i=2}^{n} \frac{(i^2+1)\cdot i}{(i-1)^2+1} =$

$= \frac{(2^2+1)\cdot\ldots\cdot(n^2+1)}{(1^2+1)\cdot\ldots\cdot((n-1)^2+1)} \cdot n! = \frac{n!(n^2+1)}{2}.$

$\alpha\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$\alpha = -\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} + \frac{2\pi k}{\frac{2\pi}{3}}\right) = -\left(\frac{9}{8} + 3k\right) = -\frac{9}{8} - 3k.$

$\Rightarrow$ при $k=0$: $\alpha = -\frac{9}{8}$; при $k=-1$: $\alpha = 3 - \frac{9}{8} = \frac{15}{8}$;

min ~~ав~~ по модулю $\alpha$ в этом случае $= -\frac{9}{8}$.

$\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$\alpha = \frac{9}{4} + 6k$: $\alpha = \frac{9}{4}$; $\alpha = \frac{9}{4} - 6 = -\frac{15}{4} \Rightarrow$

$\alpha$ min в этом случае $= -\frac{9}{4}$.

~~Ответ~~ Ответ: $|\alpha| = \frac{9}{8}$

N3

$\log_7(|x^2-7|^3+1) + \sqrt{3x^4-9x^2+31} - \sqrt{2x^4+5x^2-18} = 0$

$\cancel{D_1 = 81 - 4\cdot 3\cdot 31 < 0}$

$\cancel{D_2 = 5^2 + 4\cdot 2\cdot 18 = 25 + 8\cdot 18 =}$

$\log_7(|x^2-7|^3+1) + \frac{3x^4-9x^2+31-2x^4-5x^2+18}{\sqrt{3x^4-9x^2+31}+\sqrt{2x^4+5x^2-18}} = 0$

$\log_7(|x^2-7|^3+1) + \frac{x^4-14x^2+49}{\sqrt{3x^4-9x^2+31}+\sqrt{2x^4+5x^2-18}} = 0$

$\log_7(|x^2-7|^3+1) + \frac{(x^2-7)^2}{\sqrt{\ldots}} = 0 \Rightarrow$ $x^2 = 7$

$2\cdot 49 + 5\cdot 7 - 18 > 0$.

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$

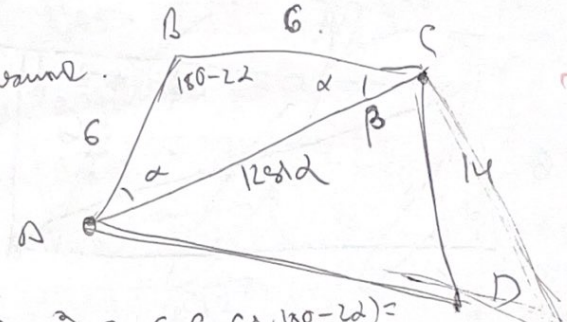
36-29-33-10
(88.7)

Черновик

№4

6, 6, 14, S – наиб.

Пусть: 6, 6 – смежные.




$AC^2 = 6^2 + 6^2 - 2\cdot 6\cdot 6\cdot \cos(180-2\alpha) =$

$= 2\cdot 6^2 + 2\cdot 6^2\cdot \cos 2\alpha = 2\cdot 6^2(\cos 2\alpha + 1) =$

$= 2\cdot 6^2\cdot 2\cos^2\alpha. \Rightarrow AC = 2\cdot 6\cdot \cos\alpha = 12\cos\alpha$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{6\cdot 6\cdot \sin(180-2\alpha)}{2} + \frac{12\cos\alpha\cdot 14\cdot \sin\beta}{2} =$

$= 18\sin 2\alpha + 12\cdot 7\cos\alpha\cdot\sin\beta =$

$= 36\sin\alpha\cos\alpha + 84\cos\alpha\sin\beta =$

$= 12\cos\alpha(3\sin\alpha + 7\sin\beta) \le$

$\le 12\cos\alpha(3\sin\alpha + 7) =$

$= 36\sin\alpha\cos\alpha + 84\cos\alpha = 18\sin 2\alpha + 84\cos\alpha$

$S'(\alpha) = 2\cdot 18\cdot\cos 2\alpha - 84\sin\alpha =$

$= 12(3(1-2\sin^2\alpha) - 7\sin\alpha) =$

$= 12(3 - 6\sin^2\alpha - 7\sin\alpha) =$

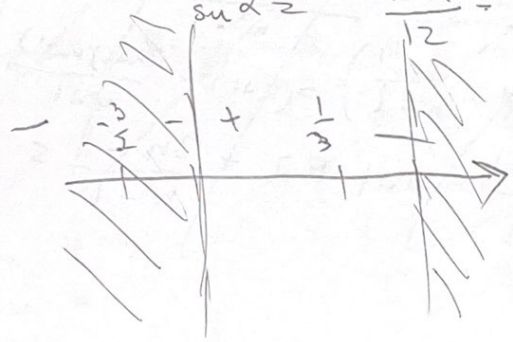
$= 12(-6\sin^2\alpha - 7\sin\alpha + 3) =$

$= -12(6\sin^2\alpha + 7\sin\alpha - 3).$

$D = 7^2 + 4\cdot 3\cdot 6 = 49 + 72 = 121.$

$\sin\alpha = \frac{-7\pm 11}{12}$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = -\frac{3}{2}\\ \sin\alpha = \frac{1}{3}.\end{array}\right.$



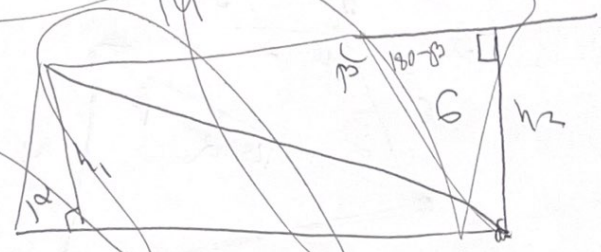

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\beta = 90°, \sin\alpha = \frac{1}{3}.$

$S = \frac{4}{12}\cdot 8\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$

~~Черновик~~ Черновик

~~Вкл: 6, 6 – противоположные.~~




№5

$S_{ABCD} =$

$S(n)$ – число цифр в дес-й запис. $n \in \mathbb{N}$.

~~$S(2^{2020}) + S(5^{2020})$~~

~~Докажем по индукции, что $S(2^n) + S(5^n) = S(10^n)$~~

~~База: $S(2^1) + S(5^1) = 1 + 1 = 2 = S(10^1)$~~

~~Пусть при $S(2^k) + S(5^k) = S(10^k)$ – верно.~~

$S(n) = [\log_{10} n] + 1$, где $n \in \mathbb{N}$

$S(2^{2020}) = [2020 \log_{10} 2] + 1$

$S(5^{2020}) = [2020 \log_{10} 5] + 1$.

~~$S(2^{2020}) + S(5^{2020}) = 2 + 2020 - \{2020 \log_{10} 2\} - \{2020 \log_{10} 5\}$~~

~~$= 2022 - \{2020 \log_{10} 2\} - \{2020 \log_{10} 5\}$~~

№6

$\{a_n\}$: $a_1 = 11$; ~~$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1) \cdot n}{(n-1)^2+1}$~~

~~$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1) \cdot n}{(n-1)^2+1}$, $a_n = n$~~

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+1)(n+1)}{n^2+1} = \frac{(n^2+1) + (2n+1)(n+1)}{n^2+1} =$

$= (n+1)\left(1 + \frac{2n+1}{n^2+1}\right) = (n+1) + \frac{(2n+1)(n+1)}{n^2+1} =$

$= (n+1) + \frac{2n^2+3n+1}{n^2+1} = n+1 + 2 + \frac{3n-1}{n^2+1} \le$

$\le n+3 + \frac{3n-1}{n^2+1}$

36-29-33-10 (88.7)

Чистовик.

№1

Пусть $x = \sqrt{45+\sqrt{2022}} - \sqrt{45-\sqrt{2022}}$.

Тогда, необходимо найти $[-x]$.

$x^2 = 45+\sqrt{2022} - 2\sqrt{45^2-2022} + 45 - \sqrt{2022} =$

$= 90 - 2\sqrt{45^2-2022} =$

$= 90 - 2\sqrt{2025-2022} =$

$= 90 - 2\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ + 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

Заметим, что

$x^2 > 9^2$: $90 - 2\sqrt{3} > 81$, $9 > 2\sqrt{3}$ и $81 > 12$.

$x^2 < 10^2$: $90 - 2\sqrt{3} < 90 < 100$.

$\Rightarrow 9 < x < 10$, и тогда $-10 < -x < -9 \Rightarrow [-x] = -10$.

Ответ: $[-x] = -10$.

№2.

Заметим, что $1234 + 789 = 2023$; $\Rightarrow$, поскольку $\sin^{20}(x+\frac{\pi}{6}) \le 1$, и $-\cos^{23}(\alpha x + \frac{\pi}{4}) \le 1$, то

$1234 \sin^{20}(x+\frac{\pi}{6}) + 789 \cdot (-\cos^{23}(\alpha x + \frac{\pi}{4})) \le 1234 + 789 = 2023 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin^{20}(x+\frac{\pi}{6}) = 1 \\ \cos^{23}(\alpha x + \frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2(x+\frac{\pi}{6}) = 1 \\ \cos(\alpha x + \frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases}$.

Если $\sin(x+\frac{\pi}{6}) = 1$: $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; т.к. $x \in [-\pi; \pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$. Тогда, т.к. $\alpha x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\alpha \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{9}{4} + 6k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $k=0$: $\alpha = \frac{9}{4}$.

Если $k=-1$, то $\alpha = \frac{9}{4} - 6 = -\frac{15}{4}$; Если $k>0$, то $\alpha$ будет $> \frac{9}{4}$, а если $k<-1 \Rightarrow \alpha < -\frac{15}{4}$; $\Rightarrow$ в этом случае мин-й по модулю $\alpha = \frac{9}{4}$ и $\frac{15}{4}$

Чистовик

№2 (продолжение)

Если $\sin(x+\frac{\pi}{6})=-1$, то $x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

Т.к. $x\in[-\pi;\pi] \Rightarrow x=-\frac{2\pi}{3}$ – корень.

$\alpha\cdot\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$.

$-\frac{2}{3}\alpha=\frac{3}{4}+2k$.

$\alpha=-\frac{9}{8}-3k,\ k\in Z$.

Если $k=0$, $\alpha=-\frac{9}{8}$; если $k\geq 0$, то $\alpha<-\frac{9}{8}$.

Если $k=-1$, $\alpha=3-\frac{9}{8}=\frac{15}{8}$; если $k<-1$, $\alpha>\frac{15}{8}$.

$\Rightarrow$ в этом случае мин-ое по модулю $\alpha=-\frac{9}{8}$.

Ответ: $\alpha=-\frac{9}{8}$.

№3

$\log_7(|x^2-7|^3+1)+\sqrt{3x^4-9x^2+31}-\sqrt{2x^4+5x^2-18}=0$.

$3x^4-9x^2+31$: $D=9^2-4\cdot3\cdot31<0 \Rightarrow 3x^4-9x^2+31>0$.

ОДЗ: $2x^4+5x^2-18\geq 0$.

$\log_7(|x^2-7|^3+1)+\frac{(\sqrt{3x^4-9x^2+31}-\sqrt{2x^4+5x^2-18})(\sqrt{3x^4-9x^2+31}+\sqrt{2x^4+5x^2-18})}{\sqrt{3x^4-9x^2+31}+\sqrt{2x^4+5x^2-18}}=0$

Т.к. $\sqrt{3x^4-9x^2+31}>0 \Rightarrow \sqrt{3x^4-9x^2+31}+\sqrt{2x^4+5x^2-18}>0$.

$\log_7(|x^2-7|^3+1)\geq\log_7(1)=0$, т.к. $|x^2-7|^3\geq 0$.

Тогда: $\log_7(|x^2-7|^3+1)+\frac{3x^4-9x^2+31-2x^4-5x^2+18}{\sqrt{3x^4-9x^2+31}+\sqrt{2x^4+5x^2-18}}=0$

$\log_7(|x^2-7|^3+1)+\frac{x^4-14x^2+49}{\sqrt{3x^4-9x^2+31}+\sqrt{2x^4+5x^2-18}}=0$

$\log_7(|x^2-7|^3+1)+\frac{(x^2-7)^2}{\sqrt{3x^4-9x^2+31}+\sqrt{2x^4+5x^2-18}}=0$

$\geq 0$

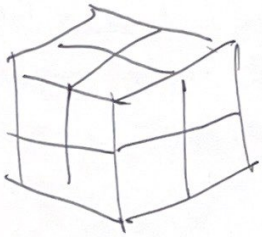
$\Rightarrow x^2=7$; $2\cdot49+5\cdot7-18>0$ – ж.

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{7}$. Ответ: $x\in\{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}$.

Чистовик

№7 (продолжение - II)

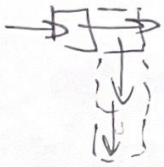
С другой стороны, мы никоим образом не можем ок-ся в той же точке за 3с (т.к. это в-то = 1 сек-н  - но он пр-т одинаков. хода), за 4с, т.к.



Т.к. ест. ход ⋮2, то:

=> чтобы вернуться в из-ную точку за 3-х ходов!

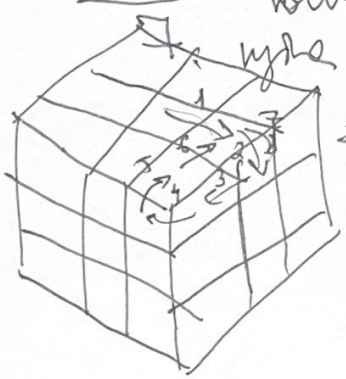
Ест. ход ⋮2, то:



=> чтобы вернуться в нач-ную точку после 3 ходов нужно ≥ 2-х ходов, независимо от местоположения куба; => ≥ 5с.

~~2023 : 24 =~~ => для реализации такого числа данных хватит 7-м в к-ном числе. => мы должны начинать из центрального шести куба, и идти в т-ку ниже С.

$$\begin{array}{r|l} 2023 & 24 \\ -192 & 84 \\ \hline 103 & \\ -96 & \\ \hline \end{array}$$



=> он п-ся здесь 2/3 19с, 4 2/3 24с; т.к. ходов должно 24,

2023-138 2#

~~⇒ ~~или он в этот момент будет~~ в~~
~~тыщи этого шага~~

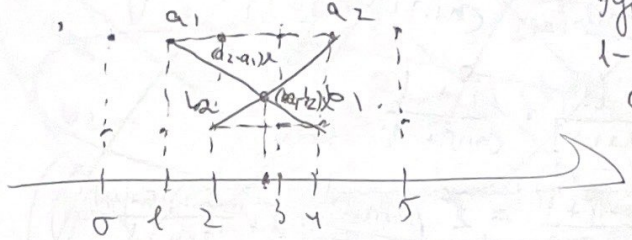
мы можем сделать чтобы из клетки
3 вып. 2 ход с пустой 3 на 1 и 2,
⇒ он сделает из неё ход, вер-но
или, б.

Чистовик N8

~~Тогда + $x = 720 - N(3 \cap 8 | m) - N(4 \cap 8 | m) - N(5 \cap 8 | m) + N(4 \cap 8 | m) + N(5 \cap 8 | m) + N(5 \cap 8 | m) - N(5 \cap 8 | m) = 720 - N(3 \cap 8 | m)$~~

Всего способов провести отрезки так, чтобы из каждой точки выходил = 1 отрезок = 6!.

Пусть есть 2 отрезка, ∩ в l-й точке.




Пусть k-тая вершина 1-й — $a_1$ и $a_2$, а 2-ю — $b_1$ и $b_2$.

Т.к. от ∩, то при $a_2 > a_1 \Rightarrow b_2 < b_1$.

Тогда координата т. ∩ = ~~$a_1 + (a_2-a_1) \cdot \frac{(a_2-a_1)}{(a_2-a_1)+(b_2-b_1)} =$~~

~~$a_1(b_2-b_1) + (a_2-a_1) = b_1a_2 - a_1b_2$~~

$a_1 + (a_2-a_1) \cdot \frac{a_2-a_1}{(a_2-a_1)+(b_2-b_2)} = a_1 + \frac{(a_2-a_1)^2}{(a_2-a_1)+(b_2-b_2)}$

Тогда, т.к. координаты $\in \mathbb{N}$, то k-тая т. ∩ — рациональна, и в значениях учитено от 1 до 10.

Чистовик

№6

$a_1 = 11$

При $n \geq 2$: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}$.

Тогда, $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{(n^2+1)}{(n-1)^2+1} \cdot \ldots \cdot \frac{(2^2+1)}{1^2+1} \cdot n! = \frac{n!(n^2+1)}{2}$.

$\Rightarrow a_n = \frac{n!(n^2+1)}{2} \cdot a_1$.

$\frac{a_2}{a_1} = 5$ $\quad \frac{a_3}{a_1+a_2} = 5$ $\quad \frac{a_4}{a_1+a_2+a_3} = \frac{17}{3}$.

$a_2 = 5a_1$

$a_3 = 30a_1$

$a_4 = 12 \cdot 17a_1$

$a_5 = 60 \cdot 26a_1$.

$\frac{a_5}{a_1+\ldots+a_4} =$

Тогда: $x_n = \frac{a_{n-1} + \ldots + a_1}{a_n + \ldots + a_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{i!(i^2+1)}{2}}{\frac{(n+1)!((n+1)^2+1)}{2}} = \frac{\sum_{i=1} i!(i^2+1)}{(n+1)!((n+1)^2+1)} =$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i!}{(n+1)!} \cdot \frac{i^2+1}{(n+1)^2+1}$.

$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)!(n+1)^2+1}{i!(i^2+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{(n+1)!}{i!} \left(1 + \frac{(n+1-i)(n+1+i)}{i^2+1}\right)\right)$

$\frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{a_1} = \frac{(n-2)!((n-2)^2+1) + (n-1)!((n-1)^2+1)}{2} =$

$= \frac{(n-2)!}{2}\left((n-2)^2+1 + (n-1)((n-1)^2+1)\right) =$

$= \frac{n!}{2}\left(\frac{(n-2)^2+1+(n-1)((n-1)^2+1)}{n(n-1)}\right) =$

$= \frac{n!}{2}\left(\frac{((n-1)-1)^2+1+(n-1)((n-1)^2+1)}{n(n-1)}\right) =$

$= \frac{n!}{2}\left(\frac{(n-1)^2-2(n-1)+1+(n-1)^3+(n-1)}{n(n-1)}\right) =$

$= \frac{n!}{2}\left(\frac{(n-1)^3+(n-1)^2-(n-1)+1}{n(n-1)}\right) =$

$= \frac{n!}{2}\left(\frac{(n-1)^2 n - n(n-2)}{n(n-1)}\right) =$

$= \frac{n!}{2}\left((n-1) - \frac{n-2}{n(n-1)}\right)$.

(Чистовик продолжение)

Чистовик № 7 (продолжение)

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1+\dots+a_n}{\frac{(n^2+1)(n+1)}{n^2+1}a_n} =$$

$$= \frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{n^2+1}{((n+1)^2+1)(n+1)} + \frac{n^2+1}{((n+1)^2+1)(n+1)}$$

Т.е. $b_{n+1} = \frac{n^2+1}{((n+1)^2+1)(n+1)}(b_n+1)$, $b_1 = \frac{1}{5}$.

Необходимо найти $b_{2020}$:

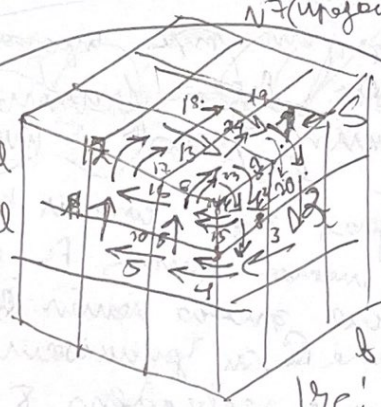
$$b_2\cdot\ldots\cdot b_{n+1} = \frac{1^2+1}{(2^2+1)\cdot 2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2+1}{((n+1)^2+1)(n+1)}(b_1+1)\cdot\ldots\cdot(b_n+1)$$

$$b_2\cdot\ldots\cdot b_{n+1} = \frac{2}{((n+1)^2+1)(n+1)!}(b_1+1)\cdot\ldots\cdot(b_n+1)$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{((n+1)^2+1)(n+1)!}(b_1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{b_n}\right) =$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{((n+1)^2+1)(n+1)!}\cdot\frac{b_2\cdot\ldots\cdot b_n}{(b_1+1)(b_2+1)\cdot\ldots\cdot(b_n+1)}$$

№7 (продолжение)



т.к. при сл-ей всевозможных ст-ей пути

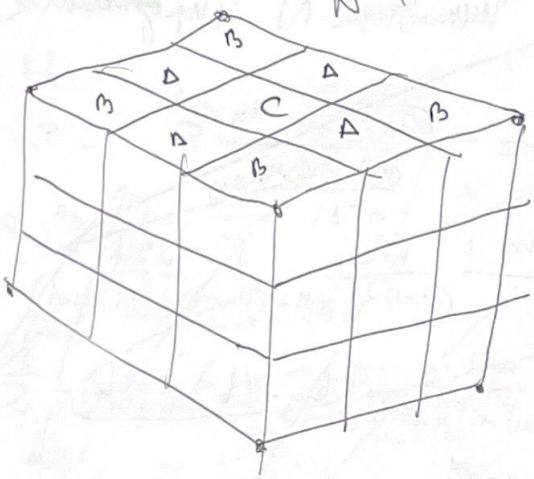
24

Во всех остальных случаях $\exists$ цикл длины 2020 на воз-ей ~~в этом случае~~ ~~по-ю последовательности~~ ~~2 — отличающ.~~

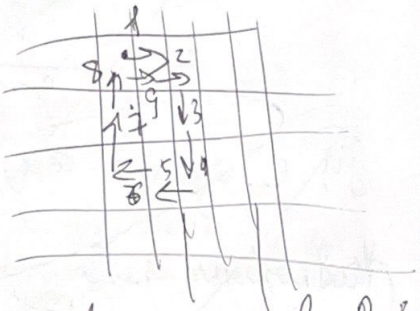
в ч-ю — по крайней мере 1 раз, в следующ. раз мы окажемся в той же точке 5 с, т.к. это родится м/у 2-м посещением 2-й клеткой, поскольку войти в цикл мы можем с $\forall$ шага, т.к. из $\forall$ шага $\exists$ $\neq 2$ р., то найдутся нет. подряд, то ~~есть~~ такой цикл $\exists$.

Чистовик

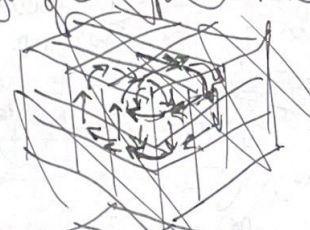
№7

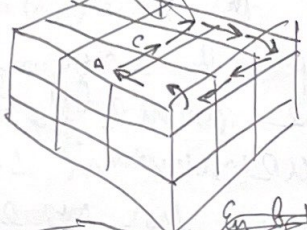



Рассмотрим движение жука на плоскости клетчатой:




Пусть он без огр-ия об-ти движения вправо. Т.к. сл-ая перемещения 2-е ⇒ он дв-ся вверх, 3-направо, 4-вниз, 5-направо, 6-вверх, 7-направо, 8-вверх, 9-направо, и цикл замкнулся. ⇒ Жук в плоскости движения по кругу из 8 клеток. Значит, что за исключением 24 угловых кв-ов, он сможет посетить собой каждую вер-ю м-й клетки. ~~Тогда, он тут продолжит идти в одном направлении, но он будет двигаться по кругу лишь 8 клеточек.~~





Пусть жук стоит на одной из клеток типа A. Если он после этого попадёт в клетку типа B, он зациклится, и в дальнейшем 8 клеток-ку, т.к. тоже жук не мог быть в той же клетке 2 раза подряд. ~~Если в клетку типа B!~~

Аналогично если жук бс ∃ если 1-й ход B→A, из B→B, т.е. все вар-ты к-ые нач-ся сл-м кв-ту 3x3 на 4-м пропускаются.

Чистовик

Заметим, что $S(n) = [\log_{10} n] + 1$, поскольку для пр-го $10^{k+1} > n \geq 10^k$, и $n = \overline{a_1 \dots a_{k+1}}$, то

$$[\log_{10} n] + 1 = 1 + [\log_{10} \frac{n}{10^k} + k] = k+1 + [\log_{10} \frac{n}{10^k}] = k+1$$

т.к. $10 > \frac{n}{10^k} \geq 1$, причем $k+1$ – равно кол-во цифр числа $n$.

Тогда, $S(2^{2020}) + S(5^{2020}) = 2 + [2020 \log_{10} 2] + [\log_{10} 5 \cdot 2020] =$

$= 2 + [2020 \log_{10} 2] + [2020 - 2020 \log_{10} 2] =$

$= 2022 + [2020 \log_{10} 2] + [-2020 \log_{10} 2] = (*)$

Если $k < 2020 \log_{10} 2 < k+1 \Rightarrow [2020 \log_{10} 2] = k$,

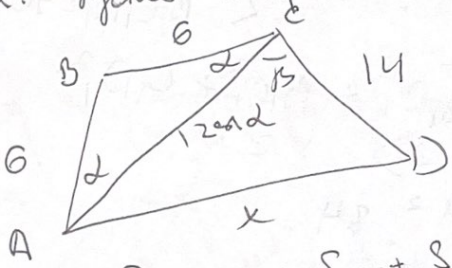
то $-k-1 < -2020 \log_{10} 2 < -k \Rightarrow [-2020 \log_{10} 2] = -k-1$.

$\Rightarrow (*) = 2022 + \cancel{k} - \cancel{k} - 1 = 2021$.

Ответ: $S(2^{2020}) + S(5^{2020}) = 2021$.

№4

Д-ся: Пусть стороны четырехугольника 6 – смежные.




Тогда $S_{ABCD}$ – наибольший.

Пусть $\angle BAC = \alpha$. $\Rightarrow$ $\angle BCD = \alpha$, и $AC = 2 \cdot 6 \cdot \cos\alpha = 12\cos\alpha$.

и $\angle ACD = \beta$.

Тогда $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{6 \cdot 12\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{14 \cdot 12\cos\alpha \cdot \sin\beta}{2} =$

$= 3 \cdot 12\cos\alpha \cdot \sin\alpha + 7 \cdot 12\cos\alpha \cdot \sin\beta \leq 3 \cdot 12\cos\alpha \cdot \sin\alpha + 7 \cdot 12\cos\alpha$,

т.е. если $\angle\beta = 90^\circ$. Т.к. $S_{ABCD}(\alpha) = 12(3\frac{\sin 2\alpha}{2} + 7\cos\alpha)$

$S'_{ABCD}(\alpha) = 12(3 \cdot \frac{\cancel{2} \cdot \cos 2\alpha}{\cancel{2}} - 7\sin\alpha) = 12(3(1 - 2\sin^2\alpha) - 7\sin\alpha) =$

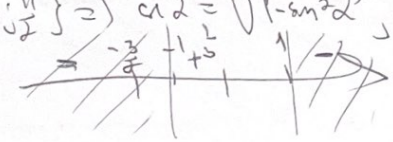
$= 12(-6\sin^2\alpha - 7\sin\alpha + 3) = -12(6\sin^2\alpha + 7\sin\alpha - 3)$.

$D = 49 + 4 \cdot 6 \cdot 3 = 49 + 72 = 121$; $\sin\alpha = \frac{-7 \pm 11}{12}$;

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = -\frac{3}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$. Тогда, т.к. $\alpha \in [0; 90]$, то максимальное $S_{ABCD}$ при $\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$.

(т.к. $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$) $\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$; тогда, в $S_{ABCD}(\sin\alpha) = 12\sqrt{1-\sin^2\alpha}(3\sin\alpha + 7)$

Гр-к пр-ї:




$\Rightarrow$ max при $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ – max пр.

Чистовик

№4 (продолжение)

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

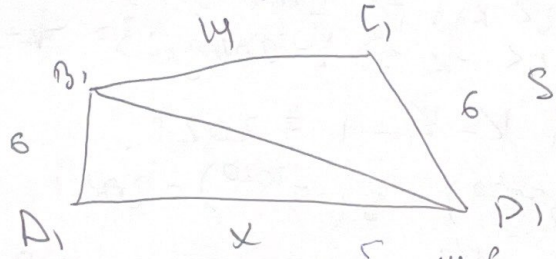
$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{2}}{2}\left(3 - \frac{1}{3} + 7\right) = 64\sqrt{2}$,

$x^2 = \left(12 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 14^2 = (8\sqrt{2})^2 + 196 = 64 \cdot 2 + 196 =$

$= 128 + 196 = 324 = 18^2 \Rightarrow x = 18$.

Т.к.: Сторона длины 6 — противоположные.

$S_{A_1B_1C_1D_1}$ — максимальна.




$S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{A_1B_1D_1} + S_{B_1C_1D_1} \leq$

$\leq \frac{6 \cdot x}{2} + \frac{14 \cdot 6}{2} \Rightarrow$

$S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{6 \cdot x}{2} + \frac{14 \cdot 6}{2}$, и $\angle B_1A_1D_1 = 90^\circ$, и $\angle B_1C_1D_1 = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ тогда $A_1B_1^2 + A_1D_1^2 = B_1C_1^2 + C_1D_1^2$

и $x^2 + \cancel{6^2} = \cancel{6^2} + 14^2 \Rightarrow x = 14$.

Тогда $S_{A_1B_1C_1D_1} = 6 \cdot 14 = 84$.

Заметим, что $64\sqrt{2} > 84$

$16\sqrt{2} > 21 \Rightarrow$ уже имеем 5 см, и

$256 \cdot 2 > 441$

тогда 4-ая сторона $= 18$.

Ответ: 4-ая сторона $= 18$.

~~Черновик~~:

№6

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1)}{(n-1)^2+1} \cdot n.$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}} \cdot \frac{\cancel{a_{n-2}}}{\cancel{a_{n-2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{a_2}}{a_1} = \frac{a_n}{a_1} - \text{с одной ст-ны,}$$

а с пра-ны. $= \frac{(n^2+1)\cancel{((n-1)^2+1)}\ldots\cancel{(2^2+1)}}{\cancel{((n-1)^2+1)}\cdot\ldots\cancel{(1^2+1)}} \cdot n! =$

$$= \frac{(n^2+1)n!}{2} \Rightarrow a_n = \frac{(n^2+1)n!}{2} \cdot a_1, \; n \in \mathbb{N}$$

$$a_n = \frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1} a_{n-1}$$

$$a_n + a_{n+1} = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} a_{n-1} + \frac{\cancel{(n^2+1)}\cdot((n+1)^2+1)\cdot n(n+1)}{\cancel{(n^2+1)}((n-1)^2+1)} a_{n-1} =$$

$$= a_{n-1}\left(\frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} + \frac{((n+1)^2+1)\cdot n(n+1)}{(n-1)^2+1}\right) =$$

$$= a_{n-1} \cdot \frac{n}{(n-1)^2+1}\left((n^2+1) + (n+1)((n+1)^2+1)\right) =$$

$$= \frac{(9+1)\cdot 6}{2} = 30 \qquad \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_1} = 5 + 1 = 6$$

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{17\cdot 24}{2} = 17\cdot 12 = 36$$

Пусть $b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{a_1}$, а $c_n = \frac{a_{n+1}}{b_n}$.

$$b_{n+1} = b_n + \frac{(n+1)^2+1)(n+1)!}{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot \frac{((n+2)^2+1)(n+2)}{((n+1)^2+1)+1} = \frac{a_{n+1}}{\left(b_n + \frac{(n+1)^2+1)(n+1)!}{2}\right)((n+1)^2+1)}$$

Черновик

№8

1×2

1×3

1×4

1×5

1×6

№8

6! = 720,

1 пара, 2 пара, 3 пара.

= 1 сп-б.

Черновик №8 Черновик

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 6 |

1, 2, 3,

$(m,n) = d$

$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$

№8

$720 - (\text{3пр.} \cap \text{1m.}) - (\text{4в 1m}) - (\text{5в 1m}) - (\text{6в 1m}) +$
$+ (\text{3в 1m} \cap \text{4в 1m}) + (\text{3в 1m} \cap \text{5в 1m}) + (\text{3в 1m} + \text{6в 1m}) +$
$+ (\text{4в 1m} \cap \text{5в 1m}) + (\text{4в 1m} \cap \text{6в 1m}) + (\text{5в 1m} \cap \text{6в 1m}) -$
$- (\text{3nв 1m} \cap \text{4nв 1m} \cap \text{5nв 1m}) - (\text{3nв 1m} \cap \text{4nв 1m} \cap \text{6nв 1m}) -$
$- (\text{3nв 1m} \cap \text{5nв 1m} \cap \text{6nв 1m}) - (\text{4nв 1m} \cap \text{5nв 1m} \cap \text{6nв 1m}) +$
$+ (\text{3nв 1m} \cap \text{4nв 1m} \cap \text{5nв 1m} \cap \text{6nв 1m}) = \text{иск-е.}$

~~Чистовик~~ Черновик

№8

Всего способов провести отрезки так, чтобы из каждой точки выходил = 1 отрезок = 6!, 6! = 720.

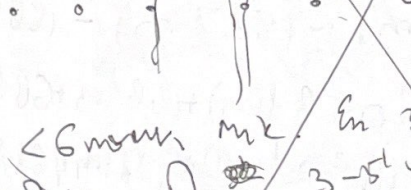
Тогда, количество сп-ов пр-ти отрезки чтобы ∃ 3 отр-ов ∩ в 1-й точке =

$x = 720 - N(3\cap в\,1m) - N(4\cap в\,1m) - N(5\cap в\,1m) - N(6\cap в\,1m) +$
$+ N((3\cap в\,1m)\cap(4\cap в\,1m)) + N((3\cap в\,1m)\cap(5\cap в\,1m)) +$
$+ N((3\cap в\,1m)\cap(6\cap в\,1m)) + N((4\cap в\,1m)\cap(5\cap в\,1m)) + N((4\cap в\,1m)\cap(6\cap в\,1m)) +$
$+ N((5\cap в\,1m)\cap(6\cap в\,1m)) - N((3\cap в\,1m)\cap(4\cap в\,1m)\cap(5\cap в\,1m)) -$
$- N((3\cap в\,1m)\cap(4\cap в\,1m)\cap(6\cap в\,1m)) - N((3\cap в\,1m)\cap(5\cap в\,1m)\cap(6\cap в\,1m)) -$
$- N((4\cap в\,1m)\cap(5\cap в\,1m)\cap(6\cap в\,1m)) + N((3\cap в\,1m)\cap(4\cap в\,1m)\cap(6\cap в\,1m)\cap(5\cap в\,1m))$,

где $N(n\cap в\,1m)$ – кол-во сп-в провести отрезки так, что ∃ n ∩ в 1-й точке.

Заметим, что $N(6\cap в\,1m) = 1$, т.к. для пр-го n точка ∩ может лежать в обц-ти!


⇒ Если $n \le 6$, то их сосед. ∩ лежит м/у 3 и 4 т. Если 3 не соединено с 4', то




< 6 точек, т.к. Если 3 с-но с 5' или 6' ∃ ≤ 1 точки для пр-го, чтобы ∩ 3–5' или 3–6'. ⇒ 3 соед-но < 4', и 3' соед-но с 4.

⇒ 2–с 5', 1–с 6', 2'–с 5, 5–с 2' ⇒ = 1 сп-б.

Тогда $N((n_1\cap в\,1m)\ldots(n_k\cap в\,1m)\cap(6\cap в\,1m)) = 1$, т.к. $n_i \le 6$, а если 6 ∩ в 1-м, то $n_i$ ∩ в 1-й т.

Тогда, $x = 720 - N(3\cap в\,1m) - N(4\cap в\,1m) - N(5\cap в\,1m) + N(5\cap в\,1m; 4\cap в\,1m) + N(3\cap в\,1m; 5\cap в\,1m) +$
$+ N(4\cap в\,1m \cap 5\cap в\,1m) - N(3\cap в\,1m; 4\cap в\,1m; \cap 5\cap в\,1m)$

Заметим, т.к. м-во сп-ов $6\cap в\,1m \subseteq 5\cap в\,1m \subseteq 4\cap в\,1m \subseteq 3\cap в\,1m$,

⇒ $N(n_1\cap в\,1m; \ldots n_k\cap в\,1m) = N(\min(n_1,\ldots,n_k)\cap в\,1m)$;