0 296817 150001

29-68-17-15
(89.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Барановой Марии Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

вход: 13:17 – 13:20

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
29-68-17-15	70	15	15	10	0	15	0	15	0

7 б. (семьдесят баллов)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

29-08-17-15 (89.2)

ЧЕРНОВИК

$x = -3 \pm \sqrt{3^2 + 8 \cdot 6}$

$\frac{x^4 - 10x^2 + 25}{(x^2 - 5)^2}$

$\left[\sqrt{45+\sqrt{2023}} - \sqrt{45-\sqrt{2023}}\right.$

$3x^4 - 7x^2 + \frac{49}{12}$

$\sin 20 \in [0; 1]$

$\cos^{2023} \in [-1; 1]$

$1234 + 789 =$

$\begin{array}{r} 66 \\ \times 289 \\ \hline 594 \\ 132 \\ \hline 19058 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1234 \\ +789 \\ \hline 2023 \end{array}$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \end{array}$

$\frac{289 + 7}{2} =$

$= \frac{296}{2} =$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 7 \\ \hline 119 \end{array}$

$\frac{119 + 17}{2} = \frac{136}{2} = 50 + 18 = 68.$

$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ +180 \\ \hline 2025 \end{array}$

$\sqrt{45 + 17\sqrt{7}} - \sqrt{45 - 17\sqrt{7}}$

$\frac{2023}{4}$

$\sqrt{2025 + \sqrt{2023}} - \sqrt{2025 + \sqrt{2023}}$

$45 + \sqrt{2023} + 45 + \sqrt{2023} - 2\sqrt{2023}$

$\sqrt{\sqrt{2024 - 1} + \sqrt{2024 + 1}}$

$90 = 7 + 83$

$1234 \sin^{20}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$789 \cos^{2023}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$45 + 23 - 23$

$x + \frac{\pi}{3} = \pi k$

$x = \pi k - \frac{\pi}{3}.$

$\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{17}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\right)^2 - 23}$

$45 + \sqrt{2023} + 45 - \sqrt{2023} - 2\sqrt{(45 + \sqrt{2023})(45 - \sqrt{2023})} =$

$\cos\left(\alpha\left(\pi k - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$90 - 2\sqrt{45^2 - 2023} = 90 - 2\sqrt{2}.$

$\alpha\left(\pi k - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$

$10^2 = 100$

$9^2 = 81.$

$\alpha\left(\pi k - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

$2\sqrt{2} > 2$, т.к. $\sqrt{2} > 1.$

$2\sqrt{2} < 3$

$5 < 9$

Значит $90 - 2\sqrt{2} < 88$

$\alpha\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

$\alpha\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

$\alpha = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) \cdot \frac{3}{2\pi} =$

$= 1 + 3n.$

ЧЕРНОВИК

$a_n = \frac{(n^2+1)\,n \cdot a_{n-1}}{(n-1)^2+1} = 2^{2021} \cdot 5^{2021} - 2022.$

$\frac{a_{n+1}(n^2+1)\,n}{((n-1)^2+1)((n-2)^2+1)}$

$x^2 - 5 = a$

$2x^a + 3x^2 - 6 = b$

$S(a) = x$

$S(b) = y$ $S(ab) =$

$\log_b(|a|^3+1) + \sqrt{a^2+b} = \sqrt{b}$ $10^{x-1} \le x < 10^x$

$\frac{(n^2+1)\,n(n-1)}{((n-2)^2+1)}$

$\sqrt{a^2+b} > \sqrt{b}$

$\log_b(|x^2-5|^3+1) < 10^2 \le 4b < 10^{x+y}$

$2 \cdot 2021$

$2021!(2021^2+1) + 2021!(2022^2-2021^2)$

$2020!(2021^2+2021)(2020^2+1) - 2020^2 - 1$

$x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$24 \times 17 = 168$

$S(ab) = 2022.$

$\frac{n!(n^2+1)}{2}$

$\frac{65(\beta+1)\cdot 3}{(\beta-1)^2+1}$

$408 + 7 + 2 + 5$

$13 \cdot 30.$

$10^{a-1} \le 2^{2021} < 10^a$

$10^{b-1} \le 5^{2021} < 10^b$

$\frac{a_3}{a_1+a_2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{14 \cdot x \cdot \sin\beta}{2}$ — Max

$= \frac{a_2 \cdot (n^2+1)\,n/(n-1)^2+1}{a_2+a_2}$ при

$10^{a+b-2} \le 2^{2021} \cdot 5^{2021} < 10^{a+b}$

$2022!(2022^2+1)$ $a_2 = \frac{13 \cdot ((9+1)\cdot 13)}{((13-1)^2+1)}$

то есть $a+b-1 = S(ab)$ с ответом

$a_2 = \frac{13 \cdot (9+1)\,2}{(2-1)^2+1} = \frac{\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) \cdot 6}{\pi} = \frac{12}{3} + 12n. =$

$= 4 + 12n.$

$= 13 \cdot 5 \cdot (9+1) \cdot 3 = 30.$

$-\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)\frac{6}{5\pi} = -\frac{12}{3 \cdot 5} - \frac{12n}{5} =$

$(n-1)!(n^3+n+n^2-2n+2)$

$a_3 = \frac{(9+1)\,13 \cdot 5}{(9-1)^2+1}$

$(1+1)\cdot 1 = 2$

$2(9+1) = 10$

$6(9+1) = 60$

$24(16+1) = 24 \cdot 17 = -\frac{4}{5} - \frac{12n}{5}$

2

$2 \cdot 6$

$72 = 12 \cdot 6$

29-68-17-15 (89.2)

ЧИСТОВИК

№1.

$$\left(\sqrt{45+\sqrt{2023}}-\sqrt{45-\sqrt{2023}}\right)^2 = 45+\cancel{\sqrt{2023}}+45-\cancel{\sqrt{2023}}-$$

$$-2\sqrt{(45+\sqrt{2023})(45-\sqrt{2023})} = 90-2\sqrt{\underbrace{45^2}_{2025}-2023} = 90-2\sqrt{2}.$$

$\sqrt{2}>1 \Rightarrow 2\sqrt{2}>2.$ $9>8 \Rightarrow \sqrt{9}>\sqrt{8} \Rightarrow 3>2\sqrt{2}.$

Значит $2\sqrt{2}\in(2;3) \Rightarrow 90-2\sqrt{2}\in(87;88).$

Если целая часть данного в задаче выр. ≥ 10, то его квадрат $\geq 100 \Rightarrow$ это не так.

Если целая часть данного в задаче выр. <9, то его квадрат $<9^2=81$, что тоже неправда.

Тогда целая часть от $\sqrt{45+\sqrt{2023}}-\sqrt{45-\sqrt{2023}}$ может быть только 9.

Ответ: 9.

№2.

$\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\in[0;1] \Rightarrow 1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\in[0;1234].$

$\cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right)\in[-1;1] \Rightarrow -789\cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right)\in[-789;789].$

Т.к. $789+1234=2023$, $\begin{cases}-789\cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right)=789.\\ 1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1234.\end{cases}$

$$\begin{cases}\cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right)=-1.\\ \sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right)=-1.\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1.\end{cases} \Rightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Т.к. $x\in[-\pi;\pi]$, $k\geq 1$ и $k\leq -2$ не подходят.

При $k=0$: $x=\frac{\pi}{6}$; при $k=-1$: $x=-\frac{5\pi}{6}$.

Тогда $\left[\begin{array}{l}\cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=-1\\ \cos\left(\alpha\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right)=-1\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\alpha\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\\ -\frac{5}{6}\pi\alpha+\frac{\pi}{3}=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

ЧИСТОВИК

$$\left[\begin{array}{l}\alpha = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)\cdot\frac{6}{\pi} = \frac{12}{3} + 12n = 4 + 12n \\ \alpha = -\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)\cdot\frac{6}{5\pi} = -\frac{12}{3\cdot 5} - \frac{12n}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{12n}{5}.\end{array}\right.$$

В первом случае, очевидно, $|\alpha| \geq 4$.

Во втором: при $n \geq 0$: $|\alpha| \geq \frac{4}{5}$; при $n \leq -1$:

$|\alpha| \geq \frac{12}{5} - \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$.

Тогда $|\alpha| \geq \frac{4}{5}$.

Ответ: $|\alpha| = \frac{4}{5}$; $\alpha = -\frac{4}{5}$.

№3.

$3x^4 - 7x^2 + 19 = 2x^4 + 3x^2 - 6 + x^4 - 10x^2 + 25 =$

$= 2x^4 + 3x^2 - 6 + (x^2 - 5)^2 \geq 2x^4 + 3x^2 - 6$.

Значит и $\sqrt{3x^4 - 7x^2 + 19} \geq \sqrt{2x^4 + 3x^2 - 6}$.

$|x^2 - 5|^3 + 1 \geq 1 \to \log_5(|x^2 - 5|^3 + 1) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5(|x^2 - 5|^3 + 1) + \sqrt{3x^4 - 7x^2 + 19} \geq \sqrt{2x^4 + 3x^2 - 6}$, причем равенство достигается при $\begin{cases}\sqrt{3x^4 - 7x^2 + 19} = \sqrt{2x^4 + 3x^2 - 6} \\ \log_5(|x^2 - 5|^3 + 1) = 0\end{cases}$

А это равносильно тому, что $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Ответ: $\pm\sqrt{5}$.

№5.

Пусть $S(2^{2021}) = a$; $S(5^{2021}) = b$.

$$\begin{cases}10^{a-1} \leq 2^{2021} < 10^a \\ 10^{b-1} \leq 5^{2021} < 10^b\end{cases}$$

$10^{a-1} \neq 2^{2021}$ и $10^{b-1} \neq 5^{2021} \Rightarrow 10^{a+b-2} < 2^{2021}\cdot 5^{2021} < 10^{a+b}$

29-68-17-15 (89.2)

то есть ~~[illegible]~~ ЧИСТОВИК

$10^{2021} = 10^{a+b-1} \Rightarrow 2021 = a+b-1;$

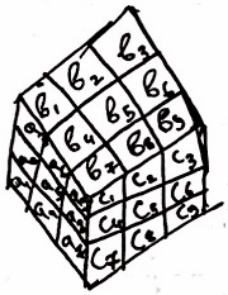
$a+b = 2022 = S(2^{2021}) + S(5^{2021}).$

Ответ: 2022.

№7.

Ответ: 7 секунд.

Например:



Пронумеруем ~~[illegible]~~ клетки куба на 3-ех гранях, которые видны, как показано на рисунке.

(Клетки левой грани – $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_9$. Верхней – $b_1; b_2; \ldots; b_9$. Правой – $c_1; c_2; \ldots; c_9$).

Если изначально жук будет стоять в клетке a_9, а затем пойдёт в клетку b_7, то дальнейшие его ходы: $b_7 \to b_8 \to c_2 \to c_5 \to c_4 \to a_8 \to a_9 \to b_7 \to$
$\to c_1 \to c_4 \to a_8 \to a_5 \to a_6 \to b_4 \to b_7 \to c_1 \to c_9 \to$
$\to a_6 \to b_4 \to b_5 \to b_8 \to c_2 \to c_1 \to a_9 \to b_7$

Таким образом, жук зациклится, причем длина цикла, по кот. он ходит – 24.

Когда если жук начнет путь в клетке c_4 и пойдёт в клетку a_8, его дальнейшие ходы: $a_8 \to a_5 \to a_6 \to b_4 \to b_7 \to c_1 \to \ldots \to c_4 \to a_8 \to c_1 \to a_9$. Таких ходов (включая ход $c_4 \to a_8$) – 14.

Значит если жук начнет ходить из клетки c_4 через 14 с. он может быть в клетке a_9. Ещё через $24 \cdot 83$ с. он тоже будет в клетке a_9. Ещё через 7 секунд после этого он

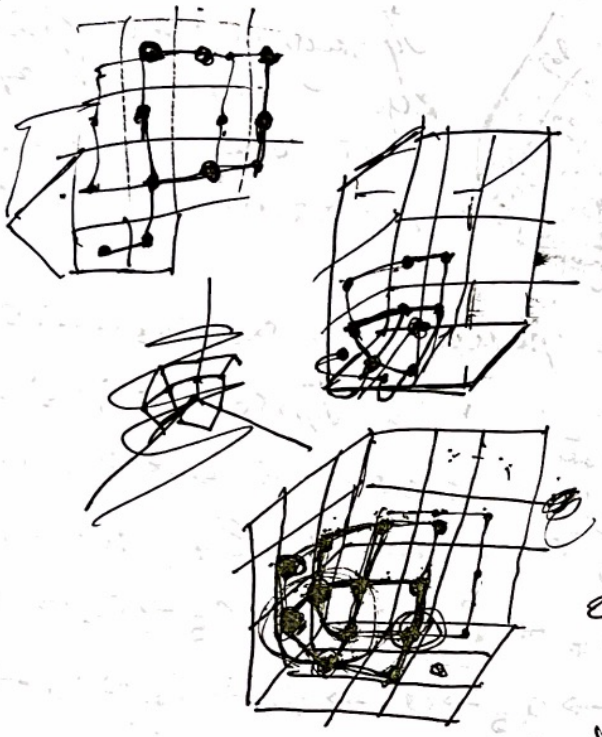
ЧЕРНОВИК

$2022!(2022^2+1)$

$2021^2+2\cdot2021+1+1$

$1!(1^2+1)+2!(2^2+1)+3!(3^2+1)+\ldots+2021!(2021^2+1)=$

$=2020!(2021^3+2021+2020^2+2020)$



83×24

332

166

1992

$1992+21=2013$

$2013-1920$

$24\cdot4=$

$=96$

$24\cdot3=$

$=60+12=72$

$24\cdot8=160+32=$

$=192$

1920

$2013-1920=$

$=93$

$93-72=21$

$21+24\cdot83=$

$=2013$

ЧИСТОВИК

№7 продолжение

также будет в клетке a_9 ($a_9 \to b_7 \to b_8 \to c_2 \to$ $\to c_5 \to c_4 \to a_8 \to a_9$). То есть в клетке a_9 жук будет через $14 + \underbrace{24 \cdot 83}_{1992} + 7 = 2013$ (с) после начала движения. Тогда через 2023 с. после начала движения он тоже будет в клетке a_9 (см. цикл.) и ещё через 7 сек. после этого также будет в клетке a_9

Оценка: через 1 секунду жук, очевидно, не мог быть в той же клетке. Если жук через 2 секунды был в той же клетке, он разворачивался на 180°, что также неверно.

Раскрасим грани куба в шахматную раскраску так: у 2 противоположных граней куба покрасим центральную клетку в белый. У ост. граней центральную клетку в черный. Тогда жук не меняет ~~цвет~~ цвет клетки в кот. он стоит $\Leftrightarrow$ переходит между 2 гранями с черной клеткой в центре.

Если через 3 секунды жук был в той же клетке, в какой-то момент жук походил и цвет его клетки не поменялся $\Rightarrow$ жук переходил между гранями. Тогда понятно, что с точностью до угла куба он ходил так: $c_1 \to a_9 \to b_7 \to c_1$. Такого быть не могло.

Чистовик

Если через 4 или 6 с. жук был в той же клетке, что и до этого, то жук ~~любой~~ НЕ менял цвет клетки при ходе четное кол-во раз.

Значит он либо не меняя свою грань, но тогда он мог ходить только по циклу длины 8 ⇒ никак не мог оказаться в той же клетке через 4 или 6 ходов. Либо жук был в каких-то 2-ух гранях. Этот случай аналогичен предыдущему. Если жук был в хотя бы 3-ех гранях с черным центром он мог из клетки добраться в неё же только больше, чем за 6 секунд ⇒ это не так. И если жук был в 3-ёх гранях из кот. есть грани с белым центром, он ходил так: $c_1 \to a_9 \to b_7 \to c_1 \to a_9 \to b_7 \to c_1$, чего быть не могло.

Если жук через 5с. оказался в той же клетке, в какой-то момент он не менял цвет клетки на своём ходу ⇒ переходил между гранями ⇒ очевидно, что он ~~ходил~~ ~~гра~~ был в 2 гранях с черными центрами и в 1-ой с белым. Если он не был во всех 3-ёх угловых, смежных клетках этих граней, он прошёл > 5с.