0 002605 940002

00-26-05-94
(89.12)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Басистого Кирилла Михайловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

вход: 13:45 – 13:47

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
00-26-05-94	70	15	10	15	15	15	0	0	0

70 (семьдесят)

00-26-05-94 (89.12)

Черновик

№2

$1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - 789\cos^{23}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 2023$

≤ 2023

$1234 + 789$

$x = \frac{\pi}{6},\ x = -\frac{5\pi}{6}$

$x \in [\pi; \pi]$

$\begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 \\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2\pi t - \frac{\pi}{3},\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$

№3

$19 + 3b^4 - 7b^2 \geq 2b^4 + 3b^2 - 6$

$2(n + \frac{1}{6}) = 2t - \frac{1}{3}$

$t^2 - 10t + 25 \geq 0$

$\frac{(n^2+1)\cdot 3}{(n-1)^2+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)^2+1)\cdot(n+1)}{n^2+1}$

$\frac{(n-1)^2+1}{(n^2+1)\cdot n} \cdot \frac{1}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = ( )$

$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = \frac{((n+1)^2+1)(n+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}$

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{(n^2+3)\cdot(n+2)}{(n+1)^2+1}$

$\frac{a_{n+2}}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+3)(n+2)(n+1)\cdot n}{((n-1)^2+1)((n+1)^2+1)}$

$\sqrt{89} \cup 9.5$

$89 \cup \frac{361}{4} > 90$

$89 \cup 90\frac{1}{9}$

$89 \cup 81 + \frac{1}{9} + 6$

$\left[\sqrt{45+\sqrt{2023}} - \sqrt{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1} - \sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}\right.$

$\sqrt{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}$

$\sqrt{2025}$ $45^2 = 48 \cdot 45 = 225 + 180 = 2025$

$t - \frac{\sqrt{2}}{t}$

$\underbrace{\sqrt{2025+1}}_{t^2} + \sqrt{2023} = \frac{2}{\sqrt{2025} - \sqrt{2023}}$

$\left[t - \frac{\sqrt{2}}{t}\right]$

$n \leq \frac{t^2 - \sqrt{2}}{t} \leq n+1,\ n \in \mathbb{Z}$

$0 \leq \frac{45 + \sqrt{2023} - \sqrt{2}}{45 + \sqrt{2023}} \leq 1$

$(\sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1)^2 =$

$2 \cdot 1012 \leq 2 \cdot 2024 + 2\sqrt{2023} \leq 2 \cdot 4048$

$\begin{cases} t^2 - t_1 - \sqrt{2} \geq 0 \\ 22 - t(n+1) - \sqrt{2} \leq 0 \end{cases}$

$(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > x_2 \\ y_1 < y_2 \end{cases} \begin{cases} x_1 < x_2 \\ y_1 > y_2 \end{cases}$

$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$

Чистовик

Задача №2

$1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - 789\cos^{23}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 2023$

① Заметим, что т.к. $|\sin x| \le 1$, то $\sin^{20} x \le 1^{20} \Leftrightarrow \sin^{20} x \le 1$

Также, $\cos x \ge -1 \Leftrightarrow \cos^{23} x \ge (-1)^{23} \Leftrightarrow \cos^{23} x \ge -1$

Из первого нер-ва заключаем, что $1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \le 1234$,

а из второго: $-789\cos^{23}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \le 789$.

Тогда понятно, что $1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - 789\cos^{23}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \le 1234 + 789 = 2023$. При этом равенство достигается, очевидно, только при

$$\begin{cases} \sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos^{23}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases}$$

(Если хотя бы $\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) < 1$ или $\cos^{23} > -1 \Leftrightarrow -\cos^{23} < 1$, то $1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - 789\cos^{23}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) < 2023$)

② Значит, уравнение эквивалентно этой системе. Решим её:

$$\begin{cases} \sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos^{23}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 \\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ 2x+\frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Т.к. $x \in [-\pi; \pi]$ по условию, то из серии корней $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ нам подходят только $x = \frac{\pi}{6}$, $x = -\frac{5\pi}{6}$. Действительно:

(Продолжение далее)

№2 (прод.) Чистовик

при $n \geq 1$ $\frac{\pi}{6} + \pi n \geq \frac{\pi}{6} + \pi > \pi$ – не подходит.

$n = 0$: $x = \frac{\pi}{6} \in [-\pi; \pi]$

$n = -1$: $x = -\frac{5\pi}{6} \in [-\pi; \pi]$

$n \leq -2$: $\frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6} < -\pi$ – не подходит

③ Значит, если и существует x, то он либо равен $\frac{\pi}{6}$, либо $-\frac{5\pi}{6}$. Одно из этих значений (хотя бы одно) должно удовлетворять второму ур-ю системы:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \alpha \cdot \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 4 + 12k \\ \alpha = -\frac{4}{5} - \frac{12k}{5} \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$$

При таких значениях α, очевидно, есть корни $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{5\pi}{6} \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \alpha = 4 + 12k \\ \alpha = -\frac{4}{5} - \frac{12k}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Задача №3

$$\log_5(|x^2-5|^3+1) + \sqrt{3x^4-7x^2+19} = \sqrt{2x^4+3x^2-6}$$

① Заметим, что т.к. $|x^2-5| \geq 0 \Leftrightarrow |x^2-5|^3 \geq 0 \Leftrightarrow |x^2-5|^3+1 \geq 1$, то $\log_5(|x^2-5|^3+1) \geq 0$ – и равенство достигается при $x^2 = 5$

Также заметим, что $\sqrt{3x^4-7x^2+19} \geq \sqrt{2x^4+3x^2-6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4-7x^2+19 \geq 2x^4+3x^2-6 \\ 2x^4+3x^2-6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-10x^2+25 \geq 0 \\ 2x^4+3x^2-6 \geq 0 \end{cases}$$

условие неотрицательности радикалов

(см. далее)

№3 (прод) Чистовик

Система имеет вид:

$$\begin{cases} (x^2-5)^2 \geq 0 & (1) \\ 2x^4+3x^2-6 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

, что верно для всех $x \in ОДЗ$,

т.к. (1) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, а (2) – это лишь ограничение на x для $\sqrt{2x^4+3x^2-6}$ и $\sqrt{3x^4-7x^2+19}$. Отсюда вытекает, что при $x^2 \neq 5$:

$$\left.\begin{array}{l} \log_5(|x^2-5|^3+1) > 0 \\ \sqrt{3x^4-7x^2+19} > \sqrt{2x^4+3x^2-6} \end{array}\right\} \Rightarrow \log_5(|x^2-5|^3+1) + \sqrt{3x^4-7x^2+19} > \sqrt{2x^4+3x^2-6}.$$

② Значит, если и есть корни, то это только среди x, при которых $x^2=5$. ~~Подставим~~ И все эти x подходят, ведь при $x^2=5$ $\log_5(|x^2-5|^3+1)=0$ и $\sqrt{3x^4-7x^2+19} =$

$\cancel{\log_5(|5-5|^3+1) + \sqrt{3\cdot 5^2-7\cdot 5+}}$

$= \sqrt{2x^4+3x^2-6}$ (ведь это неравенство равносильно $(x^2-5)^2 \geq 0$)

Остаётся проверить, что корни имеют смысл:

$\sqrt{2\cdot 5^2+3\cdot 5-6} = \sqrt{50+15-6} = \sqrt{59}$ ✓

(второй, очевидно, проверять не надо)

③ $x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

Ответ: $x=\pm\sqrt{5}$

Задача №1

Чистовик

$$\left[\sqrt{45+\sqrt{2023}} - \sqrt{45-\sqrt{2023}}\right]$$

① Заметим, что $45^2 = \sqrt{2025} \Leftrightarrow 45 = \sqrt{2025}$, откуда

$$45+\sqrt{2023} = \sqrt{2025}+\sqrt{2023} = \frac{\left(\sqrt{2025}+\sqrt{2023}\right)\left(\sqrt{2025}-\sqrt{2023}\right)}{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}. \quad \Leftrightarrow \sqrt{2025}-\sqrt{2023} = \frac{2}{\sqrt{2025}+\sqrt{2023}}$$

Пусть $t = \sqrt{45+\sqrt{2023}}$. Тогда нас просят найти

$$\left[t - \frac{\sqrt{2}}{t}\right] = \left[\frac{t^2-\sqrt{2}}{t}\right] = \left[\frac{\sqrt{2023}+45-\sqrt{2}}{\sqrt{45+\sqrt{2023}}}\right]$$

② Заметим, что

$$\frac{\sqrt{2023}+45-\sqrt{2}}{\sqrt{45+\sqrt{2023}}} \le \sqrt{45+\sqrt{2023}} \Leftrightarrow \sqrt{2023}+45-\sqrt{2} \le 45+\sqrt{2023} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le 0$$

верно

А т.к. $\sqrt{45+\sqrt{2023}} \le \sqrt{45+45}$ (т.к. $\sqrt{2023} \le \sqrt{2025}$), то

$$\frac{t^2-\sqrt{2}}{t} \le \sqrt{90} < 10$$

Также

$$\frac{\sqrt{2023}+45-\sqrt{2}}{\sqrt{45+\sqrt{2023}}} \ge \sqrt{45+\sqrt{2023}} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \ge -\sqrt{5+\frac{\sqrt{2023}}{9}}$$

а $-\sqrt{5+\frac{\sqrt{2023}}{9}}$ $2-\sqrt{5} < -\sqrt{2}$ — верно.

Отсюда $\frac{t^2-\sqrt{2}}{t} > \underbrace{\sqrt{45+\sqrt{2023}} - \frac{1}{3} > 9}$

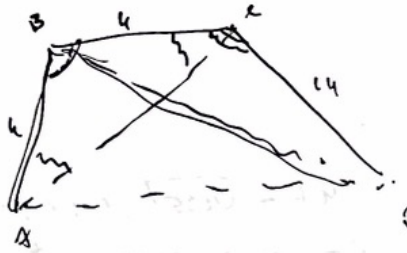
$\Leftrightarrow \sqrt{45+\sqrt{2023}} > 9+\frac{1}{3} \Leftrightarrow 45+\sqrt{2023} >$

$> 81+2\cdot\frac{9}{3}+\frac{1}{9} \Leftrightarrow 45+\sqrt{2023} > 87+\frac{1}{9}$, т.е. $45+\sqrt{2023} > 89 > 87+\frac{1}{9}$.

Снова можно утверждать, что $\left[t-\frac{\sqrt{2}}{t}\right] = 9$

Ответ: 9

Черновик



$$\frac{14\cdot 4\cdot \sin\gamma}{2} + 4\cdot\sqrt{4}$$

$$a_3 = \frac{20}{2}\cdot 18 = 180 \qquad a_4 = \frac{18\cdot 8}{4}\cdot 6\cdot 180$$

$$\frac{26}{2}\sin\beta + 14\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

$$-\frac{2}{n^2+1} + \frac{1}{n} = \frac{n^2+1-2}{n(n^2+1)}$$

$$n(n-2)+1 \qquad \frac{n-2}{(n^2+1)} + \frac{2}{n(n^2+1)} = \frac{(n-1)^2+1}{n(n^2+1)}$$

$$2\cos 4\beta + 14\sin\frac{\beta}{2} \qquad x\in(0;\pi)$$

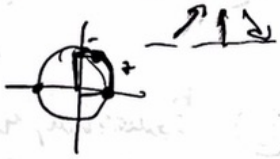
$$f(x) = 2\sin 4x + 14\sin\frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 2\cos 4x + 7\cos\frac{x}{2} = 4\cos^2 2x + 7\cos\frac{x}{2} - 2$$

$$4\left(\cos\frac{x}{2}+2\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$a_n = \frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}\,a_{n-1}$$

$$a_{n+1} = \frac{((n+1)^2+1)(n+1)}{n^2+1}\cdot\frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}\,a_{n-1}$$



$$\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n-1)^2+1}{(n^2+1)\cdot n} + \frac{((n+1)^2+1)(n+1)}{n^2+1}$$

$$\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{(n-1)^2+1+((n+1)^2+1)(n^2+n)}{(n^2+1)\cdot n}$$

$$= \frac{-(n-1)^2}{(n^2+1)^2 n}$$

$$\frac{(n^2+1)n}{n^2-2n+2}$$

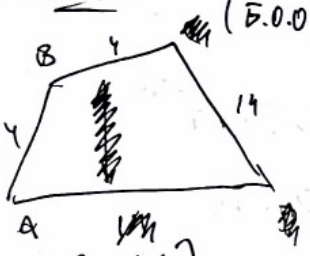
$$\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n^2+1)} = \frac{(n-1)^2+1}{2(n^2+1)n}$$

$$a_{n+2} = \frac{((n+2)^2+1)(n+2)}{(n+1)^2+1} \qquad a_{n-1}\cdot\frac{((n+1)^2+1)(n+1)n}{(n-1)^2+1}$$

$$a_{2023} = \frac{(2023^2+1)\cdot 2023!}{2020^2+1}\cdot 13$$

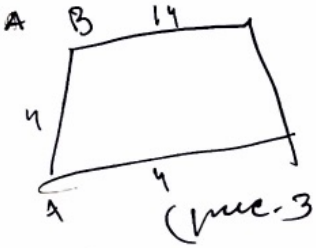
Задача №4 ① Пусть четырёх-ник — ABCD. Чистовик

(Б.О.О) Пусть AB=4. Тогда есть три случая: или при AB лежит сторона с длиной 4, или сторона с длиной 14, или обе сразу. (см рис. 1-3).



(рис.1)

(рис.2)



(рис.3)

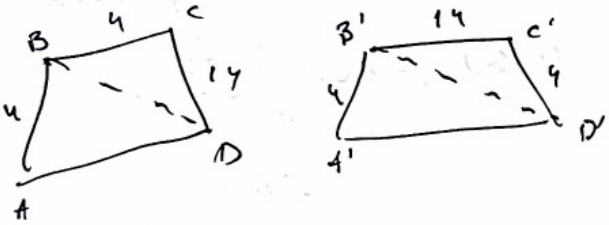
Заметим, что можно выделить два случая:

а) сторона с длиной 14 лежит между равными с длиной 4

б) стороны с длиной 4 лежат вместе.

② Поймём, почему можно не рассматривать два случая.

Б.О.О: Пусть в ABCD AB=4, BC=4, CD=14; в A'B'C'D'. A'B'=4, B'C'=14, C'D'=4 (рис. 4) (и имеют макс. площади)



(рис.4)

В A'B'C'D' повернем △B'C'D', поменяв B' и D' местами. Тогда A'B'C'D' отн. к случаю б). Т.к. S(ABCD) макс., то $S(A'B'C'D') \le S(ABCD)$.

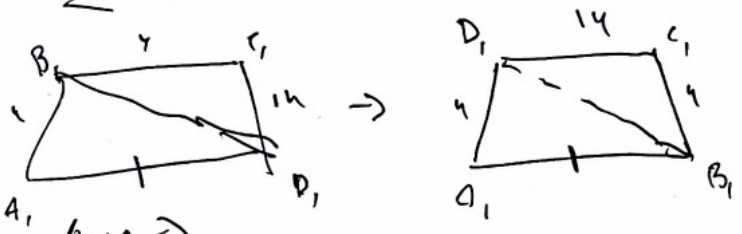
Повернём теперь так △BCD. Аналогично и $S(ABCD) \le S(A'B'C'D')$. Отсюда $S(ABCD) = S(A'B'C'D')$. Поэтому рассмотрим только случай б), т.к. макс. площадь все зависит от конфигурации, ведь четырёхугольник с такими сторонами и макс. площадью только один (как будет показано далее), значит

Значит, если удастся док-ть, что ∃! ABCD, то и ∃! A'B'C'D'.

Действительно: Предположим, что это не так, ∃ ещё и A, B, C, D, конфигурации а). Повернув в нём нужный △-к, мы найдём и новый четырёх-ник конфигурации б) (см рис. 5) (см далее)

№4 (прод)

Чистовик



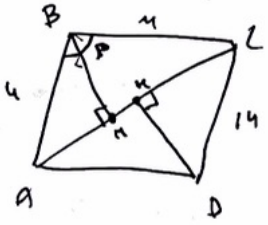
(рис 5)

Если $\exists A_1BCD_1$, то $A_1D_1C_1B_1 = ABCD$.

А т.к. еще и $A'D'C'B' = ABCD$, то, повернув $\triangle D_1B_1C_1$ и $\triangle D'B'C'$ обратно, получим (с повернутым $\triangle B'C'D$)

$A_1B_1C_1D_1 = A'B'C'D'$

③ Найдём такой $ABCD$. (рис. 6)



(рис 6)

Пусть $\angle ABC = \beta$. Заметим, что при фикс. β $S_{ABC} = const$, а

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABC} + \frac{1}{2}DH \cdot AC \le$

$\le \frac{1}{2}DC \cdot AC + ABC$. Т.е. выгодно, чтобы

$S_{ACD} = \frac{1}{2}DC \cdot AC \Leftrightarrow \boxed{\angle ACD = 90^\circ}$

Найдём площадь S_{ABCD}:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\beta = 8\sin\beta$

$S_{ACD} = \frac{1}{2}DC \cdot AC = \frac{1}{2}DC \cdot 2 \cdot MC = DC \cdot MC = DC \cdot BC \sin\frac{\beta}{2} =$

$= 4DC\sin\frac{\beta}{2}$ (см. рис. 6 : $AM = MC \Rightarrow AC \perp BM$, т.к. $AB = BC$).

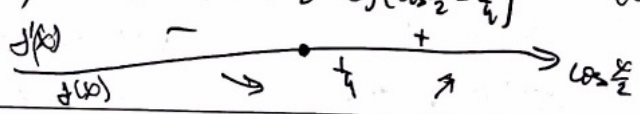
Отсюда $S_{ABCD} = 8\sin\beta + 56\sin\frac{\beta}{2}$.

Пусть $f(x) = 8\sin x + 56\sin\frac{x}{2}$, $x \in (0; \pi)$

$\cos x = 2\cos^2 y - 1$

Тогда $f'(x) = 8\cos x + 28\cos\frac{x}{2} = 16\cos^2\frac{x}{2} + 28\cos\frac{x}{2} - 8 =$

$= 4(4\cos^2\frac{x}{2} + 7\cos\frac{x}{2} - 2) = 4 \cdot 4(\cos\frac{x}{2} + 2)(\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{4})$ (см. далее)



т.е. $\frac{\text{м4 (пров)}}{f(x)}$ убывает при $\cos\frac{x}{2} < \frac{1}{4}$, возрастает при $\cos\frac{x}{2} > \frac{1}{4}$

Заметим, что $x \in (0; \pi) \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in (0; \frac{\pi}{2})$ и при $0 < \frac{x}{2} < \arccos\frac{1}{4}$ $\cos\frac{x}{2} > \frac{1}{4}$ и $f(x)$ возрастает, а при $\arccos\frac{1}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ $f(x)$ убывает ($\frac{\pi}{2} > \arccos\frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} > 0$), отсюда $\max f$ при $\frac{x}{2} = \arccos\frac{1}{4}$, т.е. $\beta = 2\arccos\frac{1}{4}$

Посчитаем тогда AC и AD.

По т. косинусов в $\triangle ABC$: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta = 16+16 - 2\cdot 16\cdot\cos\beta = 2\cdot 16(1-\cos\beta) = 2\cdot 16(2\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}) =$

$\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$

$= 2\cdot 16\left(2 - 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 2\cdot 16\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 16\cdot\frac{1}{16} = 64 - 4 = 60$

$AC = \sqrt{60}$.

По т. Пифагора в ADC: $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 60 + 14^2 =$

$= 256 \Leftrightarrow AD = 16$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

Очевидно, что $ABCD$ – единственный. Тогда и при других конфигурациях $AD = 16$

Ответ: 16

Задача №8

① Пронумеруем точки в обоих рядах:

Теперь сделаем вот что: возьмем каждую точку первого ряда и напишем второй номер точки, являющейся концом отрезка, исходящего из данной точки см. далее

Чистовик

Чистовик

Задача №5 (Любые переменные в задаче - натуральные числа)

$S(2^{2021})+S(5^{2021})=?$

Пусть $2^{2021}=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_0$, $5^{2021}=b_k\cdot 10^k+\ldots+b_0$

Тогда $10^{2021}=(2^{2021})\cdot(5^{2021})=(a_n\cdot 10^n+\ldots+a_0)+(b_k\cdot 10^k+\ldots+b_0)$

Заметим, что получившееся число имеет вид либо $c_{n+k}\cdot 10^{n+k}+\ldots+c_0$, если переполнений нигде не было (т.е. не было пар 10^m ($a_i b_{m-i}+a_2 b_{m-j}+\ldots$) $\geq 10^{m+1}$) в посл. разряде, либо $c_{n+k+1}\cdot 10^{n+k+1}+\ldots+c_0$, если переполнения были. Это хорошо видно при умножении „столбиком".

$n\leq k$, очевидно

$$\begin{array}{r} \times\ a_n\ldots a_0 \\ b_k\ldots b_0 \\ \hline a_nb_0\ldots a_0b_0 \\ b_1a_n\ \ b_1a_0 \\ \hline b_ka_n\ \ b_ka_0 \end{array}$$

Но переполнения, очевидно, были, так как в результате выходит $10\underbrace{0\ldots0}_{2021}$. Действительно, ведь если $a_n\cdot b_0+a_{n-1}\cdot b_1+\ldots+a_0b_n=0$, то $a_nb_0,\ldots,b_na_0$ равны нулю. то же касается и остальных разрядов. Однако в числах 5^{2021} и 2^{2021} точно есть два ненулевых разряда (взять хотя бы последний: он не ноль, т.к. оба числа не делятся на 10). Значит, просто так нули возникнуть не могли, они - результат переполнения. Получается, что $a_0b_0=10p$, $p\neq 1$ (p-ый с конца), отсюда разряд тоже должен переполняться и т.д. Значит, получаем число $10^{n+k+1}=2021\cdot 10^{2021}$ $\Rightarrow n+k=2020$. А т.к. $S(2^{2021})=n+1$, $S(5^{2021})=k+1$, то

$S(2^{2021})+S(5^{2021})=n+m+2=2022$

Ответ: 2022