Выход: 12:46
Вход: 12:49

0 894926 560003

89-49-26-56
(85.14)

Доп лист +1

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике.
профиль олимпиады

Гороховского Альберта Армуровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
89-49-26-56	90	+	+	−	+	+	+	+	−

90 (девяносто)

89-49-26-56 (85.14)

Черновик №1

$$\left(\sqrt{45-\sqrt{2023}}-\sqrt{45+\sqrt{2023}}\right)\left(\sqrt{45-\sqrt{2023}}+\sqrt{45+\sqrt{2023}}\right)=$$

$$=45-\sqrt{2023}-45-\sqrt{2023}=-2\sqrt{2023}$$

$$\sqrt{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}$$

$$45-\sqrt{2023}-2\sqrt{2}+45+\sqrt{2023}=90-2\sqrt{2}$$

$$9<\sqrt{\ }<10$$

x, $v_п$ $v_р$.

$$\frac{x}{v_п}=\frac{12}{v_р};\quad \frac{\sqrt{x^2+12^2}}{v_п}=\frac{20}{v_р}.$$

$$\begin{cases} x v_р = 12 v_п \\ \sqrt{x^2+12^2}\, v_р = 20 v_п. \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+144}}{x}=\frac{5}{3}$$

$$9x^2+9\cdot 144=25x^2$$

$$16x^2=144\cdot 9$$

$x=9$ $x=-3$ - неправильно

x^2 кл. x кл. x кл.

$x^2-15=y+y+11$

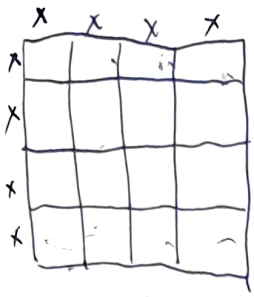
$x^2-15=2y+11$ $x^2=2y+26.$

$nx\cdot nx=n^2x^2$

$(n^2-15)x^2=y(y+11)x^2$

$n^2-15=y^2+11y.$

Черновик №2



n

n $\quad n^2x^2$

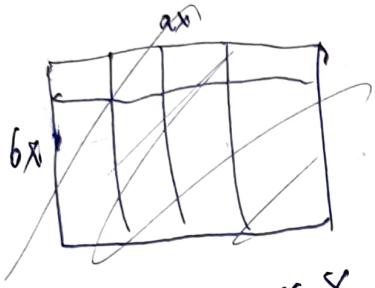
$n^2 \geq 12\cdot 1+15=17$

nx - сторона.

$n \geq \sqrt{17}$

$n > 4$

$10\cdot 21$

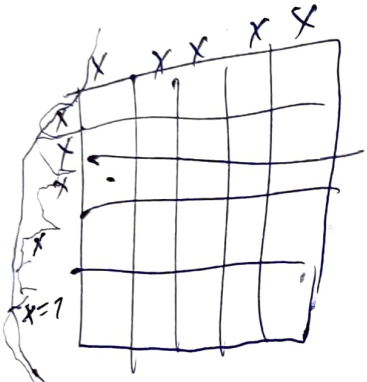


$a = b+11$

$ab = n^2-15$

$$\begin{cases} b^2+11b = n^2-15 \\ a^2-11a = n^2-15 \\ a = b+11 \end{cases}$$

$b^2+11b = 11$



$a^2-11a = b^2+11b$

$a^2-b^2 = 11(a+b)$

$(a+b)(a-b) = 11(a+b)$

$a-b=11.$

$b^2+11b-(n^2-15)=0$

$D = 121+4n^2-60 =$

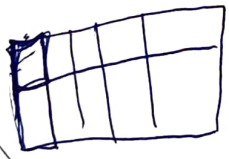
$25 \xrightarrow{-15} 10$

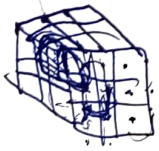
$12+ \quad (b-1)$

$= 4n^2+61 =$

$b = \frac{-11\pm\sqrt{4n^2+61}}{2}$

$= \frac{\sqrt{4n^2+61}-11}{2}$





1, 12 $\quad$ 22

2, 13 $\quad$ 26

3, 14 $\quad$ 42

4, 15 $\quad$ 60

5, 16 $\quad$ 80

6, 17 $\quad$ 102

7, 18 $\quad$ 126

$\sqrt{4n^2+61} = 2k+1$

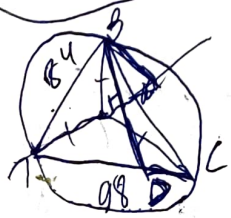
$4n^2+61 = 4k^2+4k+1.$

$n^2+15 = k^2+k$

$n^2+15 = k(k+1)$

$k^2+k-(n^2+15)=0$

$D = 1+4n^2+60 = 4n^2+61$



$x^2+61 = (x+1)^2$

$61 = 2x+1 \quad x=30$

89-49-26-56
(85.14)

Лист 1.

Задача №1.

Пусть $a = \sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} < 0$ (т.к $45-\sqrt{2023} < 45+\sqrt{2023}$)

Рассмотрим a^2:

$$a^2 = \left(\sqrt{45-\sqrt{2023}}\right)^2 - 2\sqrt{(45-\sqrt{2023})(45+\sqrt{2023})} + \left(-\sqrt{45+\sqrt{2023}}\right)^2 =$$

$$= 45 - \sqrt{2023} - 2\sqrt{2025-2023} + 45 + \sqrt{2023} = 90 - 2\sqrt{2}.$$

Оценим a^2: $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{2,25}$

$1 < \sqrt{2} < 1,5$

$2 < 2\sqrt{2} < 3$

$-3 < -2\sqrt{2} < -2$

$87 < 90 - 2\sqrt{2} < 88.$

$\Downarrow$

$81 < 90 - 2\sqrt{2} < 100.$

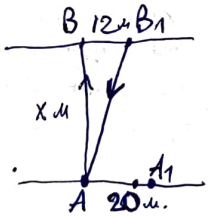
$9^2 < a^2 < 10^2$

Т.к $a < 0$, то:

$-10 < a < -9. \Rightarrow [a] = -10.$

Ответ: -10.

Задача №4.



Пусть x – ширина реки (в м),
$v_п$ – скорость пловца (в $\frac{м}{с}$),
$v_р$ – скорость реки (в $\frac{м}{с}$)

Сначала за то время, пока пловец проплывёт x метров, река отнесёт его на 12 м., т.е:

$$\frac{x}{v_п} = \frac{12}{v_р}.$$

Во второй раз пловец плывёт из т. B_1 в т. A (где т. A – начальная, т. B_1 – куда он приплыл после первого переплывания реки), а река его относит за это же время на 20 м.

По теореме Пиф в $\triangle ABB_1$: $B_1A = \sqrt{x^2+12^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+12^2}}{v_п} = \frac{20}{v_р}.$$

Получим систему:

см. лист 2

Лист. 2.

Задача 4 (продолжение)

$$\begin{cases} \frac{x}{v_п} = \frac{12}{v_р} \\ \frac{\sqrt{x^2+12^2}}{v_п} = \frac{20}{v_р} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_р \cdot x = v_п \cdot 12 \\ v_р \cdot \sqrt{x^2+12^2} = v_п \cdot 20. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на первое:

$$\frac{\sqrt{x^2+12^2}}{x} = \frac{20}{12}$$

$$12\sqrt{x^2+12^2} = 20x \quad |:4$$

$3\sqrt{x^2+12^2} = 5x$; возведем обе части в квадрат:

$$9(x^2+144) = 25x^2$$

$$9x^2 + 144 \cdot 9 = 25x^2$$

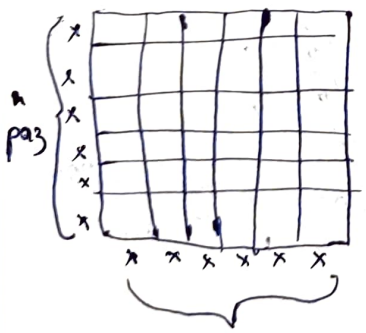
$$144 \cdot 9 = 16x^2 \quad |:16$$

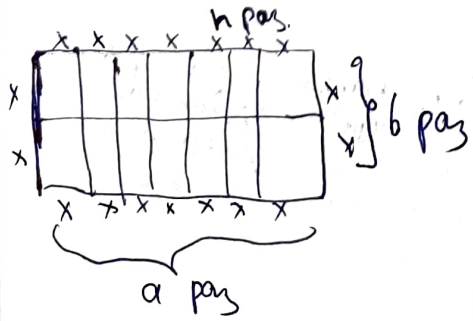
$$9 \cdot 9 = x^2$$

$\underline{x = 9 м}$ $\quad x = -9$ - посторонний.

Ответ: 9 метров.

Задача 6.





Пусть размер плитки $x \cdot x\ м^2 = x^2\ м^2$

кол-во заказанных плиток $n \cdot n = n^2$ (т.к. квадратная комната)

кол-во плиток в длину и ширину во второй комнате соответственно a и b ($a > b$ по усл.)

① Тогда:

ⓐ Кол-во плиток во 2 комнате: $n^2 - 15$ (15 разбились).

ⓑ кол-во плиток = 3 комнаты:

$$(n^2-15)x^2 = ax \cdot bx = abx^2 \quad |:x^2$$

$$n^2 - 15 = ab.$$

ⓑ $a = b + 11$ (по усл.)

см. лист. 3

89-49-26-56
(85.14)

Лист 3.

Задача 6 (продолжение)

② т.к $a = b+11$, то a и b - разной чётности =>

=> ab - чётное

③ $ab = n^2 - 15$

$n^2 = ab + 15$ => n^2 - нечётное => n - нечётное.

④ $n^2 \geq a_{min} b_{min} + 15$; $b_{min} = 1$ (т.к $b>0$) => $a_{min} = 12$ =>

=> $n^2 \geq 12 \cdot 1 + 15$

$n^2 \geq 27$

$n \geq 3\sqrt{3}$ $(n>0)$

$\cancel{1 < \sqrt{3} < 2.}$

$\cancel{3 < 3\sqrt{3} <}$

$n > 5 = \sqrt{25}$ => $n \geq 7$.

⑤ $ab = n^2 - 15$.

$(b+11)b = n^2 - 15$

$b^2 + 11b - (n^2 - 15) = 0$

$D = 121 + 4n^2 - 60 = 4n^2 + 61$

$b_1 = \frac{-11 + \sqrt{4n^2+61}}{2} = \frac{\sqrt{4n^2+61} - 11}{2}$

$b_2 = \frac{-11 - \sqrt{4n^2+61}}{2}$ - нет, т.к $b>0$.

$\sqrt{4n^2+61}$ должно быть целым числом.

=> $\sqrt{4n^2+61} = k \geq 0$.

$4n^2 + 61 = k^2$

$61 = k^2 - (2n)^2$

$61 = (k-2n)(k+2n)$

т.к 61 - простое => $61 = 1 \cdot 61$ =>

=> $\begin{cases} k - 2n = 1 \\ k + 2n = 61 \end{cases}$ (т.к $k-2n < k+2n$) <=> $\begin{cases} k = 2n+1 \\ 2n + (2n+1) = 61. \end{cases}$ *

* $4n = 60$ => $n = 15$ и $k = 31$

⑥ => заказали $n^2 = 15^2 = 225$ плиток

см. лист 4

Лист 4.

Задача 6. (продолжение)

Ответ: 225 плиток было куплено.

Задача 5.

$||x|+||y|-3|-3|=1.$

I вариант: ① $|x|+||y|-3|-3=1.$

$|x|+||y|-3|=4.$

$x\geq 0$ и $|y|-3\geq 0$:

$x+|y|-3=4 \Rightarrow |y|=7-x$

$x\geq 0$ и $|y|-3<0$:

$x+3-|y|=4 \Rightarrow |y|=\cancel{x+1}$

$x<0$ и $|y|-3\geq 0$:

$x+4=|y|-3 \Rightarrow |y|=x+7$

$x<0$ и $|y|-3<0$:

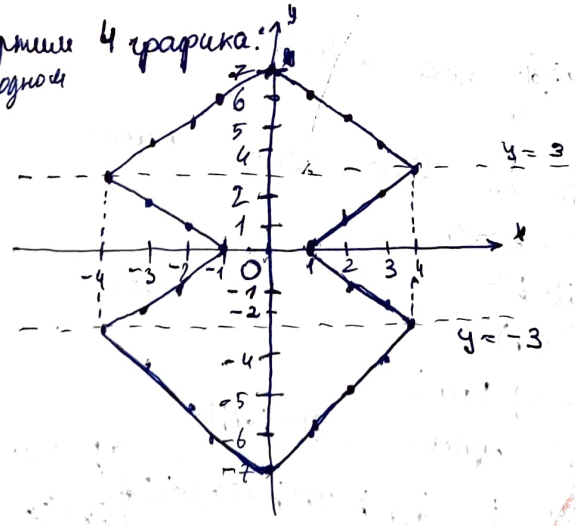
$x+4=3-|y| \Rightarrow |y|=-x-1.$

② Раскроем неравенства $|y|-3\geq 0$ и $|y|-3<0$:

$|y|\geq 3$ и $|y|<3$

$\left[\begin{array}{l} y\leq -3 \\ y\geq 3 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} y>-3 \\ y<3. \end{array}\right.$

③ Чертим 4 графика: на одном



II вариант: ① $|x|+||y|-3|-3=-1.$

См. лист 5

89-49-26-56
(85.14)

Лист 8.

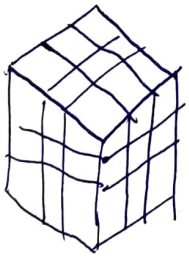
Задача 8 (продолжение)

② Отрезки получат координаты вида $\{(0;y_1);(1;y_2)\}$ (ведь мы проводим из разных рядов)

③ Легко заметить, что отрезок $\{(0;y_1);(1;y_2)\}$ пересекается с $\{(0;y_3);(1;y_4)\}$, если $(y_1>y_3$ и $y_2<y_4)$ или $(y_1<y_3$ и $y_2>y_4)$.

Задача 7 (рисунок)

В пути жука будут задействованы лишь 3 грани. Мы можем их нарисовать так:



Обозначим все клетки по алфавиту: (без буквы С)

Путь жука (из буквы С (старт)):

С → У → Т → Л → Ж → И → Н → М → Л → Ж → Д → З → О → И → М → Н → З → О → Ф → С

Черновик №3

$\frac{3\cdot 2}{2}$ $\cancel{\frac{4\cdot 3}{2}}$

$\frac{6\cdot 5}{2} = 15$

~~6·5~~ 6!

~~(0;1) (0;2) 0~~

(1;0) (1;1) (1;2) (1;3) (1;4) (1;5)

(0;0) (0;1) (0;2) (0;3) (0;4) (0;5)

$||x|+||y|-3|-3| = 1.$

$|x|+||y|-3|-3=1$

$|x|+||y|-3|=4$

$||y|-3| = 4-|x|$

$x\geq 0$:

$||y|-3| = 4-x$

$|y|-3 = 4-x$ $|y|-3=\cancel{x}-4$

$|y|=7-x$ $|y|=x-1$

$x\leq 0$:

$||y|-3| = 4+x$

$|y|-3 = 4+x$ $|y|-3=-x-4$

$\cancel{|y|-3}$

$|y|=x+7$ $|y|=-x-1$

$|x|+||y|-3|-3=-1.$

$|x|+||y|-3|=2.$

$||y|-3| = 2-|x|$

$x\geq 0$:

$||y|-3| = 2-x$

$|y|-3=2-x$ $|y|-3=x-2$

$|y|=5-x$ $|y|=x+1$

$x\leq 0$:

$||y|-3| = 2+x$

$|y|-3=x+2$ $|y|-3=-x-2$

$|y|=x+5$ $|y|=1-x$

ИЛИ

$||x|+||y|-3|=4$

++: $x+|y|-3=4$; ++: $|y|-3=x+4$

+−: $x+3-|y|=4$; −−: $3-|y|=x+4$

$x\geq 0$: $|y|\geq 0$: $|y|=7-x$; $|y|=x+7$

$x\geq 0$: $|y|\geq 0$: $|y|=x-1$ $|y|=-x-1$,

$||x|+||y|-3|=2.$

$-\frac{3\pi\cdot 6}{5\pi\cdot 4}\ \frac{3}{2} = -\frac{9}{10}$

Лист 5

Задача 5 (продолжение).

$|x| + ||y| - 3| = 2$

$x \geq 0$ и $|y| - 3 \geq 0$:

$x + |y| - 3 = 2 \Rightarrow |y| = 5 - x$

$x \geq 0$ и $|y| - 3 < 0$:

$x + 3 - |y| = 2 \Rightarrow |y| = x + 1$

$x < 0$ и $|y| - 3 \geq 0$:

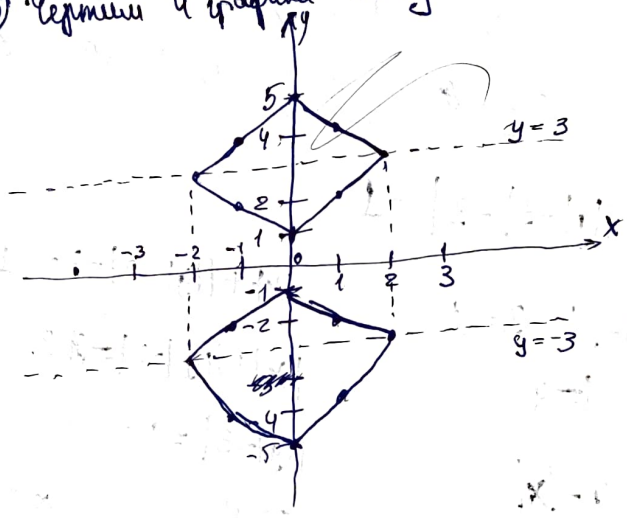
$|y| - 3 = x + 2 \Rightarrow |y| = x + 5$

$x < 0$ и $|y| - 3 < 0$:

$3 - |y| = x + 2 \Rightarrow |y| = 1 - x$

② Неравенства $|y| - 3 \geq 0$ и $|y| - 3 < 0$ раскрываются также, как и в I варианте.

③ Чертим 4 графика на одном.

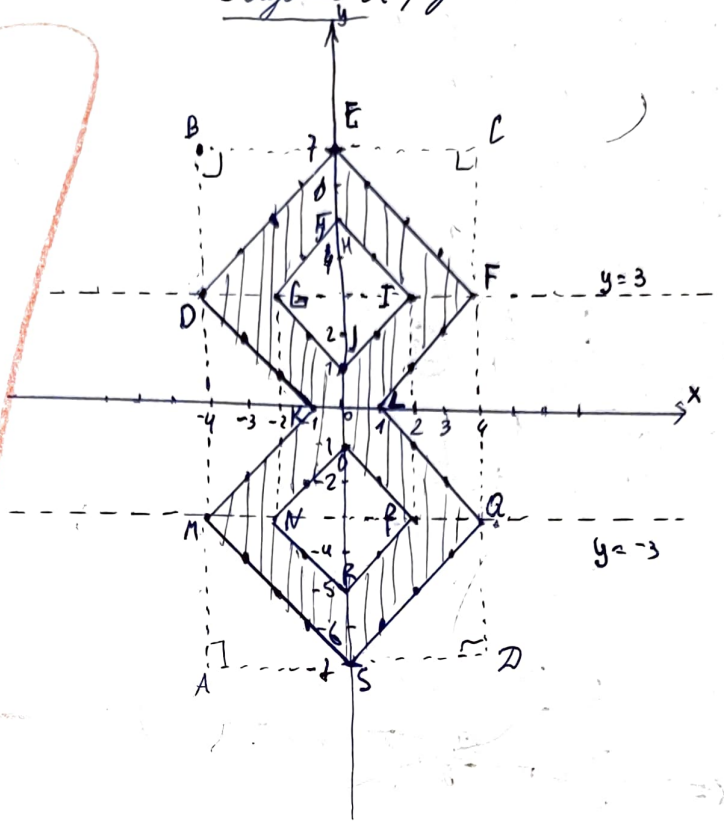


III: Соединяем графики:

см. лист 6, т.к очень крупный размер

Лист 6

Задача 5 (продолжение)



$$S = S_{ABCD} - S_{DBE} - S_{ECF} - S_{GHIJ} - S_{DKM} - S_{FLQ} - S_{NOPR} -$$

$$- S_{MAS} - S_{SQD} = (7+7)(4+4) - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 -$$

$$- \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 - \frac{1}{2}(3+3)\cdot 3 - \frac{1}{2}(3+3)\cdot 3 -$$

$$- \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 =$$

$$= 112 - 8 - 8 - 8 - 9 - 9 - 8 - 8 - 8 =$$

$$= 112 - 18 - 48 = 112 - 56 = \underline{56.}$$

Ответ: 56.

Задача 2.

(р) $1234\sin^{20}(x - \frac{\pi}{3}) \leq 1234\cdot 1 = 1234$ (т.к $\sin\alpha \leq 1$ всегда)

и $-789\cos^{23}(\alpha x - \frac{\pi}{6}) \leq 789$ (т.к $\cos\alpha \geq -1$).

(а) Заметим, что $1234 + 789 = 2023$. =>

см. лист 4.

Лист 7.

Задача 2 (продолжение)

$$\begin{cases} 1234\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1234 \\ -789\cos^{23}\left(\alpha x-\frac{\pi}{4}\right)=789 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1 \\ \cos^{23}\left(\alpha x-\frac{\pi}{4}\right)=-1. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1 \\ \cos\left(\alpha x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \end{cases} \quad \text{I} \\ \begin{cases} \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1. \\ \cos\left(\alpha x-\frac{\pi}{4}\right)=-1. \end{cases} \quad \text{II} \end{array}\right.$$

I $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$

$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$

$x_1=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$ ~~$x_2=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$~~ $(x_i\in[-\pi;\pi])$

$\cos\left(\alpha x-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$

$\alpha x-\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi k,\ k\in Z$

$x_i\in[-\pi;\pi] \Rightarrow \alpha x-\frac{\pi}{4}=\pi$ или $\alpha x-\frac{\pi}{4}=-\pi.$

1) $\alpha\cdot\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{4}$ или $\alpha\cdot\frac{5\pi}{6}=-\frac{3\pi}{4}$

$\alpha_2=-\frac{9}{10}$

~~$\alpha_1=\frac{3}{2}$~~

~~2) $\alpha\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{4}$ или $\alpha\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3\pi}{4}$~~

~~$\alpha_3=-\frac{15}{2}$~~ ~~$\alpha_4=\frac{9}{2}$~~

II $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1.$

$x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$

$x_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}$ (т.к. $x_i\in[-\pi;\pi]$)

$\cos\left(\alpha x-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$

$\alpha x-\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi k,\ k\in Z$

$x\in[-\pi;2\pi] \Rightarrow \alpha x-\frac{\pi}{4}=\pi$ или $\alpha x-\frac{\pi}{4}=-\pi.$

см. лист 8

Лист 8

Задача 2 (продолжение)

$\alpha \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{4}$ или $\alpha \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3\pi}{4}$

$\alpha_3 = -\frac{15}{2}$ $\qquad$ $\alpha_4 = \frac{9}{2}$.

III Ищем $|\alpha_{min}|$:

$|\alpha_1| = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $|\alpha_3| = \frac{15}{2}$

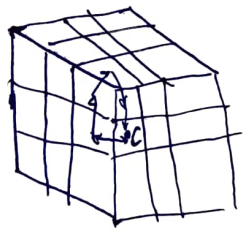
$|\alpha_2| = \frac{9}{10}$ $\qquad$ $|\alpha_4| = \frac{9}{2}$

$|\alpha_{min}| = |\alpha_2| = 0{,}9 < 1$.

Ответ: 0,9.

Задача 7.

Из всех вариантов для жука подходит вариант, когда он находится на боковой грани квадратика, переползя на соседнюю грань, повернув направо, переполз на угловой квадратик, затем переполз на 3 грань, повернув направо и дважды проползя вперёд. Схематическое его маршрут выглядел так:



С - стартовая клетка (и конечная)

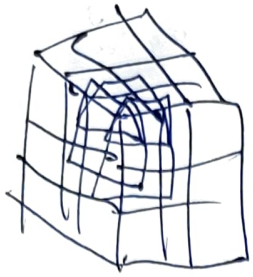
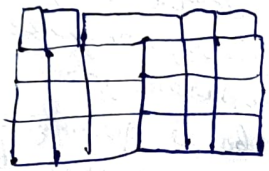
Легко можно показать, что не подходят другие варианты (старт в углу или старт в центре)

Также легко показать, что через ~~18·2 = 36 ходов он~~ 19 секунд приползёт в эту клетку (см. лист 8 ("задача 7 (продолжение)))

Ответ: ~~36~~ 19.

Задача 8.

① Дадим каждой точке координату вида (x;y), тогда верхние получат координаты (0;1); (1;1); (2;1); (3;1); (4;1); (5;1); нижние — координаты (0;0); (1;0) (2;0); (3;0) (4;0); (5;0).

см. лист 9.

Черновик