82-53-70-81

0 825370 810000

82-53-70-81
(87.9)

+1 лист
+1 лист
+1 лист
+1 лист
+1 лист

Выход: 13:59
Возвращение 14:01

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2.

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Еникеева Арнольда Наримановича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
82-53-70-81	75	15	15	15	0	15	15	0	0

75 (Семьдесят пять)

82-53-70-81 (87.9)

75 (Семьдесят пять) Чистовик.

№1 Пусть $t = \sqrt{45+\sqrt{2022}} - \sqrt{45-\sqrt{2022}}$.

Заметим, что $45^2 > 2022 \Rightarrow 45 > \sqrt{2022} \Rightarrow$
$\Rightarrow t$ существует и $t > 0$.

Рассмотрим t^2.

$t^2 = 45+\sqrt{2022} + 45-\sqrt{2022} - 2\sqrt{(45+\sqrt{2022})(45-\sqrt{2022})} =$

$= 90 - 2\sqrt{45^2 - 2022} = 90 - 2\sqrt{3}$.

$3 < 2\sqrt{3} < 4$ (т.к. $9 < 12 < 16$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\Rightarrow 87 < t^2 < 0$~~ $86 < t^2 < 87$.

$\Rightarrow 81 < t^2 < 100 \Rightarrow 9 < t < 10$ $(t > 0)$.

$\Rightarrow [t] = 9$. Ответ: 9.

№2 $1234 \sin^{20}(x - \frac{\pi}{6}) - 789 \cos^{23}(\alpha x - \frac{\pi}{6}) = 2023$.

Заметим, что $1234 + 789 = 2023$.

$\sin^{20}\varphi \leq 1$ и $\cos^{23}\varphi \geq -1$ $\forall \varphi$.

$\Rightarrow$ Равенство верно при

$$\begin{cases} \sin^{20}(x - \frac{\pi}{6}) = 1 \\ \cos^{23}(\alpha x - \frac{\pi}{6}) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \pm 1 \\ \cos(\alpha x - \frac{\pi}{6}) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ \alpha x - \frac{\pi}{6} = \pm\pi + 2\pi k \end{cases}$$

Чистовик.

№2

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. & (1) \\ \left[\begin{array}{l} \alpha x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \alpha x = -\pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Но нам нужен $x \in [\pi; \pi] \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

Подставим в (2).

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2\pi}{3}\alpha = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3}\alpha = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ -\frac{1}{3}\pi\alpha = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \\ -\frac{1}{3}\pi\alpha = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$$

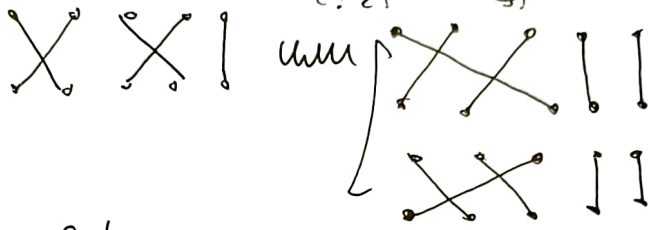
Чистовик.

№8

.. $\Rightarrow$ либо 2 пары ребра пересекаются попарно, либо 1 ребро пересекает 2 других.

$\Rightarrow f(k_2 .. k_6; 4) = \cancel{P(2;1;2) + 2P(3;1;1)} =$

$= \cancel{\frac{5!}{2!2!} + 2\frac{5!}{3!} = 30}$



$.. = 3! + 2 \cdot 3! = 3 \cdot 3! = 18$. S_i – промежуточные суммы вариантов

$\Rightarrow f(5_1 ... k_6; 14) = 18$

$\Rightarrow S_1 = 36$

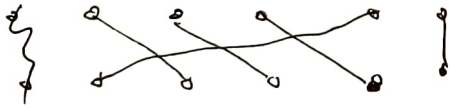
Но $f(k_1 .. 5_1; 14) = f(5_1 .. k_6; 14) = 18$.

$k_2 .. k_5 < 5$, т.к. $k_i \le \max(6-i; i)$.

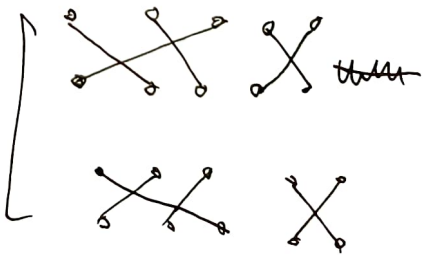
2) $f(4; ... k_6; 14) =$ верно для $\begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 4 \\ k_5 = 4 \\ k_6 = 4 \end{cases}$ (можем переставлять k_i и k_{6-i})

$f(k_2 ... k_6; 6) =$

$= C_2^1 + C_2^1 \cdot 2 = 6$.



или



$\Rightarrow S_2 = 4 \cdot 6 = 24$

$\Rightarrow S_3 = S_1 + S_2 = 60$.

Чистовик.

№8) Если все $k_i < 3$, то т.к. k_3 и k_4 не более 2, то всегда по принципу Дирихле найдётся среди k_1, k_2, k_5, k_6 с суммой 10 число больше или равно 3.

$\Rightarrow$ ещё 1 вариант с 3.

Чистовик.

№6 Докажем по индукции, что

$$\frac{a_k}{a_1+\ldots+a_{k-1}} = \cancel{(k-1)^2}\,\frac{k^2+1}{k-1}. \quad (1)(k \geq 2)$$

База: $k=2$. $a_2 = \frac{5\cdot 2}{2} a_1 = 5a_1$;

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2^2+1}{2-1} = 5 = \frac{5a_1}{a_1} \text{ — верно.}$$

Пусть для какого-то k верно выр. (1).

$\Rightarrow$ докажем, что $\frac{a_{k+1}}{a_1+\ldots+a_k} = \frac{(k+1)^2+1}{k}$.

$$\frac{a_k}{a_1+\ldots+a_{k-1}} = \frac{k^2+1}{k-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1+\ldots+a_{k-1} = \left(\frac{k-1}{k^2+1}\right)a_k$$

$$\Rightarrow (a_1+\ldots+a_{k-1})+a_k = a_k\left(1+\frac{k-1}{k^2+1}\right) =$$

$$= a_k\,\frac{k^2+k}{k^2+1} = \frac{k(k+1)}{k^2+1}.$$

$$a_{k+1} = \frac{((k+1)^2+1)(k+1)}{k^2+1}.$$

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_1+\ldots+a_k} = \frac{((k+1)^2+1)(k+1)}{(k^2+1)}\cdot\frac{(k^2+1)}{k(k+1)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2+1}{k};$$ утверждение доказано.

Чистовик

№6 $\Rightarrow$ по индукции, ~~для~~ $\forall n \in N;\ n \geq 2$:

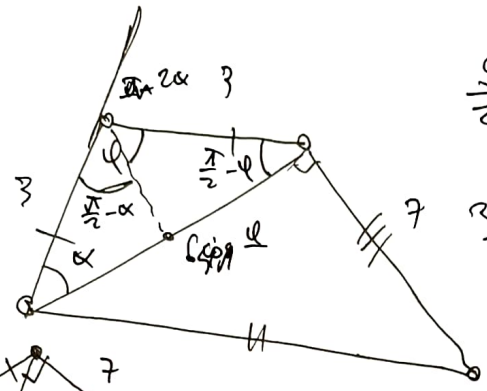
$$\frac{a_{n+1}}{a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n} = \frac{(n+1)^2+1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{2023}}{a_1 + \ldots + a_{2022}} = \frac{2023^2+1}{2022}.$$

Ответ: $\frac{2023^2+1}{2022}$.

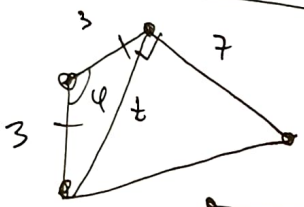
82-53-70-81
(87.9)

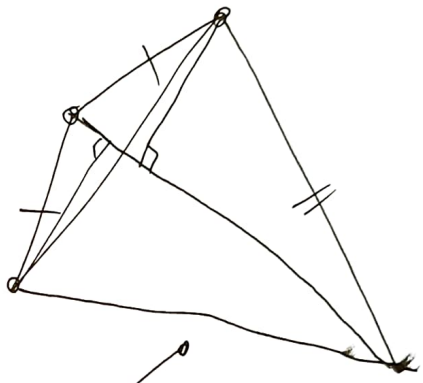
Черновик.



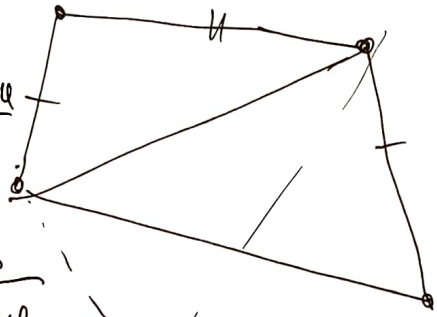
$\frac{9}{2}\sin\varphi + \frac{7}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot 6$

$3\left(-\frac{x}{2} + 1 - x^2\right) = 7.$





$\frac{7t}{2} + \frac{9\sin\varphi}{2}$



$\frac{t}{\sin\varphi} = \frac{3}{\cos\frac{\varphi}{2}}$

$3\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) + 7 = 0$

$t = 6\cos\frac{\varphi}{2}$

$\cos - \frac{tg\varphi}{2} = -\frac{7}{3}$

$\frac{9}{2}\sin 2\varphi + \frac{7}{2}\cdot 6\cos\varphi.$

$\cancel{\frac{9}{2}\cos 2\alpha}$ $\quad 9\sin\varphi\cos\varphi + 21\sin\varphi$

$\cancel{\sin\varphi\,\frac{9}{2}(\cos\varphi}$ $\quad 3(3x\sqrt{1-x^2} + 7x)$

$\cancel{\frac{1}{2}(18\sin\varphi\cos\varphi + 7\cdot 6}$ $\quad \sqrt{(1-x^2)} \Rightarrow (1-x^2)^{+\frac{1}{2}}$

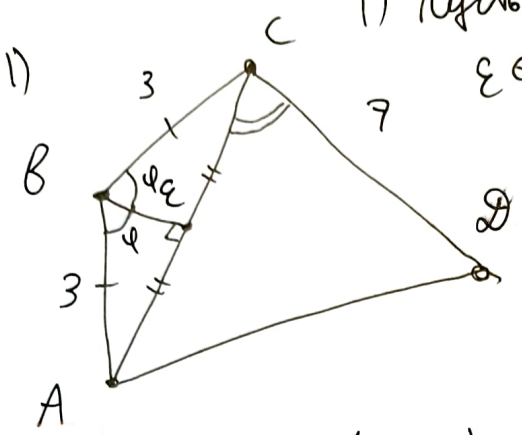
$\frac{d}{dx}\left(3x\sqrt{1-x^2}\right) = ?$ $\quad \Rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\, x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} + x\cdot\left(-\frac{1}{2(\sqrt{1+x^2})}\right)$

Чистовик.

№4 Возможны 2 случая: 1) стороны по 3 - соседи и 2) они противоположные

1) Пусть $\angle ABC = 2\varphi$.



$E \in AC : BE \perp AC$.

$\angle CBE = \angle ABE = \varphi$.

$\Rightarrow AC = CE + AE =$

$= 2BC \sin\varphi = 6\sin\varphi$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\angle ABC =$

$= \frac{9}{2}\sin 2\varphi$.

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 7\, AC \cdot \sin\angle ACD \leq \frac{7}{2} AC$.

$\Rightarrow S_{ABCD} \leq \frac{9}{2}\sin 2\varphi + \frac{7}{2} \cdot 6\sin\varphi =$

$= 9\sin\varphi\cos\varphi + 21\sin\varphi = S_0$

Осталось найти $\max(S_{ABCD})$

Пусть $\sin\varphi = x$. $0 < x \leq 1$

$\Rightarrow S_0 = 9x\sqrt{1-x^2} + 21x = 3(x\sqrt{1-x^2} + 7x)$.

$\frac{d}{dx}(3x\sqrt{1-x^2} + 7x) =$

$= \left(3\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{-x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) + 7\right)$.

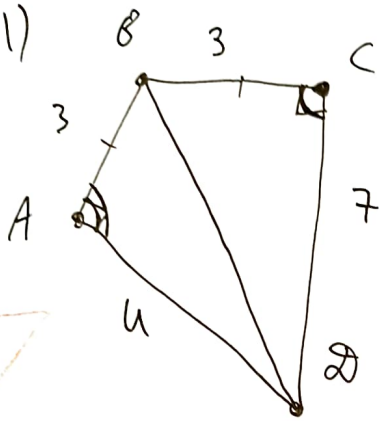
$\Rightarrow \frac{d}{dx}(3x\sqrt{1-x^2} + 7x) = 0$ при

~~Чистовик~~.
Черновик

№4 Возможны 2 случая:
1) стороны с длиной 3 – соседи
2) они противоположные.

Пусть 4 сторона это u.

1)



Обозначим вершины $ABCD$.

Заметим $S_{ABCD} =$

$= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} =$

$= \frac{1}{2}(BC \cdot CD \sin\angle BCD + AB \cdot AD \sin\angle BAD)$

Но $\sin\varphi \le 1 \ \forall\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow (S_{ABCD})_{max} = \frac{1}{2}(AB \cdot AD + BC \cdot CD)$,

причём $\angle BAD = \angle BCD = \frac{\pi}{2}$.

Такое возможно при $\triangle BCD$ и $\triangle ABD$ – п/у.

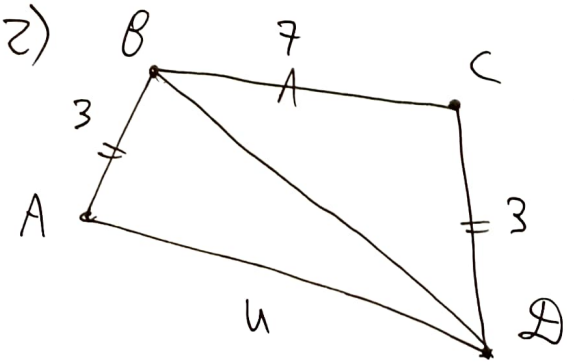
Но BD – общ., а $AB = BC = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BCD \Rightarrow AD = CD = 7 = u$.

$\Rightarrow$ в такой конфигурации $S_{max} =$

$= \frac{1}{2}(AB \cdot CD + BA \cdot DA) = \frac{1}{2}(21 + 3u)$, а $u = 7$.

2)



Аналогично,

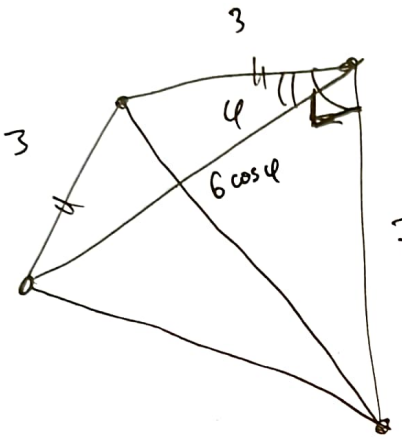
$S_{ABCD} \le S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} \le$

$\le \frac{1}{2}(AB \cdot AD + BC \cdot CD) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{max} = \frac{1}{2}(21 + 3u)$

~~Чистовик~~.
Черновик

~~№4 .. => аналогично~~



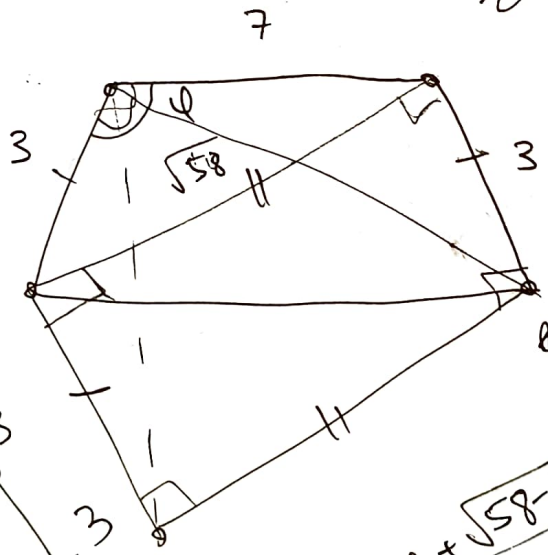
$\Rightarrow 21\cos\varphi + \frac{9}{2}\sin\varphi$

$\Rightarrow \sqrt{21^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{42^2+9^2}$

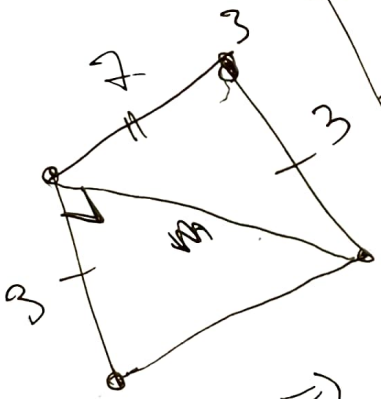
$\simeq 22$

$\cancel{x^2 = 58 + 7t^2 + 42t}$

$\frac{7\cdot 3}{2} + \frac{\sqrt{58}}{2}\cdot 3$



$58 - 42\cos\varphi$



$\frac{21}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{58-42\cos\varphi}\cdot 3}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(21t + 3\sqrt{42t^2+16}\right)$

$7t + \sqrt{42t^2+16} = ? = x$

82-53-70-81 (87.9)

Черновик

$x - \frac{\pi}{6}$

N1

$-\frac{5}{4}x - \frac{\pi}{6} = +\pi \to -\frac{x}{4} = -\frac{\pi}{6}$

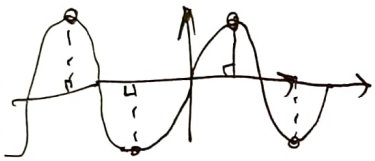
$x = +2\frac{\pi}{3}$

$\left(\sqrt{45+\sqrt{2022}} - \sqrt{45-\sqrt{2022}}\right) = t$

$[t] = ?$

$t^2 = 90 - 2\cdot\sqrt{45^2 - 2022} =$

$= 90 - 2\sqrt{3}.$



$9^2 < t^2 < 10^2 \Rightarrow [t] = 9.$

N2

$1234\sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 789\cos^{2023}\left(\alpha x - \frac{\pi}{6}\right) = 2023$

(?) $2023 \overset{?}{=} 1234 + 789 = 2023$ ✓.

$$\begin{cases} 1234\sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1234 \\ -789\cos^{2023}\left(\alpha x - \frac{\pi}{6}\right) \le 789 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \pm 1 & (1) \\ \cos\left(\alpha x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x = +\frac{\pi}{6} \pm \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$\alpha x - \frac{\pi}{6} = \pm\pi + 2\pi k$

Черновик

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \left[\begin{array}{l} \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pm\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right. \\ \alpha x + \frac{\pi}{6} = \pm\pi + 2\pi k \end{cases}$$

(1) $$x_1 = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \\ \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \ \phi \\ -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3} \ \phi \end{array}\right.$$

(2) $$\alpha x = \pm\pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

1) $$\alpha \cdot \frac{2\pi}{3} = \pm\pi + \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$\frac{2}{3}\alpha = \pm 1 + \frac{1}{6} + k$$

$$\alpha = \pm\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + k$$

$$\Rightarrow |\alpha| \geq \frac{1}{4}$$

2) $$-\alpha\frac{\pi}{3} = \pm\pi + \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$-\alpha = 3 \pm \frac{1}{2} + \pi k$$

$$|\alpha| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ans: } |\alpha| \geq \frac{1}{4}.$$

Черновик.

$\log_3(|x^2-3|^3+1) + \sqrt{4x^4-5x^2+11} = \sqrt{2x^4+7x^2-7}$

$4x^4-5x^2+11$ vs $2x^4+7x^2-7$

$2x^4-12x^2+18$

$\cancel{3x^4-6x^2+9}$

$\cancel{x^4-2x^2+3}$

$x^4-6x^2+9 \Rightarrow \geq 0$

$\Rightarrow (x^2-3)^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2=3$

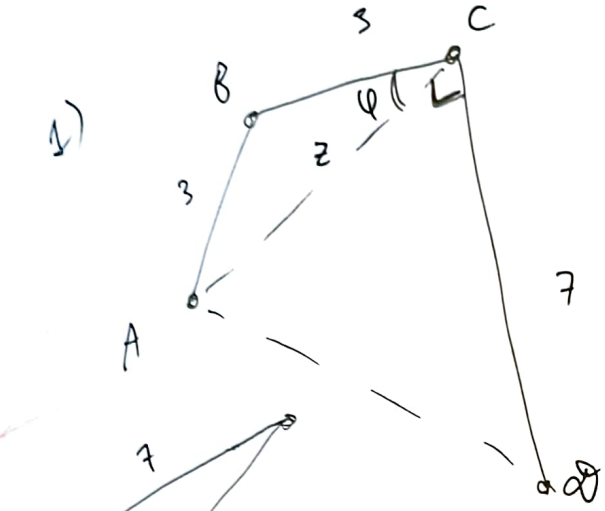
$\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}.$

$\log_3(2)=(?)$ $\underline{\log_3(x)>0 \text{ при } x>1.}$

Черновик

$a=b=3,\ c=7 \quad S=S_{max}.\ d=?$

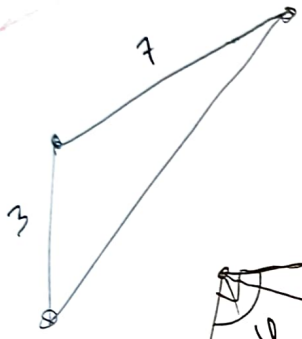
1)

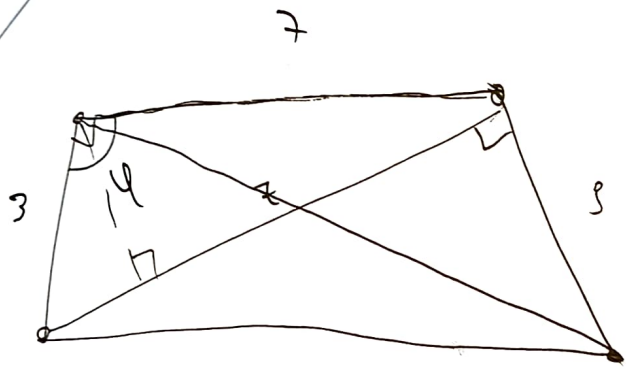


$S_{\Delta ABC} \le \frac{ab}{2}.$

$z = 6\cos\varphi$

$\Rightarrow \frac{9}{2}\sin\varphi + 21\cos\varphi.$





$$\Rightarrow (?)\ \begin{cases} S_1 = \frac{ab\sin\varphi}{2} = \frac{9\sin\varphi}{2} \\ S_2 = \frac{7z}{2},\ \frac{3}{\sin 2\varphi} = \frac{3}{\sin\varphi} \end{cases}$$

$$z = 3\cdot\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\varphi} = 6\cos\varphi$$

$$\Rightarrow (?)\ \max\ \frac{9\sin\varphi}{2} + 21\cos\varphi = \frac{3}{2}.$$

$$\max\left(3\sin\varphi + 14\cos\varphi\right) =$$

$$= \cancel{3^2+14^2}\ \cancel{\sqrt{3^2+14^2}}.$$

черновик.

$3\sin\varphi + 14\cos\varphi = \sqrt{3^2+14^2}(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi)$

$\le \sqrt{3^2+14^2} \Rightarrow S_{max} = S(\dots) \Rightarrow d.$

2) ...

$S(2^{2022}) + S(5^{2022}) = (?)$

$(2)^1 + (5)^1 = 10^1$

$(2)^y + (5)^y = 2+1$

$8 + 125 \to 3+1$

$2^{2022} \cdot 5^{2022} = 10^{2022} \Rightarrow S_{10} = 2023$

12345
vs 9
vs 2d

xy

$S(a) + S(b)$

$S(4) + S(25) = 3$

$S(8) + S(125) = 4$

$S(16) + S(625) = 5$

$S(32) + S(3125) = 6$

$S(64) + S(\boxed{}) = 7.$

a – x цифр

b – y цифр

ab => ? $\le x+y$.

если >1, то

Пусть $S(a) + S(b) = S(ab)$ $\quad a = 2^t$, $b = 5^t$

a, b.

5, 3 → 9

если >1, то

~~Если $S(a)+S(b)$~~

$\Rightarrow S(xy) < a+b+1.$

$x < 10^a$

$y < 10^b \Rightarrow xy < 10^{ab}$

$2^t = \frac{10^t}{5^t} \to \frac{10^{t+1}}{5^{t+t}} = 2^{t+1}$

(?) если на 2.

$\Rightarrow$ a цифр и b цифр.

пусть $a, b = const$

$\Rightarrow S(ab) \le S(a) + S(b)$, но $S(ab) \to S(a)+1.$

5^3
$2^3 \Rightarrow 10^4$ Черновик.

$$\begin{cases} 5^{t+1} \to b+1 \\ 2^{t+1} \to a+1 \end{cases}$$

но $10^{t+1} \to a+b+1$.
$\parallel$
10^{a+b}

$\Rightarrow 5^{t+1} > 10^b$ $\Rightarrow 10^{t+1} > 10^{a+b}$, $\emptyset$.

$2^{t+1} > 10^a$ $4+25=100$

$\Rightarrow S(2^{2022}) + S(5^{2022}) = \cancel{2022}\ 2023$

16 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{(n^2+1)\,n}{(n-1)^2+1} = \dfrac{n^3+n}{n^2-2n+2}$.

(?) $a_{2023} / S_{2022} = |?|$. $a_1 = 17$.

$S_3 = 36a_1$

$a_2 = \dfrac{5\cdot 2}{2} a_1 = 5a_1$ $\Rightarrow \dfrac{a_3}{S_3} = \dfrac{17}{3}$

$a_3 = \dfrac{10\cdot 3}{5} a_2 = 6a_2 = 30a_1$ $\dfrac{30}{1+5} = 5 = \dfrac{34}{2}$

$a_4 = \dfrac{17\cdot 4}{10} a_3 = 12\cdot 17a_1 = 204$

$a_5 = \dfrac{26\cdot 5}{17} a_4 = 120\cdot 26a_1$

$a_6 = \dfrac{37\cdot 6}{26} a_5$. $\dfrac{120\cdot 26}{1+5+30+204} = \dfrac{120\cdot 26}{240} = 13$

$\Rightarrow$ (?) $\dfrac{(n^2+1)}{2}$ (?!)

Черновик.

$\Rightarrow \quad n^2+1 = ((n+1)-1)^2+1.$

$\cancel{\Rightarrow a_n a_{n+1} =}$

$a_n a_{n+1} = \dfrac{n}{(n-1)^2+1}.$

$n^2+1 = k_n$

$((n+1)-1)^2+1 = m_{n+1}$

$\Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\dfrac{k_n}{m_n}\right) n \quad . \quad (n^2+1)\cdot n! \to$

$\cancel{\Rightarrow a} \qquad \to \checkmark.$

$a_n + a_{n-1} = \left(\dfrac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} \cancel{a_{n-1}} + 1\right) a_{n-1} =$

$= \dfrac{(n^2+1)n + (n-1)^2+1}{(n-1)^2+1} a_{n-1} =$

$a_5 = \dfrac{26\cdot 5}{17} = 130\cdot 12$

$= \dfrac{n^3+n^2-n+2}{(n-1)^2+1}. \qquad \dfrac{a_5}{S_4} = \dfrac{13}{2}.$

$a_1 = a_1$

$a_2 = \dfrac{5\cdot 2}{2} a_1 = 5a_1$

$S_1\ a_1$

$S_2\ 6a_1$

$S_3\ 36a_1$

$S_4\ 240a_1$

$S_5\ 240\cdot 14a_1$

$\dfrac{a_4}{S_3} = \dfrac{17}{3} a$

$a_3 = \dfrac{3\cdot 10}{5} a_2 = 30a_1 =$ "$6\cdot 5$

$\dfrac{a_3}{S_2} = \dfrac{5}{2}$

$(n^2+1)\,n!$

$a_4 = \dfrac{17\cdot 4}{10} a_3 = 12\cdot 17a_1 = 204a_1$

$\dfrac{a_5}{S_4} = \dfrac{13}{2}$

$\to a_5 = 120\cdot 13a_1 \Rightarrow$

$a_5 = \dfrac{26\cdot 5}{17} a_4 = 120\cdot 13a_1.$

$a_6 = \dfrac{37\cdot 6}{26} a_5 = 720\cdot 37$

$240\cdot 13$

Черновик

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{((n-1)^2+1)(n-1)}{(n-2)^2-1}$$

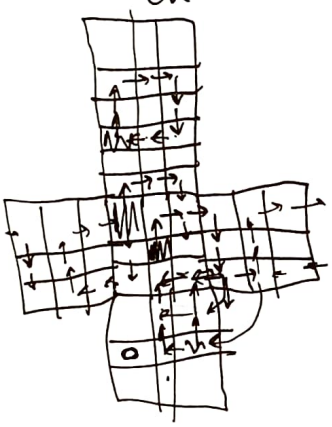
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1}$$

$\cancel{\frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots a}$ $\quad a_1 \ldots a_n = n!$

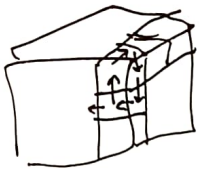
$$\frac{n^2+1}{(n-1)^2+1} = \frac{n^2+1}{n^2-2n+2} = \left(1 - \frac{2n-1}{n^2-2n+2}\right).$$

$$\begin{array}{r|l} n^2+1 & n^2-2n+2 \\ \hline -\ n^2-2n+2 & 1 \\ \hline 2n-1 & \end{array}$$

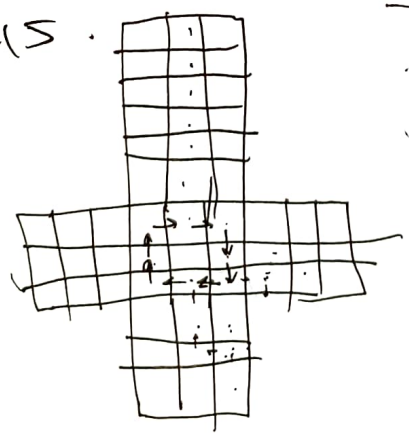
$2023 - 7 = 2016 \vdots 2$



N1 ✓
N2 ✓
N3 ✓
N5 ✓

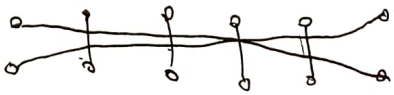


$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$

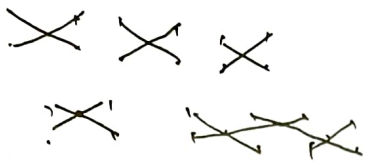


$C_6^2 = 15.$

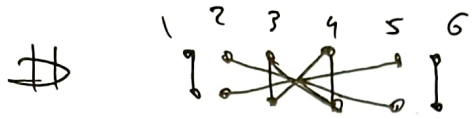
$\Rightarrow 7 \cap.$

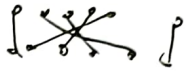


Черновик



23 24 25
53 54 34



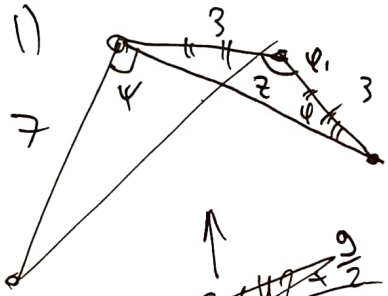


$\cancel{C_4^2 = 6}$

$2+2+2+2 = 8$ V. $\Rightarrow$ V.

$\cancel{C_6^2}$ не оп.

1)



$S_1 = \frac{9}{2}\sin\varphi$

$(z = 6\cos\varphi)$

$S_2 = 21\sin\varphi \le 21\cdot\cos\varphi$

$\cancel{S \le 49 + \frac{9}{2}}$

$\cancel{S \ge 21}$

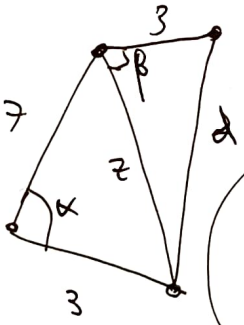
$\Rightarrow S_0 \le \frac{9}{2}\sin\varphi + 21\cos\varphi.$

$S_0 \le \frac{3}{2}(3\sin\varphi + 14\cos\varphi) = \frac{3}{2}\cos(\varphi+\alpha)$ K

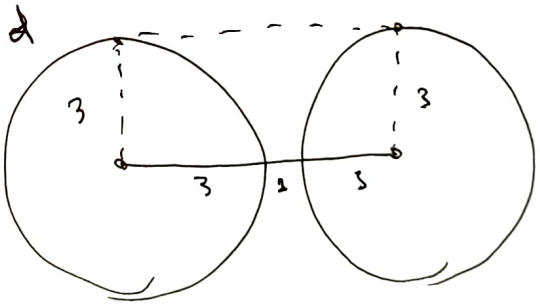
(?) $S \le 7\cdot 3$ $\quad \alpha = \varphi$

$\Rightarrow d = \ldots \Rightarrow z \Rightarrow d.$

2)



$S \le 21 + 30 = \frac{51}{2}$



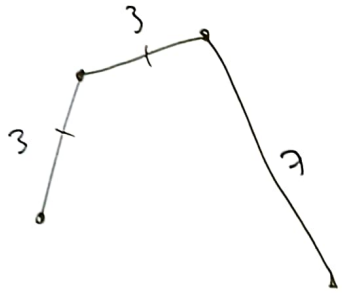
$z^2 = 49 + 9 - 42\cos\varphi = 58 - 42\cos\alpha$

$\Rightarrow S \le \frac{21}{2}\sin\alpha + \frac{3}{2}\sqrt{58 - 42\cos\alpha}.$

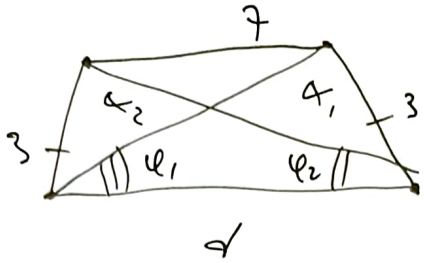
$\frac{51}{2}$ VS $\frac{3}{2}\sqrt{3^2+14^2}$ $\quad 51$ VS $3\sqrt{9+196}$

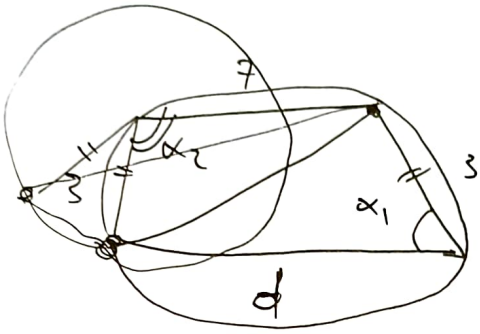
lhs > rhs.

Черновик



vs

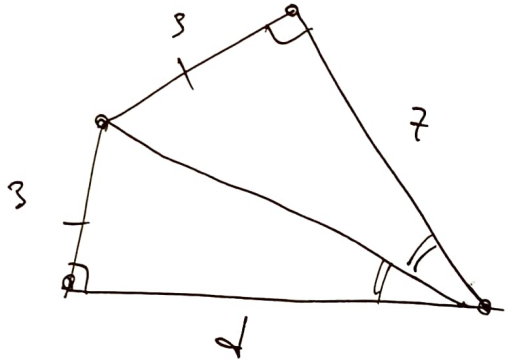




$$S_1 = \frac{21}{2}\sin\alpha_2 + \frac{3d}{2}\sin\alpha_1$$

2) $S \le \frac{21+3d}{2}$.

1)



$$S \le \frac{21+3d}{2} \Rightarrow d = 7.$$

1, 2, 3, 4, 5.

Черновик.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n^2+1)\,n}{(n-1)^2+1}.$$

$$\frac{a_n}{a_1+\ldots+a_{n-1}} = (?).$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_1+\ldots+a_{k-1}} = \frac{k^2+1}{2}.$$

$$a_{k+1} = \frac{(k^2+1)\,k}{(k-1)^2+1}\,a_k$$

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_1+\ldots+a_k} = (?)$$

$$a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k = \cancel{k^2+1}$$

$$= \frac{2a_k}{k^2+1} + a_k = \frac{a_k(k+1)^2}{k^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k(k^2+1)}{(k-1)^2+1} = (k+1)$$

$$\frac{a_k}{a_1+\ldots+a_{k-1}} = \frac{k^2+1}{2} \Rightarrow a_1+\ldots+a_k =$$

$$= \frac{2a_k}{k^2+1} + a_k = a_k\,\frac{(k+1)^2}{k^2+1}.$$

$$a_{k+1} = \frac{((k+1)^2+1)\,k}{k^2+1} \Rightarrow \Delta = \frac{((k+1)^2+1)(k+1)}{(k+1)^2}$$

Черновик.

Пусть $\frac{a_k}{a_1+\ldots+a_{k-1}} = \frac{k^2+1}{2}$

$$\begin{cases} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{((k+1)^2+1)(k+1)}{k^2+1} \\ (a_1+\ldots+a_{k-1})+a_k = \frac{2a_k}{k^2+1} + a_k = a_k\frac{(k+1)^2}{k^2+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{((k+1)^2+1)\cancel{(k+1)}\cancel{(k^2+1)}}{\cancel{(k^2+1)}(k+1)^{\cancel{2}}} = \frac{(k+1)^2+1}{k+1}$$

$$\frac{n!\cdot(n^2+1)}{\cancel{a}^{\cancel{n}}} a_1$$

$$a_k = (k^2+1)k!\,a_1$$

1, 2, 3, 4, 5, 6, -

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!$$

$$\frac{a_k}{a_1+\ldots+a_{k-1}} = \frac{(k^2+1)}{(k-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1+\ldots+a_k = \left(\frac{k-1}{k^2+1}+1\right)a_k =$$

$$= \frac{k(k+1)}{k^2+1}a_k$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)((k+1)^2+1)}{k^2+1} \Rightarrow \Delta = \frac{(k^2+1)+1}{k} \Rightarrow \in \mathbb{Z}.$$

Чистовик.

№5 Пусть для k верно

База: $k=1$

$S(2^k)+S(5^k)=k+1$. (1) $\Rightarrow S(2)+S(5)=1+1=2$ – верно.

Докажем, что $S(2^{k+1})+S(5^{k+1})=k+2$.

1) Докажем $S(2^{k+1})+S(5^{k+1})>k+1$

Пусть это не так. $\Rightarrow S(2^{k+1})+S(5^{k+1})\le k$.

Пусть ~~в 2^k~~ $S(2^k)=a$, $S(5^k)=b$.

$\Rightarrow$ $a+b=k+1$ ~~т.к.~~

$S(2^{k+1})+S(5^{k+1})\geq S(2^k)+S(5^k)$, т.к.

$2^{k+1}>2^k$ и $(5^{k+1})>5^k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $S(2^{k+1})+S(5^{k+1})=k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $S(2^{k+1})=a$ и $S(5^{k+1})=b$.

$\Rightarrow$ $2^{k+1}<10^a$ и $5^{k+1}<10^b$

$\Rightarrow$ $2^{k+1}\cdot 5^{k+1}<10^a\cdot 10^b=10^{k+1}$, но

$2^{k+1}\cdot 5^{k+1}=10^{k+1} \Rightarrow$ противр.

$\Rightarrow$ $S(2^{k+1})+S(5^{k+1})>k+1$

2) Докажем $S(2^{k+1})+S(5^{k+1})<k+2=$
$=a+b+2$

$\begin{cases} S(2^{k+1})\le a+1 \\ S(5^{k+1})\le b+1, \end{cases}$ т.к. $\begin{cases} 2<10 \\ 5<10. \end{cases}$

$\Rightarrow$ ~~для~~ $\begin{cases} S(2^{k+1})=a+1 \\ S(5^{k+1})=b+1 \end{cases}$

10^x – минимальное число t, для которого $S(t) = x+1$. ~~черн~~ чистовик.

(т.к. для меньших цифр не более, чем x).

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^{k+1} > 10^b \\ 2^{k+1} > 10^a \end{cases} \Rightarrow 2^{k+1}5^{k+1} > 10^{a+b} = 10^{k+1}$$

$\Rightarrow$ Противоречие $\Rightarrow S(2^{k+1}) + S(5^{k+1}) < k+3$

$$\Rightarrow k+1 < S(2^{k+1}) + S(5^{k+1}) < k+3$$

$$\Rightarrow S(2^{k+1}) + S(5^{k+1}) = k+2.$$

Индукционный переход доказан.

База: $k=1 \Rightarrow S(2^1) + S(5^1) = 1+1 = 2$!

$\Rightarrow$ По индукции, $\forall k \in N$:

$$S(2^k) + S(5^k) = k+1.$$

$$\Rightarrow S(2^{2022}) + S(5^{2022}) = 2023.$$

Ответ: 2023.

Чистовик.

№4. при

$$\left(3\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)+7\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad 3(1-x^2)-\frac{x}{2}+7\sqrt{1-x^2}=0.$$

$$-6+6x^2+x=14\sqrt{1-x^2}.$$

$$\Rightarrow \quad (6x^2+x-6)^2=14(1-x^2)$$

$$36x^4+36+x^2-12x+12x^3-72x^2=14-14x^2$$

$$36x^4+12x^3-57x^2-12x+36=0$$

$$36x^2+12x-57-\frac{12}{x}+\frac{36}{x^2}=0$$

$$x-\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2.$$

$$\Rightarrow 36(t^2+2)+12t-57=0$$

$$\Rightarrow 36t^2+12t+15=0$$

$$12t^2+4t+5=0$$

$D<0 \Rightarrow$ корней нет $\Rightarrow \frac{d}{dx}>0$ $\Rightarrow$ для x тоже $\Rightarrow$ на $x=(0;1)$

$\Rightarrow S_{max}$ будет при $x=1$

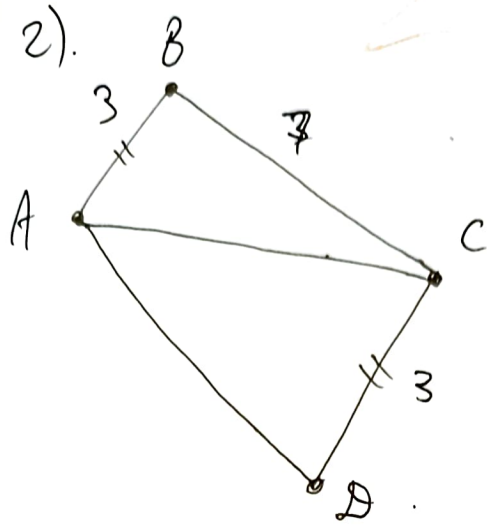
$\Rightarrow S_{max} \leq \frac{7\cdot 6}{2}=21.$ (т.к. тогда $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ и $S \to \frac{3\cdot 3}{2}\cdot 7$).

Но S_{max} не достигается, т.к. $2\varphi<\pi$

$\Rightarrow x=\sin\varphi<1.$

Чистовик.

№4 г).



Если отразить D отн. серпера к AC, то задача сведется к 1), т.к. D и A будут соседями

$\Rightarrow S_г \leq 21$, но в данном случае максимум достигается, т.к. $\angle B$ и $\angle D$ могут быть одновременно прямыми. $\Rightarrow S_{max} = S_г = 21$.

$\Rightarrow S_{max} = 21 = \frac{1}{2}(AD \cdot DC + AB \cdot BC) =$

$= \frac{1}{2}(21 + 3AD) \Rightarrow AD = BC = 7$.

Ответ: 7.

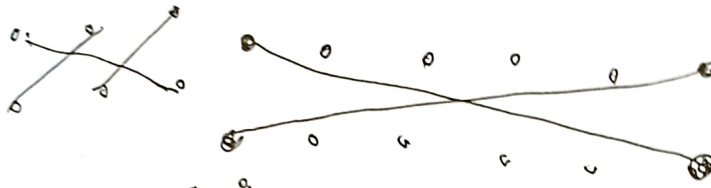
Черновик

№8

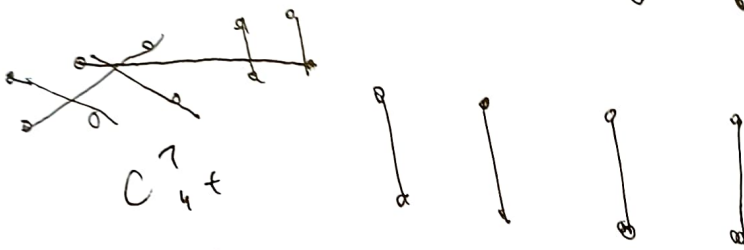
2+2+2+1+1

1+1+3+3

$8 = C_4^2 + 2.$ $\Delta = 14$



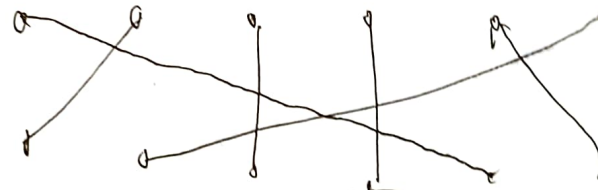
$\frac{30}{2} = 15$

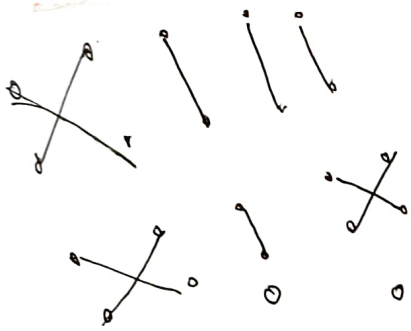


30

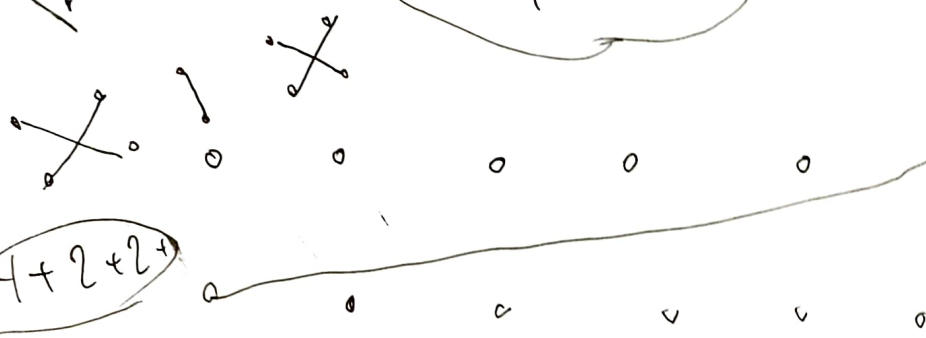
$C_4^2 +$

$C_5^2 = 10$





$C_4^2 + 2$



4+2+2+

$\Rightarrow P(2,2,1) + 1$

Чистовик.

№8 Рассмотрим для каждой из нижних 6 точек кол-во отрезков, с которыми пересекается выходящий из неё.

Пусть это будет k_i для i точки (т. $i=1-6$).

Заметим, что ~~всего рёбер k_1+k_2~~ всего ~~отрезк~~ пар отрезков - $C_6^2 = 15$

$\Rightarrow$ есть 7 из них, которые пересекаются.

Но каждое пересечение посчитано 2 раза

$\Rightarrow$ $k_1 + \ldots + k_6 = 14$.

Пусть $k_1 = n$. $\Rightarrow$ у ~~след~~ $k_2 \ldots k_{1+n}$ будут учитывать пересечение с a_1 (ребро 1).

Пусть $f(k_1 \ldots k_m; S)$ - кол-во вариантов набрать сумму S из чисел $k_1 \ldots k_m$, для которых выполнено оговоренное условие задачи.

$\Rightarrow$ $f(5, k_2 \ldots k_6, 14) = f(k_2, k_3 \ldots k_6; 4)$

(т.к. $k_1 = 5$ и $k_2 \ldots k_6$ пересекаются с a_1).

$f(k_2 \ldots k_6; 4)$ ~~верн~~ равно кол-ву вариантов для 10 точек и 2 пересечений

$\Rightarrow$

Чистовик.

№2 Нас интересует α : $|\alpha|_{min.}$ (минимальн)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha = \frac{7}{6} + 2k \\ \frac{2}{3}\alpha = -\frac{5}{6} + 2k \\ -\frac{1}{3}\alpha = \frac{7}{6} + 2k \\ -\frac{1}{3}\alpha = -\frac{5}{6} + 2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{7}{4} + 3k \\ \alpha = -\frac{5}{4} + 3k \\ -\alpha = \frac{7}{2} + 6k \\ -\alpha = -\frac{5}{2} + 6k \end{cases}$$

Заметим, что $\forall k \in \mathbb{Z}$ $|\alpha| \geq \frac{5}{4}$.

$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha|_{min} = \frac{5}{4}. \\ \alpha = -\frac{5}{4} \end{cases}$ Выражение при $\alpha = -\frac{5}{4}$ верно при $x = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{5}{4} = \alpha$. $\left(\begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \\ -\frac{5}{4}x - \frac{\pi}{6} = -\pi. \end{cases} \right)$.

Чистовик.

№3

$$\log_3\left(|x^2-3|^3+1\right)+\sqrt{4x^4-5x^2+11}=\sqrt{2x^4+7x^2-7}.$$

Заметим, что $|x^2-3|^3 \geq 0 \ \forall x$.

$$\boxed{\begin{cases} 4x^4-5x^2+11 \geq 0 \\ 2x^4+7x^2-7 \geq 0 \end{cases} \quad \text{ОДЗ}}$$

$(|x^2-3| \geq 0 \Rightarrow |x^2-3|^3 \geq 0)$

$\Rightarrow |x^2-3|^3+1 \geq 1 \ \forall x \Rightarrow \log_3(|x^2-3|^3+1) \geq 0 \ \forall x.$

Заметим, что $\underbrace{\sqrt{4x^4-5x^2+11}}_{a} \geq \underbrace{\sqrt{2x^4+7x^2-7}}_{b} \ \forall x.$

Действительно, a и $b > 0$, а также

$a^2-b^2 = 2x^4-12x^2+18 = 2(x^2-3)^2 \geq 0 \ \forall x$

$\Rightarrow a^2 \geq b^2 \ \forall x \Rightarrow a \geq b \ \forall x \ (a, b \geq 0).$

Но $\log_3(|x^2-3|^3+1)+a \geq a \geq b \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Равенство возможно только при

$a=b$ и $\log_3(|x^2-3|^3+1)=0.$

$a^2-b^2 = 2(x^2-3)^2 \Rightarrow a=b$ при $(a, b \geq 0)$

$2(x^2-3)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}.$

Но при $x=\pm\sqrt{3}$ $\log_3(|x^2-3|^3+1) =$

$= \log_3(1) = 0 \Rightarrow$ равенство верно.

$\Rightarrow$ Ответ: $x=\sqrt{3}$ или $x=-\sqrt{3}$.