0 799316 140004

79-93-16-14
(85.12)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

+1 лист

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Захарова Дмитрия Максимовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
79-93-16-14	85	15	5	15	0	15	15	15	5

85 (восемьдесят пять)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

79-93-16-14 (85.12)

ЧЕРНОВИК

$\sqrt{45-\sqrt{2023}}-\sqrt{45+\sqrt{2023}} = \sqrt{90-2\sqrt{45^2-2023}} =$

$45 \times 45 = 225$, 180, 2025, -2023, 2

$\sqrt{90-2\sqrt{2}} < 2$

$1{,}41 \times 2 = 2{,}82$

$98 : 2 = 49$, -8, 18

$(a+b\sqrt{2})^2 = a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$

$a^2+2b^2=90$ $\quad 2ab=-1$ $\quad 81<90-2\sqrt{2}<100$

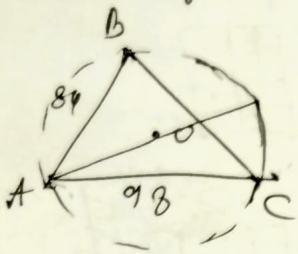
$a=-\frac{1}{2b}$

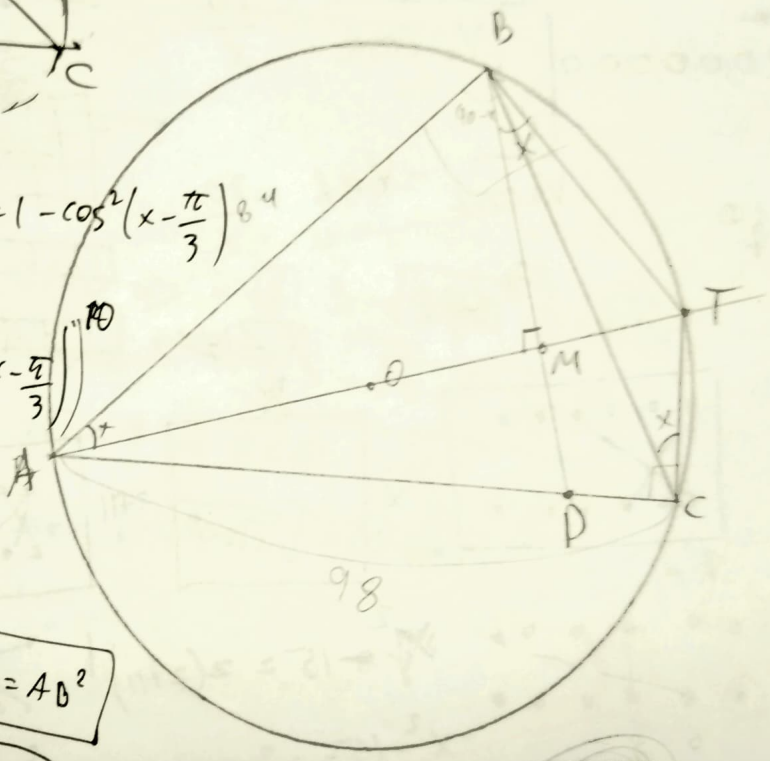
$\frac{1}{4b^2}+2b^2=90$

$8b^4-90b$

$\frac{84^2}{98} = \frac{42^2\cdot 4}{2\cdot 49} = \frac{7^2\cdot 6^2\cdot 4}{2\cdot 7\cdot 7}$

84×84





$\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 84

$1234\left(1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{10}$

$\boxed{AD\cdot AC = AM\cdot AT = AB^2}$

0000000

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos\left((a-1)x+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$|x|+|y|-3|-3|=1$

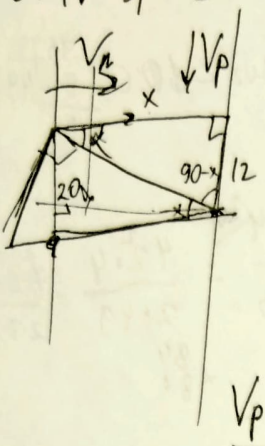
$x,y>0$ $|x|=x$

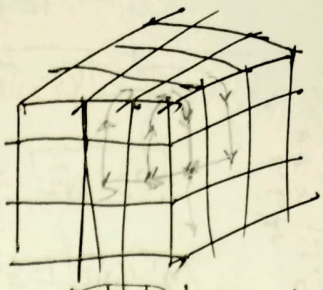
$|y|=y$

$|t+|y-3|-3|=1$

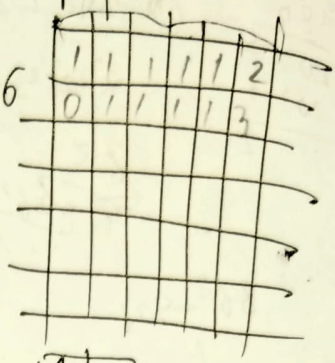
$y \le 4$.

$t+|y-3|=\pm 1$



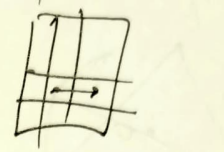


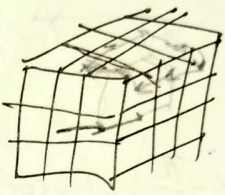
9-6



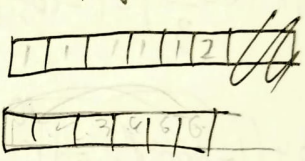
$\frac{V_p}{V_n} = \frac{12}{x} = \operatorname{tg}\alpha$

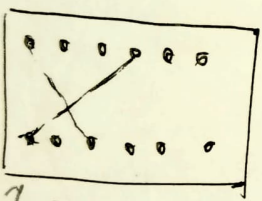
$\frac{V_p - V_n \cdot \sin\alpha}{V_n \cdot \cos\alpha} = \frac{20}{x}$

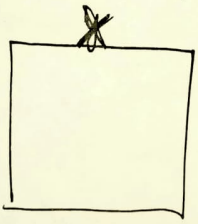


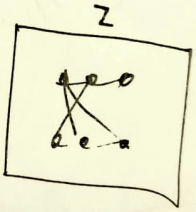


$\frac{V_p}{V_n \cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{x}$

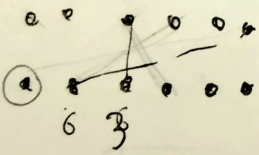








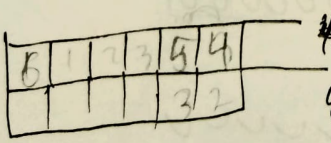
$\frac{y-3}{2}$



$x^2 - 15 = z(z+11)$

$x^2 - 15 = z^2 + 11z$

$x^2 - 4y^2 = 61$ $\frac{4 \cdot 5}{2} =$



$4x^2 - 60 = 4z^2 + 44z$

$(x-2y)(x+2y) = 61$

$4x^2 - 60 = (2z+11)^2 - 121$

$61 \cdot 1$ $2x = 62$

$x = 31$

$4x^2 - (2z+11)^2 + 61 = 0$

$x-2y=1$

$x+2y=61$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

79-93-16-14
(85.12)

ЧИСТОВИК

№1

$\sqrt{45-\sqrt{2023}}-\sqrt{45+\sqrt{2023}}<0$ (очевидно, т.к. $\sqrt{45-\sqrt{2023}}<\sqrt{45+\sqrt{2023}}$

$\sqrt{45-\sqrt{2023}}-\sqrt{45+\sqrt{2023}}=-\sqrt{\left(\sqrt{45-\sqrt{2023}}-\sqrt{45+\sqrt{2023}}\right)^2}=$

$\cancel{=-\sqrt{45-\sqrt{2023}+45-\sqrt{2023}-2\sqrt{45^2-2023}}}$

$=-\sqrt{\left(\sqrt{45+\sqrt{2023}}-\sqrt{45-\sqrt{2023}}\right)^2}=$

$=-\sqrt{45+\sqrt{2023}+45-\sqrt{2023}-2\sqrt{45^2-2023}}=$

$\cancel{=-\sqrt{2\sqrt{2023}-2\sqrt{2}}}$

$=-\sqrt{90-2\sqrt{2}}$

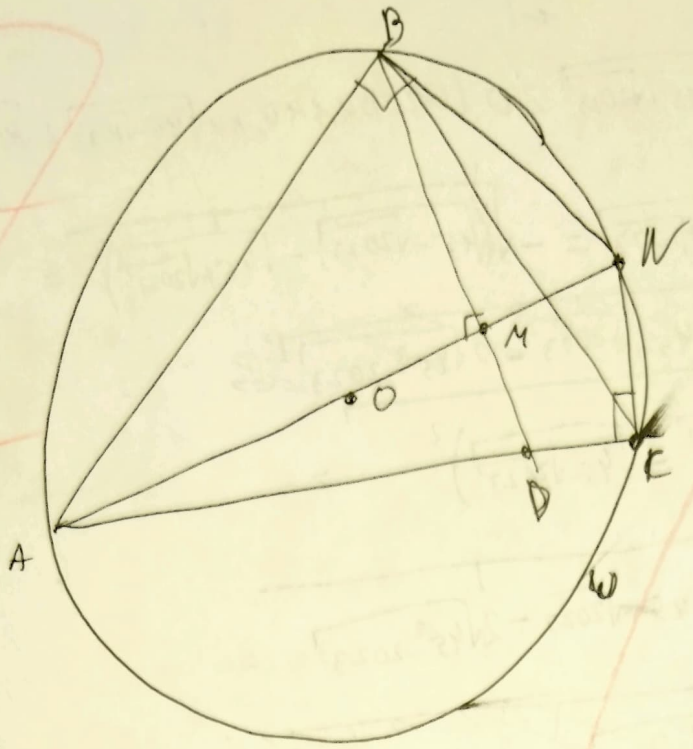
$81<\underbrace{90-2\sqrt{2}<100}_{\text{очевидно}} \Rightarrow -\sqrt{81}>-\sqrt{90-2\sqrt{2}}>-\sqrt{100}$

$-9>-\sqrt{90-2\sqrt{2}}>-10$

$81<90-2\sqrt{2}$ т.к. $2\sqrt{2}<9$ т.к. $8<81$

Ответ: -10. т.к. $\left[-\sqrt{90-2\sqrt{2}}\right]=10$ т.к.

Чистовик



W - опис. окр-ть $\triangle ABC$, $AO \cap W = N$

$BD \cap AO = M$.

$\angle ABN = \angle ACN = 90°$ (опир на диаметр AN)

$\begin{cases} \angle NCA = \angle NCD = 90° \\ \angle NMD = 90° \text{ (из усл.)} \end{cases} \Rightarrow DMNC$ - вписанный т.к. $\angle M + \angle C = 180°$

Тогда степень точки A: $CA \cdot DA = NA \cdot AM$

$\triangle ABN$ - прямоуг-ый, BM - высота из прям-го угла $\Rightarrow$

$AB^2 = AN \cdot AM$, но $NA \cdot AM = CA \cdot DA \Rightarrow AB^2 = CA \cdot DA$.

$$DA = \frac{AB^2}{CA} = \frac{84^2}{98} = \frac{7^2 \cdot 6^2 \cdot 2^2}{2 \cdot 7 \cdot 7} = 6^2 \cdot 2 = 36 \cdot 2 = 72$$

$$DC = AC - AD = 98 - 72 = 26$$

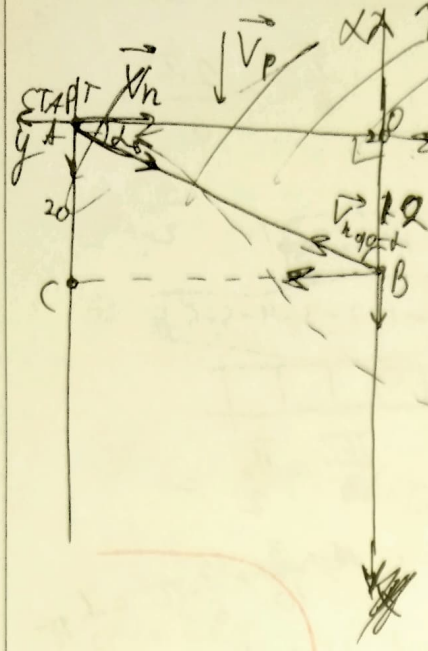
Ответ: $DC = 26$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

79-93-16-14
(85.12)

ЧИСТОВИК

ЧЕРНОВИК



№4

V_p – скорость теч реки

V_n – скорость теч реки

l – ширина реки

В начале пловец пришел из A в B, сместившись на 12 м. => т.к. V_p и V_n перпенд-ны => $tg\,\alpha = \frac{12}{l} = \frac{V_p}{V_n}$

Из B → C:

по оси OX: $V_n \cdot \cos(90-\alpha)$

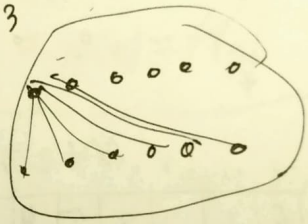
$V_p - V_n \cdot \cos(90-\alpha) = V_p - V_n \sin\alpha$

Oy: $V_p \cdot \cos 90 + V_n \cdot \cos x$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

tg

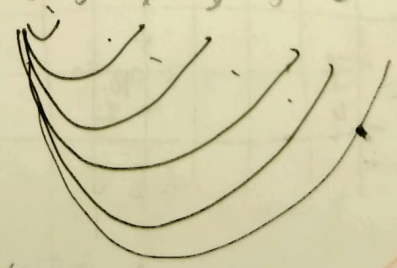
2023



4 + 2 = 6

+K

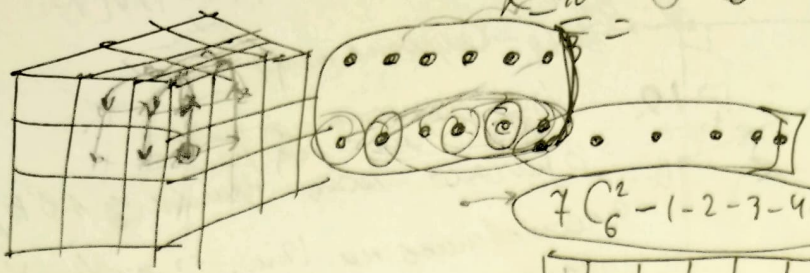
5	1	2	6	3	4
6	5	4	3	3	6



5 + 30 +

ЧЕРНОВИК.

36. C_{36}



$x - \frac{\pi}{3} =$ $\frac{5}{6}\pi - \frac{2\pi}{6}$

$\frac{\pi}{2}$

$7C_6^2 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6$

$1234\sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \le 1234$

$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} =$

$f(x) = 1234\sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \le 2023 = a+b$

$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{12}\pi$

n в в n в в n в

2019 2020 2021 2022 2023

$-b \le 789\cos(\ldots) \le b$

$-2a - b \le f(x) \le -b$

1234

$ax + 2by + 3cz + 4d$

π 4π

$a_1x_1 + 2a_2x_2 + \ldots +$

6!

612354

6	1	2	3	5	4
5					
		7	0	5	6
		6	8	6	
			1	9	6

98 | 7

$\frac{5}{6} \cdot x = \frac{1}{4}$

$x = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{12}\pi - \frac{\pi}{4} =$

$\frac{1-3}{12}\pi$

$\cos 0 = 1$

98

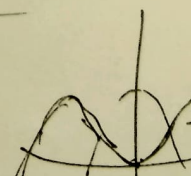
$\sin 0 = 0$

$\sin$ $\sin 90 =$

$\times\begin{array}{r}98\\7\\\hline 686\end{array}$

$ax = \frac{\pi}{4}$

$\cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$



$\begin{array}{r}84\\+84\\\hline 336\\672\\\hline 7056\end{array}$

79-93-16-14
(85.12)

Листовик.

$f(x) = 1234\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - 2023$

$g(x) = 789\cos^{23}\left(ax-\frac{\pi}{4}\right)$

т.к. $-1 \le \sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \le 1$ $\quad -1 \le \cos^{23}\left(ax-\frac{\pi}{3}\right) \le 1$

~~$-789 \le f(x) \le$~~

$a = 1234$

$b = 789$

$a+b = 2023$

$f(x) = a\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - a - b$ $\quad -2a-b \le f(x) \le -b$

$g(x) = b\cos^{23}\left(ax-\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad -b \le g(x) \le b.$

Нас интер-ет ур-е $g(x) = f(x)$

но т.к. $g(x) = f(x)$ когда $\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\cos^{23}\left(ax-\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\begin{cases} x-\frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{2} \\ ax-\frac{\pi}{4} = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \\ ax = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ (в пром-ке от $[-\pi;\pi]$)

Если $x = \frac{5\pi}{6}$

$ax = a\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Если $x = -\frac{\pi}{6}$: $ax = -a\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$ $\quad a = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

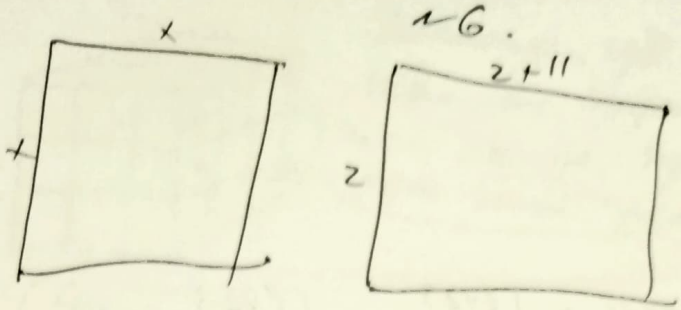
$|0{,}3| < \left|-\frac{3}{2}\right| \Rightarrow$

Ответ: $a = 0{,}3$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Листовик.

№6.



Одна из комнат - квадратная, в нее можно уложить x плиток в длину и в ширину. Другая прям-на, в нее можно уложить z в длину, z+11 - в ширину.

Из условия про 15 разб-х плиток

$x^2 - 15 = z(z+11)$

$4x^2 - 60 = 4z^2 + 44z$

$4x^2 - 60 = (2z+11)^2 - 121$

$61 = (2z+11)^2 - 4x^2$, $2z+11 = y$

$61 = y^2 - 4x^2$

$(y-2x)(y+2x) = 61$ (61 - простое)

тогда

$y - 2x = 1$

$y + 2x = 61 \Rightarrow 2y = 62$

$\boxed{y = 31 \Rightarrow x = 15}$

$y = 2z+11 \Rightarrow z = \frac{y-11}{2} = 10$

$x = 15$, $z = 10$, проверяем: $15^2 - 15 = 10(10+11)$

$15 \cdot 14 = 10 \cdot 21$ (верно!!!)

Ответ: изначально было $15^2 = 225$ плиток.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

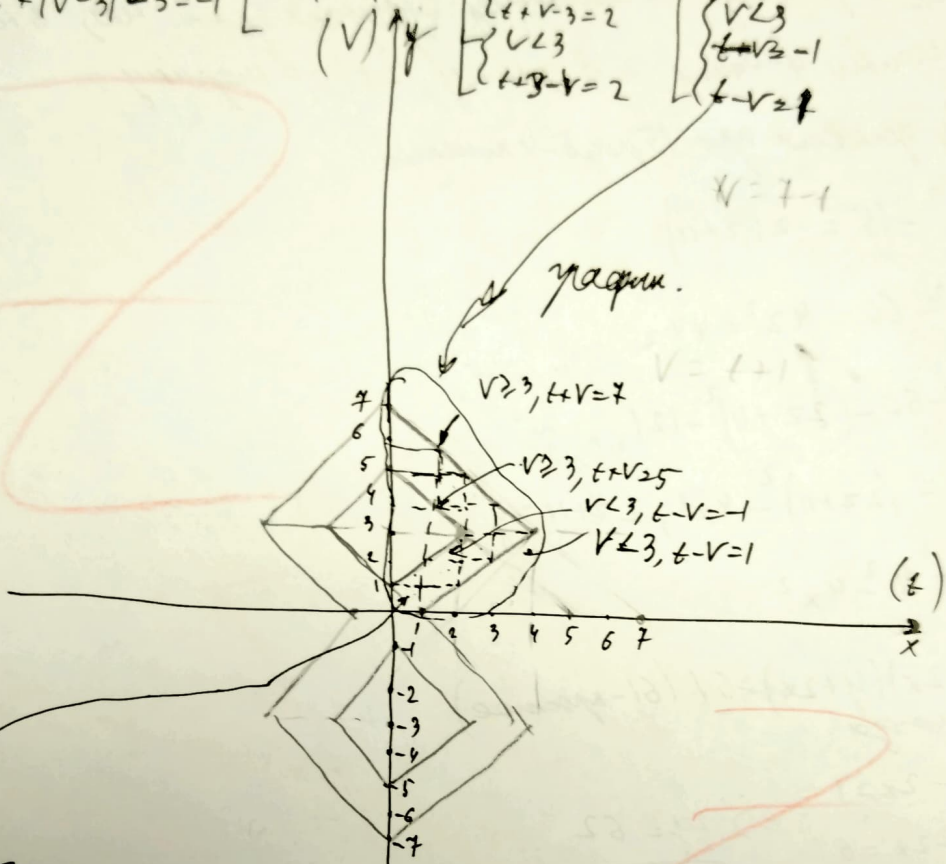
№5.

$||x|+||y|-3|-3|=1$

$t=|x|$ $\quad t, v \geq 0$
$v=|y|$

$|t+|v-3|-3|=1$

$$\left[\begin{array}{l} t+|v-3|-3=1 \\ t+|v-3|-3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+|v-3|=4 \\ t+|v-3|=2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v\geq 3 \\ t+v-3=4 \end{cases} \\ \begin{cases} v<3 \\ t+3-v=4 \end{cases} \\ \begin{cases} v\geq 3 \\ t+v-3=2 \end{cases} \\ \begin{cases} v<3 \\ t+3-v=2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v\geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} t+v=7 \\ t+v=5 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} v<3 \\ t-v=-1 \\ t-v=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

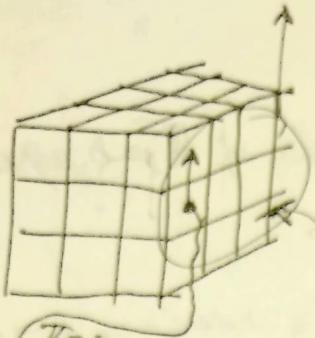


Вспомнив, что $t=|x|$, $v=|y|$, график очевидно симметрично достраив-ся ~~при~~ в других четв-тях (кроме $x, y \geq 0$)
~~Пл~~ Площадь фигуры равна $4S_{\text{фигуры при } x,y\geq 0}$, которая равна
$6+5{,}5=S=11{,}5$

$4S=23\cdot 2=46$. Ответ: 46.

Площадь считается очевидно, ти в фигуру входят только квадраты и ~~пр~~ Δки в виде $\frac{1}{2}$ кв-та ( )

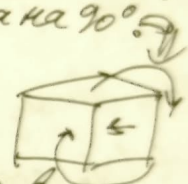
№7.



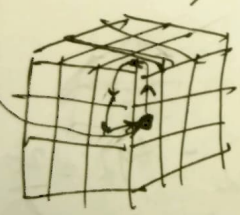
Рассмотрим куб. Т.к. все грани одинаковые, то будем считать, что через 2023 сек-ды жучок оказ-ся на вот этой грани.

Поймем, что ~~при~~ после нечетных секунд жучок не меняет свое напр-е, а после отных - меняет. Тогда ~~ж~~ если мы знаем, ~~ж~~ как сходил жучок в 2023 секунду, то мы знаем все пред-идущие ходы жучка ~~ж~~ ~~Предположим, что он~~ Будем ходить жучком „Назад", ~~то есть~~ то есть восстан-ть путь по которому он шел.

Пусть он в I ходу идет по вот этой грани вверх из любой из 9 клеток. Мы так можем сделать т.к. все грани один-вы, а напр-я разл-ся лишь пов-том кубика на 90°.

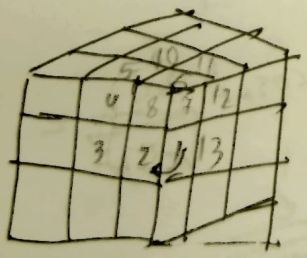


~~При~~ через 5 ходов он должен вернуться в исходную клетку. Несложно понять (перебор 9 осев случаев) что жучок стартовал с клетки



~~Теперь поймем, ж~~

Теперь будем двигать жучка „Вперед" т.е. не по обр-ным правилам, а по нормальным.



Он стартует из кл-ки 1 и сразу поворачет на право. Тогда он будет идти.

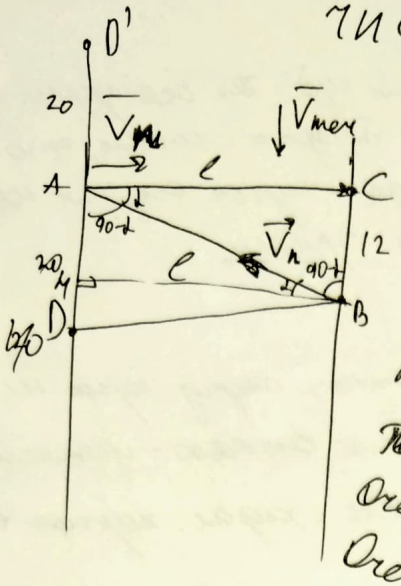
1→2→3→4→5→6→7→8→4→5→10→11→12→7→8→6→11→12→13→1 ХРА.

Потреб-лось 19 ходов

Ответ через 19 секунд.

ЧИСТОВИК

№4



Пусть пловец из A → B добрался, хотел в C.

Затем пловец плывя из B → A доплыл из B → D, причем CB = 12

Полож-е точки D таково, что AD = 20

Очев-но, расп-е точки D.

Очев-но из за напр-я теч-я, что точка D' точкой, в кот-ю приплыл пловец быть не может.

$\angle AB = \alpha$, $BH \perp AD$, $H \in AD$, $\Rightarrow \angle ABH = \alpha$, $\angle BAH = 90-\alpha$, $\angle CBA = 90-\alpha$

тогда при заплыве из A → B ~~Vn~~ т.к. $\vec{V}_n \perp \vec{V}_{теч} \Rightarrow$

$$\cancel{\frac{V_n}{V_{теч}}} \quad \frac{V_{теч}}{V_n} = \frac{12}{l} = tg\alpha$$

При движ-ии из B → A: $AD = t\left(V_{теч} - V_n \cdot \cos(90-\alpha)\right)$

$$l = t\left(V_n \cdot \cos\alpha\right)$$

$$\frac{AD}{l} = \frac{20}{l} = \frac{V_{теч} - V_n \sin\alpha}{V_n \cos\alpha} = \frac{V_{теч}}{V_n \cos\alpha} - tg\alpha = \frac{20}{l}$$

$$\frac{12}{l\cos\alpha} - \frac{12}{l} = \frac{20}{l}, \text{ т.к. } \cos\alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{AC}{\sqrt{AC^2+BC^2}} = \frac{l}{\sqrt{l^2+144}}$$

$$\frac{12\sqrt{l^2+144}}{l^2} - \frac{12}{l} = \frac{20}{l}$$

$$12\sqrt{l^2+144} = \cancel{8}\,32l \Rightarrow 3\sqrt{l^2+144} = 8l \Rightarrow 9l^2 + 9\cdot 144 = 64l^2$$

$$\cancel{12l^2 + 12^3 = 64l^2}$$

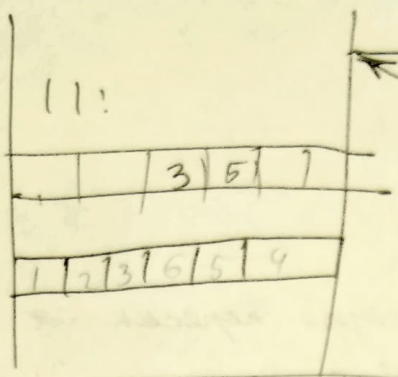
$$\cancel{12^3 = 52l^2 \quad l = \sqrt{\frac{12^3}{52}} = \sqrt{\frac{432}{13}} \quad \text{Ответ: } \sqrt{\frac{432}{13}}\ м}$$

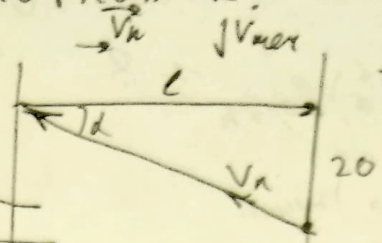
$$l = \sqrt{\frac{9\cdot 144}{55}}\ м$$

Ответ: $\sqrt{\frac{9\cdot 144}{55}}\ м = \sqrt{\frac{1296}{55}}\ м$

ЧЕРНОВИК.

$x_i =$





$t_1 V_n = l$

$t_1 V_{меч} = 20$

$\cancel{\frac{V_n}{V_{меч}} = \frac{l}{20}}$

$\frac{V_{меч}}{V_n} = \frac{20}{l}$

$\boxed{a_1x_1 + 2a_2x_2 + 3a_3x_3 + 4a_4x_4 + 5a_5x_5}$

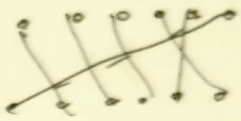
$t(V_{меч} - V_n \sin\alpha) = 20$

$t V_{пл} \cos\alpha = l$

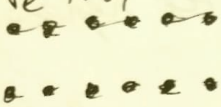
$\frac{12}{\sqrt{l^2+144}} = 32l$

$\frac{12^3}{52} = \frac{2^6 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 13} = \frac{2^4 \cdot 3^3}{13}$

$52 = 2^2 \cdot 13$

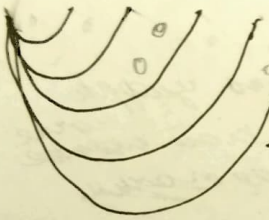


$3 = 8l\sqrt{l^2+144}$



$16 \cdot 27$
$\times 16$
162
27
432

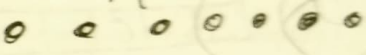
$-1-2-3-4-5$
$+2+3+5+4$
$-3-5+4$
$-5-4$
$+4$



$12\sqrt{l^2+144} = 32l$

$3\sqrt{l^2+144} = 8l$

55



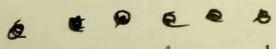
$9l^2 + 9 \cdot 144 = 64l^2$

$\times 12$ 612354

$\frac{9 \cdot 144}{55} = l^2$

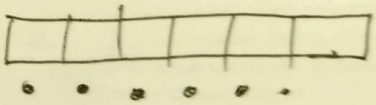
$6\sqrt{l^2+144} =$

$6-1-2-3-4-5+$
$+1-$



1 2 1

$144 \times 9 = 1296$



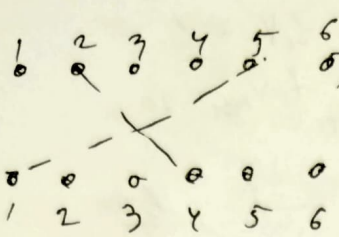
$\cos^2$

$1234\left(\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \cos^{23}\left(ax-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 23\cos^{23}\left(ax-\frac{\pi}{4}\right)$

$a\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - a - 6 = 6\cos^{23}\left(ax-\frac{\pi}{4}\right)$

ЛИСТОВИК.

№ 8.



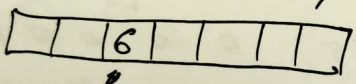
Непрудно заметить, что 2 отрезка пересек-ся тогда и только тогда, когда в 2 парах $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ где x_1, x_2 $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \{1, \dots, 6\}$, нижние от точки т. е в нижнем ряду.

А y_i – точки в верхнем ряду.

при $x_1 < x_2$: Если $y_1 < y_2$ не пересек-ся

Если $y_1 > y_2$ – пересек-ся.

Тогда дост-но в табице 1×6 расставить цифры от 1 до 6. Номер в клетке соотв-ет той точке с нож-рой сосд-на эта точка, индекс которой мы смотрим



т. е 3 из нижней сосд-на с 6 из верхней.

. . . . . .

. . . . . .

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!