0 453023 280001

45-30-23-28
(85.16)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Иванова Константина Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
45-30-23-28	100	15	15	15	15	15	10	15	0

45-30-23-28
(85.16)

Черновик 100 (сто)

Чистов

2023 | 17
14 | 289
62
-56
63
-63
0

×17
17
+119
17
289

1234
+789
2023

9,4
×9,4
376
+246
8836

$\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$

$\sqrt{45-17\sqrt{7}} - \sqrt{45+17\sqrt{7}}$

$\sqrt{(\sqrt{2025}-\sqrt{2023})(\sqrt{2025}+\sqrt{2023})} = \sqrt{2}$

$\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$

×45
45
225
+180
2025

0,32 > > 0,3

89,9 < < 90
9,4 < < 9,5

$\sqrt{45-\sqrt{2023}} < 1$

0 < < 0,1

0 < < 0,4

$\alpha \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} =$

−9,08 > > −9,2

×44
44
176
+176
1936

44,9
×44,9
4041
+1796
1796
2016,01

$\sqrt{0,1}$

0,32 > > 0

0,32
×0,32
64
+96
0,1024

$\sqrt{89,9}$

9,5
×9,5
475
+855
90,25

$\alpha\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$

9,5 > > 9,4

−9,4 > > −9,5

−9,08 > > −9,5

$\alpha \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$

$10\alpha\pi - 3\pi = 12\pi + 24\pi n$

$\alpha = 1,5 + 2,4n$

$\alpha = 1,9$; $-0,9$

$\alpha \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$

$2\alpha - 3 = 12 + 24n$

$\alpha = 7,5 + 12n$

$\alpha = -4,5$

Черновик

$y \geq 3$

$|x+y-3-3| = 1$

$x+y=7$

$x=7-y$

$x+y-6=-1$

$x+y=5$

$x=5-y$

$y<3$

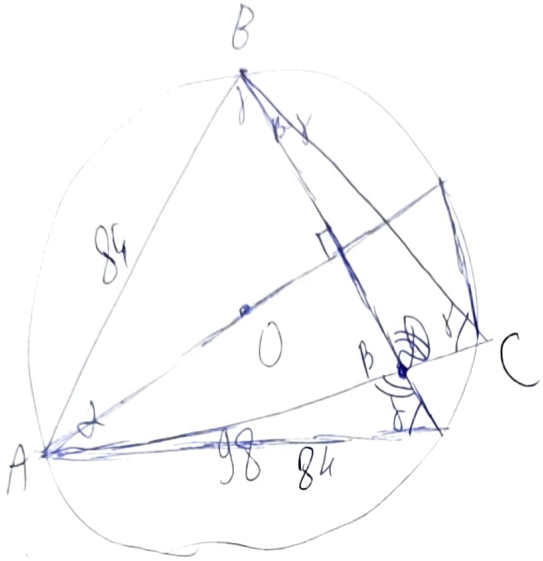
$|x-y|=1$

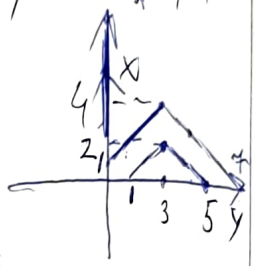
$x-y=1$

$x=y+1$

$x-y=-1$

$x=y-1$

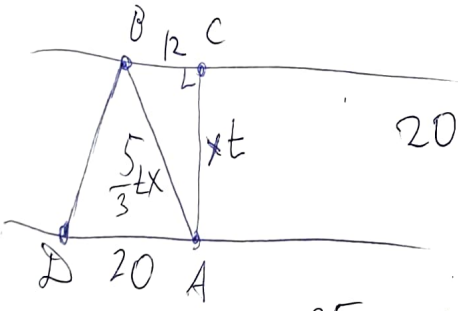




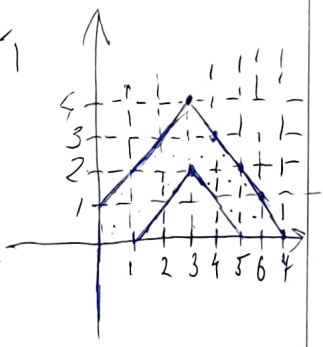
$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{84 \cdot 84}{98} = 72$

$AD = 7,2$



$20 : \frac{12}{t} = \frac{5}{3}t$



$11,5 \cdot 4 = 46$

$\left(\frac{25}{9} - 1\right) t^2 x^2 = 12^2$

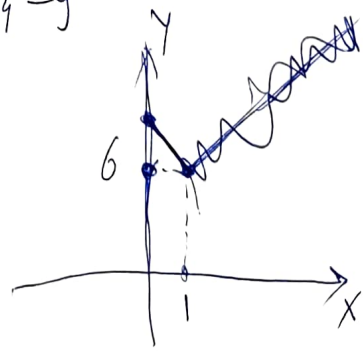
$tx = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9$

$|x + |y-3| - 3| = 1$

$y > 6$

$x+y-6=1$

$x=7-y$



45-30-23-28
(85.16)

Чистовик

№1

$45 > \sqrt{2023} > 44,9$; т.к. $\sqrt{2025} > \sqrt{2023} > \sqrt{2016,01}$

$0,1 > 45 - \sqrt{2023} > 0$ $\quad$ $90 > 45 + \sqrt{2023} > 89,9$

$\sqrt{0,1024} > \sqrt{0,1} > \sqrt{45 - \sqrt{2023}} > 0$

$0,32 > \sqrt{45 - \sqrt{2023}} > 0$

$\sqrt{90,25} > \sqrt{90} > \sqrt{45 + \sqrt{2023}} > \sqrt{89,9} > \sqrt{88,36}$

$9,5 > \sqrt{45 + \sqrt{2023}} > 9,4$

$-9,4 > -\sqrt{45 + \sqrt{2023}} > -9,5$

$+ \quad 0,32 > \sqrt{45 - \sqrt{2023}} > 0$

$-9,08 > \sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}} > -9,5$

Наибольшее целое число не превосходящее наше выражение это -10, т.к.

$-9 > -9,08$ и $-10 < -9,5$

Ответ: -10

№2

$1234 \sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \le 1234$, т.к. $\sin x \le 1$

$-789 \cos^{23}\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right) \le 789$, т.к. $-\cos x \le 1$

$1234 \sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 789 \cos^{23}\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right) \le 2023$, значит

$\sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ и $\cos^{23}\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$ $\quad$ $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ так как

$x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n - целое $\quad$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$,

$x \in [-\pi; \pi]$ $\quad$ $x = \frac{5\pi}{6}$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{6}$

Чистовик

№2 (продолжение)

$\cos^{23}(\alpha x - \frac{\pi}{4}) = -1$ $\cos(\alpha x - \frac{\pi}{4}) = -1$ $\alpha x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$

$\alpha x = 0{,}75\pi + 2\pi k$ k-целое Пусть $x = -\frac{\pi}{6}$, тогда

$-\frac{\alpha\pi}{6} = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k \quad | : \frac{\pi}{12}$ $-2\alpha = 15 + 24k$

$\alpha = -7{,}5 + 24k$ При $k \geq 1$ $|\alpha| > 16{,}5$

При $k \leq -1$ $|\alpha| > 31{,}5$ При $k = 0$ $|\alpha| = 7{,}5$,

Наименьший $|\alpha| = 7{,}5$

Пусть $x = \frac{5\pi}{6}$ $\frac{5\alpha\pi}{6} = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k \quad | : \frac{\pi}{12}$

$10\alpha = 15 + 24k$ $\alpha = 1{,}5 + 2{,}4k$ При $k \geq 0$ $|\alpha| \geq 1{,}5$

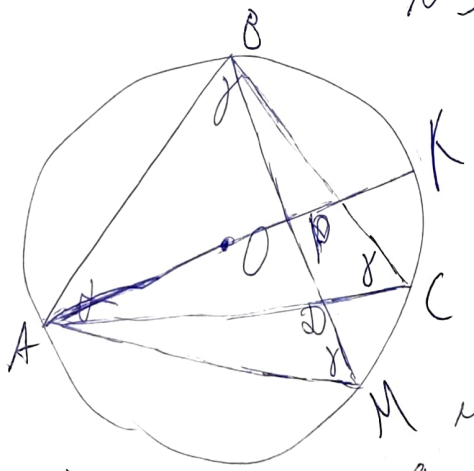
При $k \leq -2$ $|\alpha| \geq 3{,}3$ При $k = -1$ $|\alpha| = 0{,}9$

Наименьший $|\alpha| = 0{,}9$

$0{,}9 < 7{,}5$, значит $|\alpha| = 0{,}9$

Ответ: 0,9

№3



Пусть AK - диаметр

~~M - точка пересечения прямой BD и окружности~~

M - точка на окружности, такая, что

$\smile AB = \smile AM$, тогда $\smile BK = \smile KM$ $AB = AM$

$\smile BK = \smile KM \Rightarrow$ AK - биссектриса $\angle BAM$

$AB = AM \Rightarrow \triangle ABM$ - р/б Пусть P - точка

45-30-23-28
(85.16)

Чистовик

№3 продолжение

пересечения AK и BM, тогда AP - биссектриса р/б $\triangle ABM$, значит AP - высота $BM \perp AP$ $BM \perp AD$, значит точки B, M, D лежат на одной прямой, т.к. $BM \perp AD$ и $BD \perp AB$

Пусть $\angle ACB = \gamma$ тогда $\angle AMB = \gamma$, как вписанные опирающиеся на одну дугу $\triangle ABM$ - р/б $\Rightarrow \angle AMB = \angle ABD = \gamma$

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$

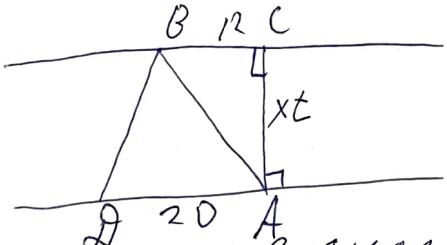
$\angle BAC$ - общий $\angle ABD = \gamma = \angle ACB \Rightarrow$

$\triangle ABD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ $AD = \frac{AB^2}{AC}$

$AD = \frac{84^2}{98} = \frac{12^2 \cdot 7^2}{2 \cdot 7} = 72$ $CD = AC - AD = 98 - 72 = 26$

Ответ: 26

№4



Пусть A - точка старта пловца C - точка, в которую он хотел приплыть в 1 раз, в точка, в которую он приплыл в 1 раз, A - точка, в которую он хотел приплыть во 2 раз, D - точка, в которую он приплыл, тогда $BC = 12$ $AD = 20$. Пусть x - скорость пловца, t - время, которое он плыл в 1 раз, тогда $AC = xt$. Скорость течения равна $\frac{12}{t}$.

$20 : \frac{12}{t} - \frac{5}{3}t$ время, которое пловец плыл во 2 раз (течение его сносило столько же по времени, сколько он плыл)

$AB = x \cdot \frac{5}{3}t = \frac{5}{3}tx$ по т. Пифагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$

$12 = \sqrt{\frac{5^2}{3^2}t^2x^2 - t^2x^2}$ $12 = \frac{4}{3}tx$ $tx = 9 = AC$ – ширина реки. Ответ: 9

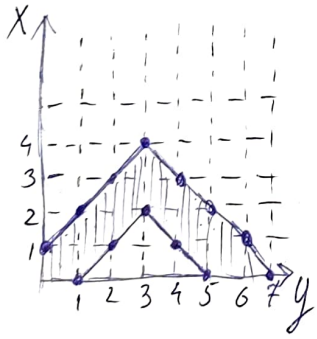
Чистовик

№5

Заметим, что эта симметрична относительно осей координат, т.к. x и y стоят с модулем. Поэтому площади частей фигуры во всех четвертях равны. Найдём площадь фигуры в I четверти.

$x \geq 0$ $y \geq 0$

$|x + |y-3| - 3| = 1$



Пусть $y \geq 3$ $|x+y-6| = 1$

Пусть $x+y \geq 6$ $x+y-6 = 1$

$x+y = 7 > 6$ $x = 7-y$

y	3	7
x	4	0

Пусть $x+y < 6$ $x+y-6 = -1$

$x+y = 5 < 6$

$x = 5-y$

y	3	5
x	2	0

Пусть $y < 3$ $|x-y| = 1$ Пусть $x-y > 0$ $x-y = 1 > 0$

$x = y+1$

y	0	3
x	1	4

– точка стыка

Пусть $x-y < 0$ $x-y = -1 < 0$ $x = y-1$

y	1	3
x	0	2

– точка стыка

Площадь этой части фигуры равна 11,5, значит площадь всей фигуры равна $11{,}5 \cdot 4 = 46$

Ответ: 46

Черновик

$a^2 - 15 = b(b+11)$

-2

$\times\begin{array}{r}5{,}5\\5{,}5\\\hline 275\\+275\\\hline 30{,}25\end{array}$

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12

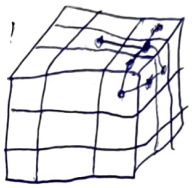
0; 1; 4; 9; 3; 12; 10

12; 2; 7; 1; 10; 8

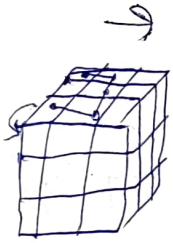
1: 27 2: 41 3: 57 4: 75 5: 105 6:

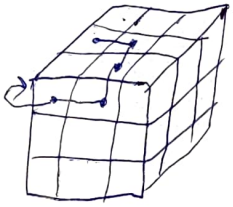
$a^2 + 15{,}25 = (b+5{,}5)^2$

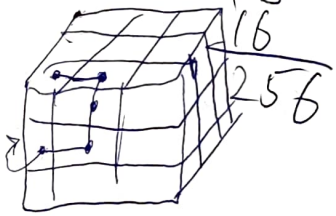
$a^2 + 15{,}25 > a^2 + 2a + 1$

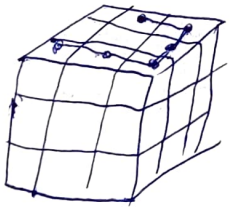


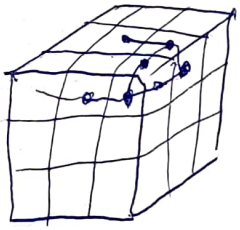
$\times\begin{array}{r}16\\16\\\hline 96\\+16\\\hline 256\end{array}$

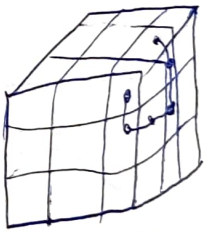












2018

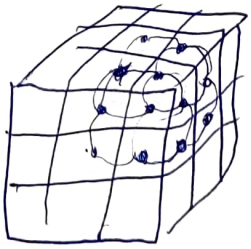
2019

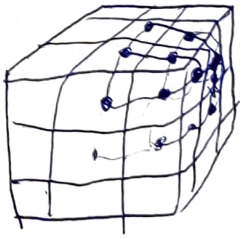
2020

2021

2022

2023

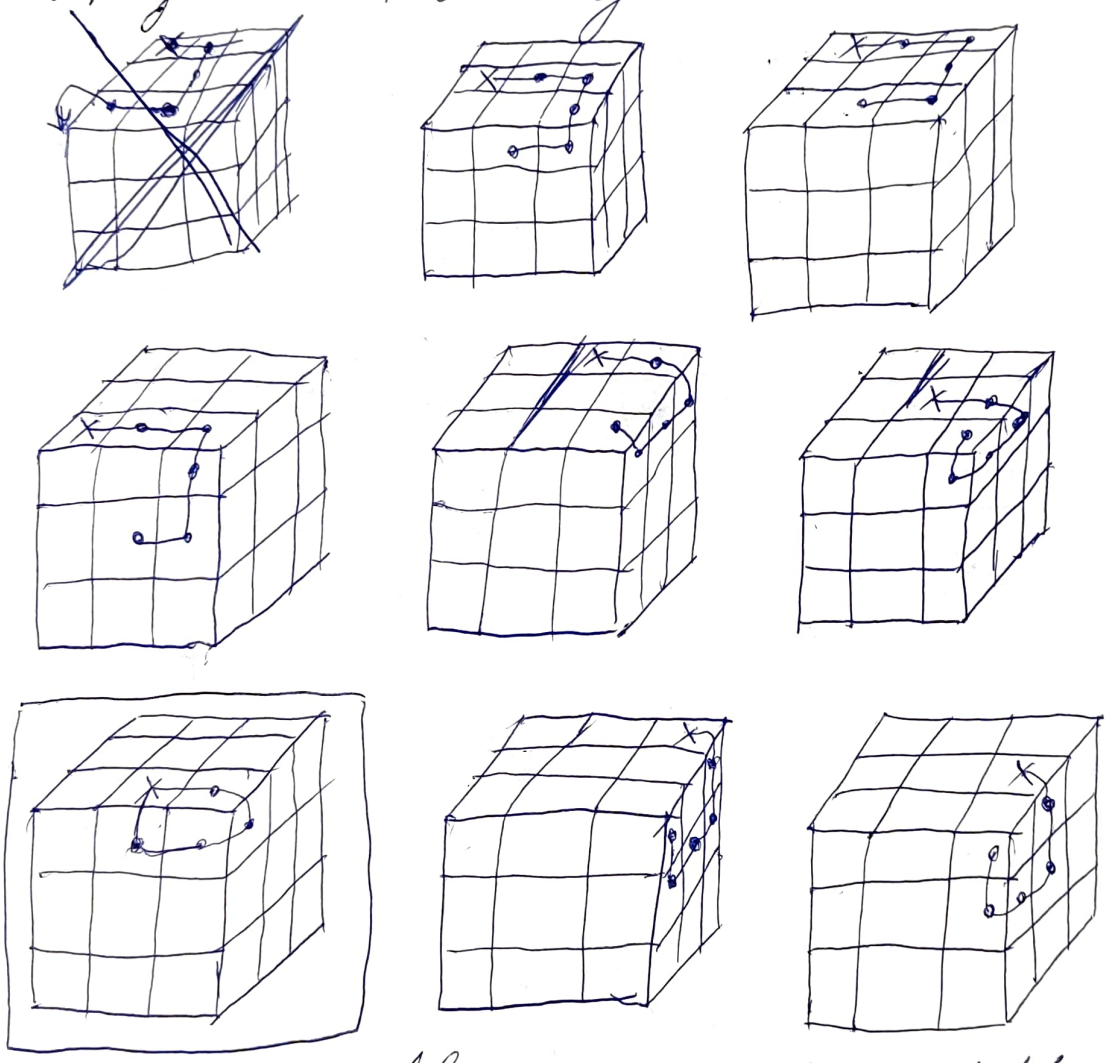


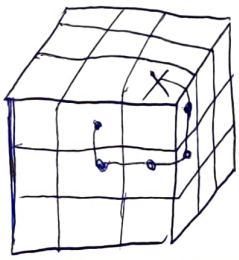


Чистовик

№7

Посмотрим на 2019 ход. Пусть Жучок находится на верхней грани и идёт направо. Посмотрим в каких случаях он придёт в ту же клетку

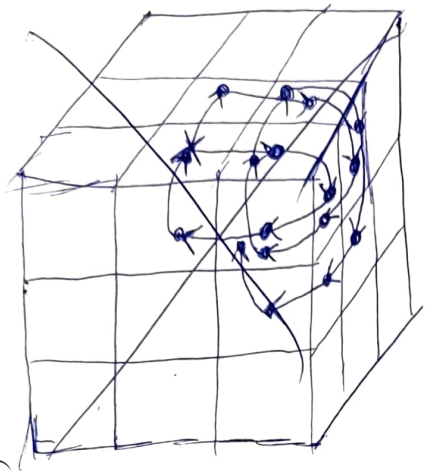


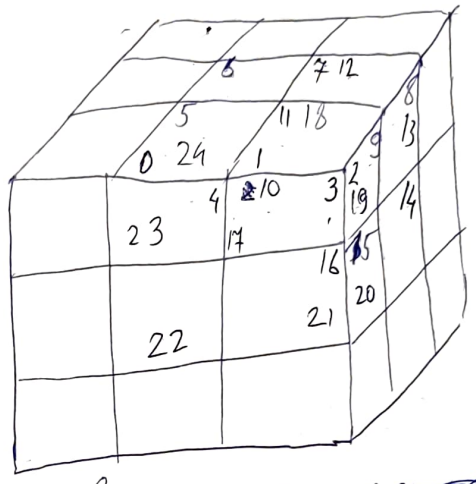


Нам подходит один вариант. Посмотрим, когда жучок окажется в этой клетке в следующий раз

Чистовик

№7 (продолжение)





Пронумеруем клетки в порядке обхода, считая первую клетку 0. На 24 ходу мы снова пришли в эту клетку т.е. через 24 секунды. Мы пришли туда через 19 секунд после 2023.

Ответ: 19

№6

Пусть a – сторона квадратной комнаты; b – меньшая сторона прямоугольной комнаты, тогда

$$a^2 - 15 = b(b+11)$$

$$a^2 + 15{,}25 = b^2 + 11b + 30{,}25 = (b+5{,}5)^2$$

Заметим, что $(b+5{,}5)^2 > a^2$,

Чистовик

№6 (продолжение)

Если $(b+5{,}5)^2<(a+1)^2$, то

$a<b+5{,}5<a+1$ $a<(b+5)+0{,}5<a+1$

$b+5=a$, т.к. a и b - натуральные

$a^2-15=a^2+11a$ $11a=-15$ - невозможно

Значит $(b+5{,}5)^2>(a+1)^2$

$a^2+15{,}25>(a+1)^2$ $15{,}25>2a+1$

$14{,}25>2a$ $7{,}125>a$ $a\le 7$. Пусть

$a=7$, тогда $b^2-11b=7^2-15=34$

$b^2-11b-34=0$ $D=b^2-4ac=121+136=257$ - не квадрат, значит

Пусть $a=6$, тогда $b^2-11b=36-15=21$

$D=b^2-4ac=121+84=205$ - не квадрат

$a=5$ $b^2-11b=25-15=10$ $b^2-11b-10=0$

$D=121+40=161$ - не квадрат

$a=4$ $b^2-11b=16-15=1$ $b^2-11b-1=0$

$D=121+1=122$ - не квадрат

$a=3$ $b^2-11b-7=0$ $D=121-28=93$ - не квадрат