0 110056 620005

11-00-56-62
(89.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Лисицына Дмитрия Максимовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
11-00-56-62	75	10	10	15	15	15	10	0	0
	75	10	10	15	15	15	10	0	0

75
(семьдесят пять)

Чистовик

Задача 2.

$$1234 \sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - 789 \cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right) = 2023$$

Заметим, что $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \in [-1;1] \Rightarrow \sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \in [0;1]$

$\cos\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right) \in [-1;1] \Rightarrow \cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right) \in [-1;1]$

Так же заметим, что $1234 + 789 = 2023$

$$\begin{cases} 1234 \cdot \sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1234 & (\text{равенство} - \text{при } \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1) \\ -789 \cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right) \leqslant 789 & (\text{равенство} - \text{при } \cos\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$1234 \sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - 789 \cos^{23}\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right) \leqslant 2023 \Rightarrow$$

чтобы достигнуть случая равенства как в условии, нужно выполнить следующие условия:

$$\begin{cases} \left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right| = 1 \\ \cos\left(\alpha x+\frac{\pi}{3}\right) = -1 \\ x \in [-\pi;\pi] \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{5}{6}\pi \end{array}\right. \Rightarrow \text{рассмотрим 2 случая}$$

1. $x = \frac{\pi}{6} \rightarrow$

$\cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow$

$\alpha \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = 6 \cdot \left(1 + 2k - \frac{1}{3}\right)$

$\alpha = 4 + 12k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ минимальный $|\alpha| = 8$ (при $k=-1$)

(при больших k $|\alpha|$ возрастает, при меньших k $|\alpha|$ возрастает)

2. $x = -\frac{5}{6}\pi$

$-\frac{5\alpha}{6}\pi + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = -\frac{6}{5}\left(\frac{2}{3} + 2k\right) = -\frac{4}{5} - \frac{12}{5}k \Rightarrow$ ~~отсюда~~ $\alpha = -\frac{1}{5}(4+12k) \Rightarrow$

$\min|\alpha| = \frac{8}{5}$ (аналогично п.1) $\Rightarrow$

Ответ: $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$

Чистовик

Задача 1.

Пусть $x = \sqrt{45+\sqrt{2023}} - \sqrt{45-\sqrt{2023}}$ $(x>0) \rightarrow x = \sqrt{x^2}$

$x^2 = \left(45+\sqrt{2023} - 2\sqrt{(45+\sqrt{2023})(45-\sqrt{2023})} + 45 - \sqrt{2023}\right) =$

$= 90 + 2\sqrt{45^2 - 2023} = 90 + 2\sqrt{2025-2023} = 90 + 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{90+2\sqrt{2}}$

Пусть α – искомая $[x]$, тогда $\alpha \leq \sqrt{90+2\sqrt{2}} < \alpha+1$

$\alpha^2 \leq 90 + 2\sqrt{2} < (\alpha+1)^2$

$\alpha = 9 \rightarrow \alpha^2 = 81 < 90 + 2\sqrt{2}$ – верно

$(\alpha+1)^2 = 100 > 90 + 8 > 90 + \sqrt{8}$ – верно

Целая часть единственна, мы её нашли и доказали это

Ответ: 9

Задача 3.

$\log_5(|x^2-5|^3+1) + \sqrt{3x^4-7x^2+19} = \sqrt{2x^4+3x^2-6}$

$\log_5(|x^2-5|^3+1) = \sqrt{2x^4+3x^2-6} - \sqrt{3x^4-7x^2+19}$

Заметим, что ур-е симметрично относительно $x = -x$ $\rightarrow$ если x – корень, то и $-x$ – корень.

Так же заметим, что $|x^2-5|^3+1 \geq 1 \Rightarrow \log_5(|x^2-5|^3+1) \geq 0$

Теперь поймём, что происходит с корнями:

Пусть $a = 2x^4+3x^2-6$, $b = 3x^4-7x^2+19$

$a - b = -x^4+10x^2-25 = -(x^2-5)^2 \Rightarrow a - b \leq 0 \ \forall x \Rightarrow$ равенство при $x^2=5$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 0 \ \forall x \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a}-\sqrt{b} \leq 0 \\ \log_5(|x^2-5|^3+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \sqrt{a}-\sqrt{b} = 0 \longrightarrow x^2=5 \\ \log_5(|x^2-5|^3+1) = 0 \end{cases}$ $\log_5(1) = 0$ – верно $\Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Ответ: $\sqrt{5}; -\sqrt{5}$

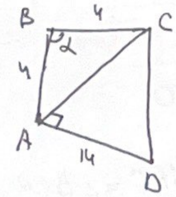
Задача 4. Чистовик.

2 варианта → стороны длины 4 граничат друг с другом или не граничат.

Не трудно понять, что площадь треугольника — $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$ максимальна при $\sin\alpha = 1 \to \alpha = 90^\circ \Rightarrow$ ~~ ~~

Среди треугольников со сторонами a b max S — у прямоугольного

Рассмотрим варианты:

1. 

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 16\cdot\sin\alpha = 8\sin\alpha$

$AC = 2\cdot 4\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 8\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ т.к. ABC – р.б.

$\angle CAD$ делаем прямым для максимизации S_{CAD} (т.к. 2 стороны уже есть) $\Rightarrow$

$$S = 8\sin\alpha + 8\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 14 = 8\sin\alpha + 56\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$S' = 8\cos\alpha + \frac{1}{2}\cdot 56\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 8\cos\alpha + 28\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$S \to max \Rightarrow S' = 0 \to 8\cos\alpha + 28\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$

$\frac{\alpha}{2} = x \to 8\cos 2x + 28\cos x = 0$

$8\cdot 2\cos^2 x + 28\cos x = 0$

$\cos x\left(16\cos x + 28\right) = 0 \Rightarrow$

$\cos x = 0$ $\quad \neq -16$ $\quad \to x = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ \Rightarrow$

функция $S(\alpha)$, $\alpha \in (0;180)$ не содержит экстремумов на этом интервале и определена на интервале $\Rightarrow$ ~~ ~~ стремится к max, но не достигает.

2. 

Аналогично $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACD$ – прямой.

$AC = \sqrt{4^2 + 14^2 - 2\cdot 4\cdot 14\cos\alpha}$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 14\cdot\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{14^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 14\cdot\cos\alpha} \to max$$

см. след лист

Чистовик.

Задача 4 (продолжение)

$S(\alpha) = 28\sin\alpha + 2\sqrt{16+196-112\cos\alpha} =$

$= 28\sin\alpha + 2\sqrt{212-112\cos\alpha}$

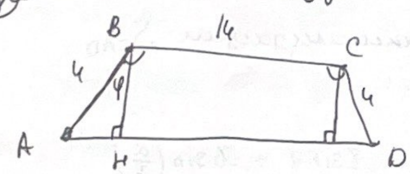
$S' = 28\cos\alpha + \dfrac{2\cdot 112\sin\alpha}{2\sqrt{212-112\cos\alpha}} = 0$

$28\cos\alpha + \dfrac{112\sin\alpha}{\sqrt{212-112\cos\alpha}} = 0$

$\dfrac{28\sqrt{212-112\cos\alpha}\,\cos\alpha + 112\sin\alpha}{\sqrt{212-112\cos\alpha}} = 0$

$\cos\alpha = x \Rightarrow \quad 28\sqrt{212-112x}\cdot x + 112\sqrt{1-x^2} = 0$

Не трудно понять, что $\angle ABC = \angle BCD$,



поскольку если мы максимизировали площадь относительно $\angle ABC$, то аналогичные рассуждение для $\angle BCD$ тоже должны максимизировать площадь. $\Rightarrow$ ABCD – р.б. трапеция, площадь которой максимальна

Опустим из B высоту BH, $\angle ABH = \varphi \Rightarrow S = 14\cdot 4\cos\varphi +$

$+ 4\cos\varphi\cdot 4\sin\varphi = 56\cos\varphi + 16\cos\varphi\sin\varphi = 56\cos\varphi + 8\cdot\sin 2\varphi$

$S' = -56\sin\varphi + 16\cdot\cos 2\varphi = 0$

$16\cos 2\varphi - 56\sin\varphi = 0$

$16(\underbrace{\cancel{\cos^2\varphi - 1}}_{1-2\sin^2\varphi}) - 56\sin\varphi = 0$

$-32\sin^2\varphi + 16 - 56\sin\varphi = 0 \rightarrow \sin\varphi = t$

$-32t^2 - 56t + 16 = 0$

$-4t^2 - 7t + 2 = 0 \rightarrow t_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{-8} = \left[\begin{array}{l} +\frac{1}{4} \\ -2 \end{array}\right. \Rightarrow \sin\varphi = +\frac{1}{4}$

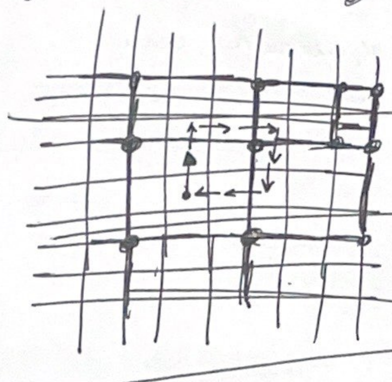
$\Rightarrow AD = 2AB\cdot\sin\varphi + 14 = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot 4 + 14 = 16$

Ответ: 16

11-00-56-62 (89.6)

~~Задача 7.~~ Чистовик

~~Заметим, что кубик можно интерпретировать как клетчатую плоскость, разбитую на классы эквивалентности — квадраты 3x3 — грани кубика. (поскольку у жука всегда есть и соседних квадратика)~~



~~Проследим его путь из произвольной начальной клетки: Пусть делает 2 шага вперёд, поворачивается и т.д. Получаем, что он ходит по циклу длины 8~~

Задача 6.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} \longrightarrow a_n = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} \cdot a_{n-1} =$$

$$= \frac{(n^2+1)n}{\cancel{(n-1)^2+1}} \cdot \frac{\cancel{((n-1)^2+1)} \cdot (n-1)}{\cancel{(n-2)^2+1}} \cdot \frac{((n-2)^2+1)(n-2)}{(n-3)^2+1} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{(4+1)} \cdot 2}{2} \cdot 13$$

$$= \frac{(n^2+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2}{2} \cdot 13 = \frac{(n^2+1) \cdot n!}{2} \cdot 13$$

$$a_{2022} = \frac{(2021^2+1) \cdot (2021)!}{2}$$

Сумма первых 2021 $- 13 + 13 \cdot \frac{2(4+1)}{2} + 13\,\frac{6\,(9+1)}{2} + \ldots + 13 \cdot \frac{(2021^2+1) \cdot 2021!}{2} =$

$$= \frac{13}{2}\left(1 + 2(4+1) + 6(9+1) + \ldots + (2020^2+1)(2020!) + (2021^2+1)\,2021!\right)$$

$$a_{2022} = \frac{(2022^2+1)\,2022!}{2} \cdot 13$$

$$\frac{a_{2022}}{\sum a_i} = \frac{(2022^2+1)\,2022!}{1 + 2!\,(4+1) + 3!\,(9+1) + \ldots + (2021^2+1) \cdot 2021!}$$

Чистовик.

Задача 8.

Пронумеруем точки:

в: 0 1 2 3 4 5 6

а: 0 1 2 3 4 5

Всего пар – 15 } – не пересек. 6
пересечений – 9 }

Каждый отрезок – пара точек – $(a; b)$

Отрезки не пересекаются если

$a_1 < a_2$ и $b_1 < b_2$ или наоборот

Чистовик.

Задача 5.

~~[illegible]~~ Докажем, что $S(2^n)+S(5^n)=S(10^n)$ по индукции

База индукции: $2\cdot 5=10$ – верно

$4\cdot 25=100$ – верно

Пусть утверждение верно для n, докажем, что оно верно и для $n+1$

$\cancel{S(2^{n+1})+S(5^{n+1})}$ $S(10^{n+1})=S(10^n)+1 \Rightarrow$ при переходе к $n+1$ сумма цифр в числе 10^{n+1} изменится не более, чем на 1

Пусть x, y – первые цифры 2^n и 5^n соответственно $\Rightarrow$

Пусть в 2^n m знаков $\Rightarrow$

$10\cdot 2^n > 2\cdot 2^n = 2^{n+1} \Rightarrow$

длина возрастёт не более чем на 1.

Аналогично для 5^n

$S(2^n)=m,\ S(5^n)=k \to m+k=n+1$ (по предположению индукции)

Предположим, что $S(2^{n+1})=m+1, S(5^{n+1})=k+1 \to$

$$\begin{cases} (2^{n+1}) > 10^{m+1} \\ (5^{n+1}) > 10^{k+1} \end{cases} \to 2^{n+1}\cdot 5^{n+1} > 10^{k+m+1+1} = 10^{n+1} \text{ – противоречие}$$

Предположим, что $S(2^{n+1})=m,\ S(5^{n+1})=k \Rightarrow$

$$\begin{matrix} 2^{n+1} < 10^{m+1} \\ 5^{n+1} < 10^{k+1} \end{matrix} \Rightarrow 2^{n+1}\cdot 5^{n+1} < 10^{m+k+1+1} = 10^{n+1} \text{ – противоречие}$$

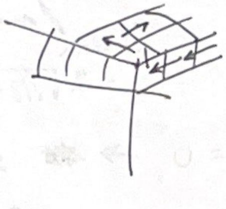
Таким образом, при переходе к $n+1$ $S(2^n)$ и $S(5^n)$ изменяются не более чем на 1, причём одновременно измениться они не могут по первому противоречию, и не могут остаться неизменными по второму противоречию $\Rightarrow$ на каждом шаге ровно одно из двух слагаемых в левой части возрастает на 1, правая часть возрастает на 1 $\Rightarrow$ верно индукция доказана

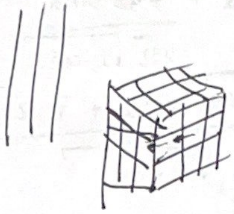
Ответ: 2022

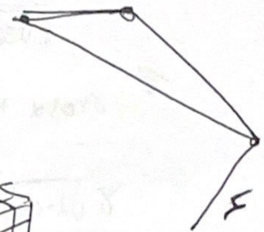
Черновик.

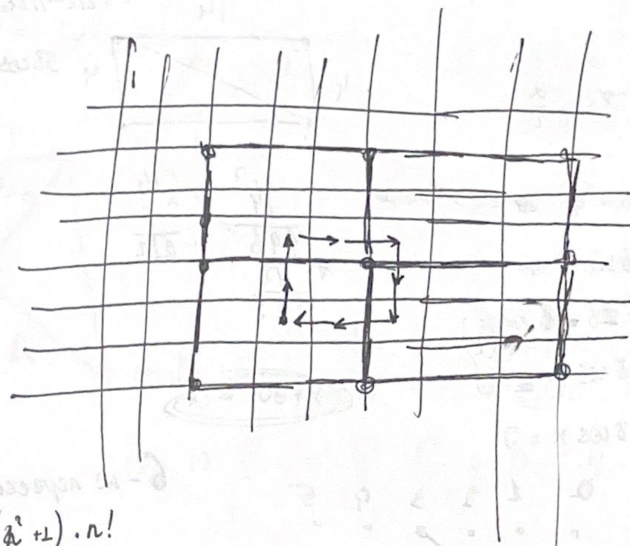
$$a_n = \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} \cdot \frac{((n-1)^2+1)(n-1)}{(n-2)^2+1} \cdot \frac{((n-2)^2+1)\cdot(n-2)}{(n-3)^2+1} \cdot \ldots$$

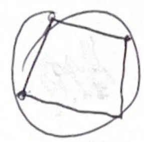
$$= \frac{(n^2+1)\,n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{2} \cdot 13$$











$$\Sigma x + \Sigma y = n+1$$

$$\frac{(n^2+1)\cdot n!}{2} \quad 13$$

$x = 2^n$

$y = 5^n$

$$\frac{(n^2+1)\cdot n! + ((n-1)^2+1)(n-1)! + ((n-2)^2+1)(n-2)! + \ldots}{}$$

$$n! + n^2\cdot n! + (n-1)!\cdot(n-1)^2 + (n-1)!$$

$$\frac{2^{2021}}{5^{2021}} \qquad \frac{2}{5} \qquad 10$$

$$1 \qquad \frac{16}{625} \quad 10000$$

$$\frac{4}{25} \quad 100 \qquad \frac{8}{125} \quad 1000$$

Черновик.

$S = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot 14\cdot\sqrt{32-32\cos\alpha}$

$8\sin\alpha + 7\sqrt{32-32\cos\alpha} \to max$

$8\cos\alpha + \frac{7\cdot 32\sin\alpha}{2\sqrt{32-32\cos\alpha}} = 0$

$\frac{1}{2}4\cdot 14\cdot\sin\alpha +$

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{4^2+14^2-2\cdot 4\cdot 14\cos\alpha}$

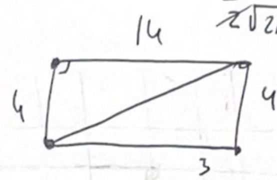
$8\cos\alpha + \frac{7\cdot 16\sin\alpha}{4\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha}} = 0$

$38\sin\alpha + 2\sqrt{212-112\cos\alpha} \nearrow max$

$\frac{8\sqrt{1-\cos\alpha}\cos\alpha + 7\cdot 2\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}} = 0 \to$

$38\cos\alpha + \frac{2\cdot 112\sin\alpha}{2\sqrt{212-112\cos\alpha}} = 0$

$8\sin\alpha$



$38\cos\alpha + 112\sin\alpha = 0$

$8\sin\frac{\alpha}{2}$

$8\sin\alpha + 8\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2 \nearrow max$

$8\sin\alpha + 16\sin\frac{\alpha}{2}$

$8\cos\alpha + \frac{1}{2}16\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$8\cos\alpha + 8\cos\frac{\alpha}{2} = 0$

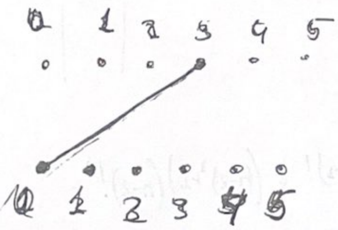
$8\cos 2x + 8\cos x = 0$

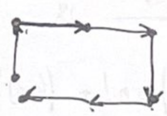
$14^2 = 196$, $196 + 16 = 212$

$14 \times 8 = 112$

$x + 90^\circ = 2x$

6 - не пересекаются?





$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

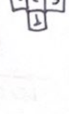
$1 - \cos^2 x$

8
64
512
4096
32768

$64 \times 8 = 512$

$4096 \times 8 = 32768$

$512 \times 8 = \ldots 6$



Черновик.

$\log_5(t) = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

$\log_5 t \uparrow$

$\sqrt{b} - \sqrt{a}$

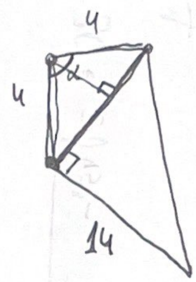
$\sqrt{2x^4+3x^2-6}' - \sqrt{3x^4-7x^2+19}' = \frac{8x^3+6x}{2\sqrt{2x^4+3x^2-6}} - \frac{12x^3-14x}{2\sqrt{3x^4-7x^2+19}}$

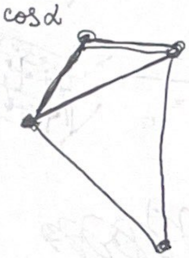
$3x^4-7x^2+19-2x^4-3x^2+6 = x^4-10x^2+25 = (x^2-5)^2$

$b-a<0$ $\frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot 14\cdot\sqrt{\ }$

$\frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1}$

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$





$\frac{n^3+n}{n^2-2n+1+1} =$

$\sum_{i=1}^{2021} = 13 + 13\cdot 5 + 13\cdot 5\cdot =$

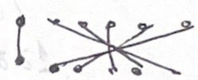
$= 13 + 13\cdot\frac{(2^2+1)\cdot 2}{(2-1)^2+1} + 13\cdot\frac{(2^2+1)\cdot 2}{(2-1)^2+1}\cdot\frac{(3^2+1)\cdot 3}{(3-1)^2+1} + \ldots$

$13 + 13\cdot\frac{10}{2} + 13\cdot\frac{10}{2}\cdot\frac{15}{5} + 13\cdot\frac{10}{2}\cdot\frac{15}{5}\cdot\frac{17\cdot 4}{10} =$

5 15

$\frac{68}{10}$

=



$C_5^2 = 10$

6 отрезков $\Rightarrow$ 15 возможных пар.

$S(2^n)$ — ?

9 пересекаются $\rightarrow$ 6 ~~не-пер~~

1
2
4
8
16
32
64
128
256
512

$\frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1}\cdot\frac{((n-1)^2+1)\cdot(n-1)}{(n-2)^2+1}$

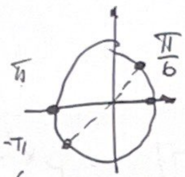
 Черновик

$\sqrt{45+\sqrt{2023}}-\sqrt{45-\sqrt{2023}}$

$$\begin{array}{r} 1234 \\ +\ 789 \\ \hline 2023 \end{array}$$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$



$\Big(45+\sqrt{2023}+45-\sqrt{2023}+$

$+2\sqrt{(45+\sqrt{2013}}$

$\left(\sqrt{45+\sqrt{2023}}-\sqrt{45-\sqrt{2023}}\right)\left(\sqrt{45+\sqrt{2023}}+\sqrt{45-\sqrt{2023}}\right)=$

$12x^3-14x=$

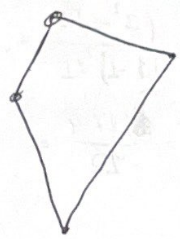
$=x(12x^2-14)$

$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\log_5\left(|x^2-5|^3+1\right)+\sqrt{3x^4-7x^2+19}=\sqrt{2x^4+3x^2-6}$

$3x^4-7x^2+19$

$90+2\sqrt{45^2}$



$$\begin{array}{r} 14 \\ 8 \\ \hline 112 \end{array}$$

2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024
2048
4096
8192

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 25 \\ \hline 405 \\ 162 \\ \hline 2025 \\ -2023 \end{array}$$

$\sqrt{5}\rightarrow$

$3\cdot25-35+19=$

$=75-35+19=59$

$2\cdot25+15-6=$

$65-6=59$

$=59$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$(\sqrt{x})'=x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\pm\sqrt{5}$ – решение.

$\left(\sqrt{2x^4+3x^2-6}-\sqrt{3x^4-7x^2+19}\right)'=$

$49+4\cdot4\cdot2=$

$=49+32=$

$=81$

$=\left(\frac{1}{2\sqrt{2x^4+3x^2-6}}\cdot 8x^3+6x-\frac{12x^3-14x}{2\sqrt{3x^4-7x^2+19}}\right)$