0 361177 470004

36-11-77-47
(85.17)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Малышева Глеба Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Вход. 13 34 - 12 40

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
36-11-77-47	75	+	0	+	+	+	+	0	—

36-11-77-47
(85.17)

$[\sqrt{45-\sqrt{2023}}$

$\sqrt{45-\sqrt{2023}} > 1$

$2023 \mid 7$, 289

181

$a^2 - a - \frac{335}{3}$

$a^2 + 11a = k^2$

$\sqrt{7 \cdot 17^2}$

$a^2 + 11a = k^2 - 15$

$(a-k)(a+k) = 9$

$[a - b]$

$a^2 + b^2 = 45$, $0 < a < 1$

$\sqrt{2023} = 2ab$

$0 < a < 1$

$9 < b < 10$

$121 + 4k^2 + 60$

$4k^2 + 181 = m^2$

$45 - \sqrt{45^2 - 2}$

$1 - \sqrt{89} < 9$

$0 < a < 1$

$\sqrt{45 - 17\sqrt{7}}$ — $\sqrt{45 + 17\sqrt{7}}$

$-b < 9$

$17\sqrt{7} = 2ab$

$(m-2k)(m+2k) = 181$

$m - 2k = 1$

$m + 2k = 181$

$2m = 182$

$m = 91$

$k = 45$

размер плитки

$x \cdot x$

$\Sigma S = k^2 x^2$

$k = 45$

$-b < a + 9$

$-10 < a - b < -8$

$0{,}99 - 9{,}01$

$b = \sqrt{7}$

$a = \frac{17}{2}$

$k^2 - 15$

$a^2 + b^2 - 2ab = 45 - 17\sqrt{7}$

$a(a+11) = 2010$

$a^2 + 11a - 2010 = 0$

$121 + 8040 = 8161$

$k \cdot x^2 = a$

$2ab = 17\sqrt{7}$

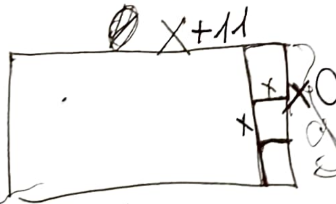
$90 - 34\sqrt{7}$

$a(a+11) = 2010$

$k = m^2$

k^2 кирпич.

7,5 (смыкает пол)



$x(x+11) = k^2 - 15$

$2ab = 34\sqrt{7}$

$ab = 17\sqrt{7}$

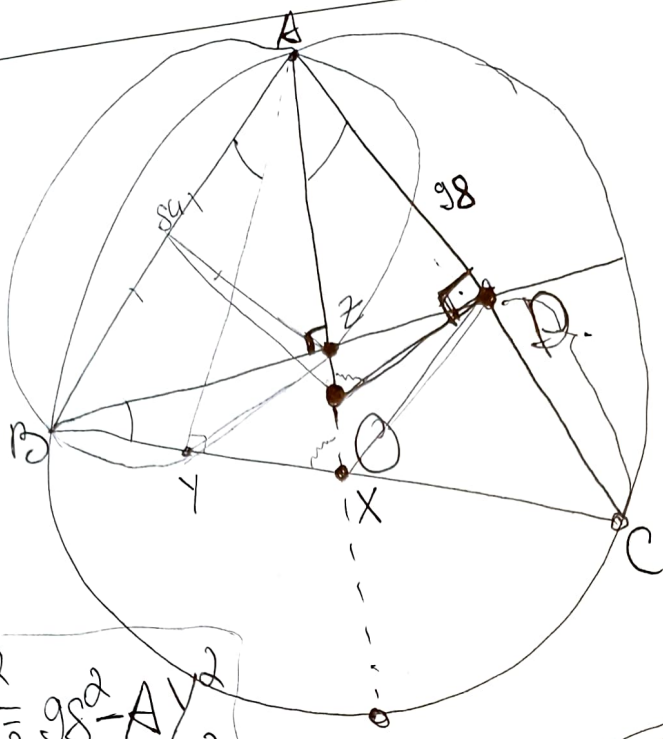
$45 - 18\sqrt{7}$

$< 45 - 17\sqrt{7} <$

$ax(ax + 11x) = x^2(k^2 - 15)$

$ax \cdot (a+11)x = k^2x^2 - 15x^2$

$a(a+11) = k^2 - 15$



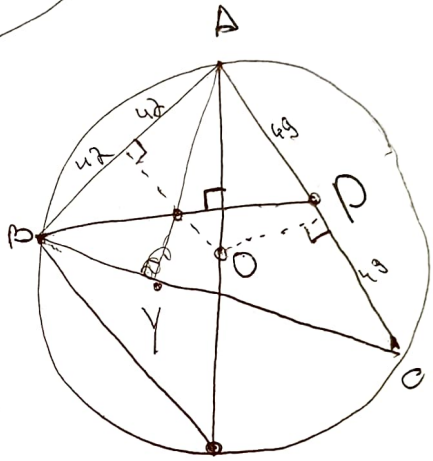
$CD \cdot CA = CX \cdot CB$

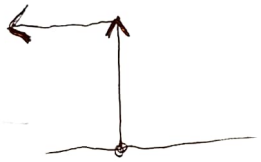
$XY \cdot XB = XZ \cdot XA$

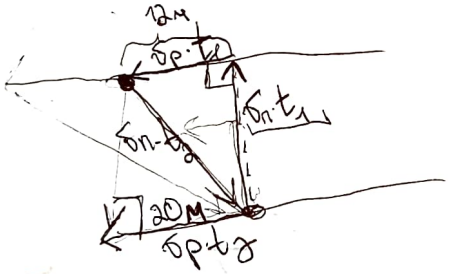
$CD = \frac{CX \cdot CB}{98}$

$CY^2 = 98^2 - AY^2$

$BY^2 = 84^2 - AY^2$

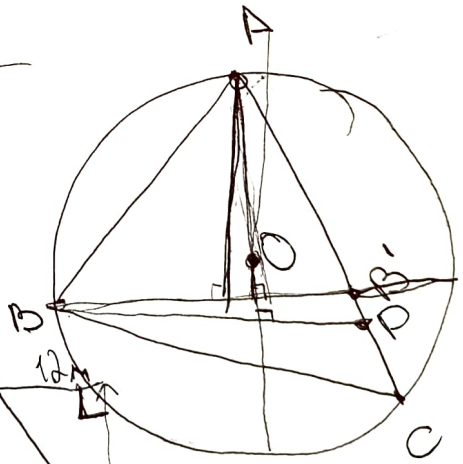


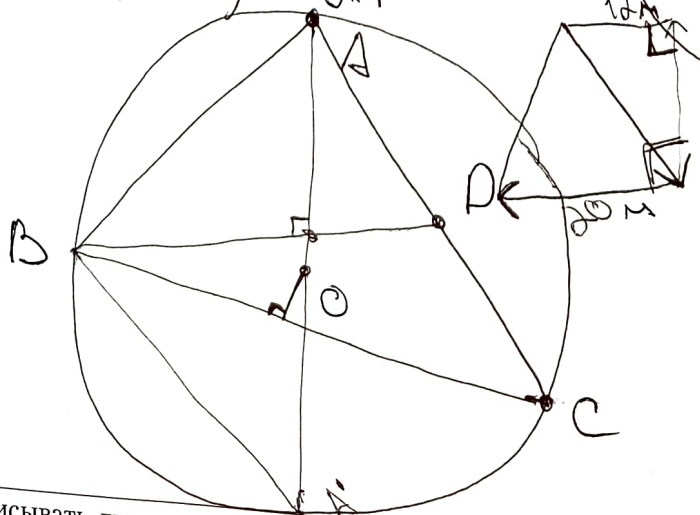


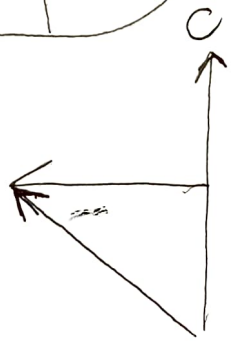


$(v_п \cdot t_2)^2 = (20_м)^2 + h^2$

$(v_п \cdot t_2)^2 = 12м$







Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$k \cdot x^2 = a^2 \Rightarrow k = m^2$ — x^2 площадь фигурки

$m^2 \cdot x^2 - 15 \cdot x^2 = ax \cdot (a+11) \cdot x$

$m^2 - 15 = a(a+11)$

$a^2 + 11a - (m^2 - 15) = 0$

$D = 121 + 4m^2 - 60 = 4m^2 + 61$

$4m^2 + 61 = n^2 \Rightarrow 61 = (n-2m)(n+2m)$

$\sqrt{45 - 14\sqrt{7}} - \sqrt{45 + 14\sqrt{7}}$

$n - 2m = 1$

$n + 2m = 61$

$n = 31, m = 15$

$2 \cdot 10 = a^2 + 11a$

$D = 121 + 840 = 961$

$a = 10, a + 11 =$

$a = \frac{-11 \pm \sqrt{961}}{2}$

$\frac{\sqrt{961} - 11}{2} = 10$

$\frac{-11 \pm 31}{2}$

$a^2 - 2 = t$, $\left(a^2 - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}$

$a = 10$, $a - \sqrt{\left(a - \frac{2}{a}\right)a}$

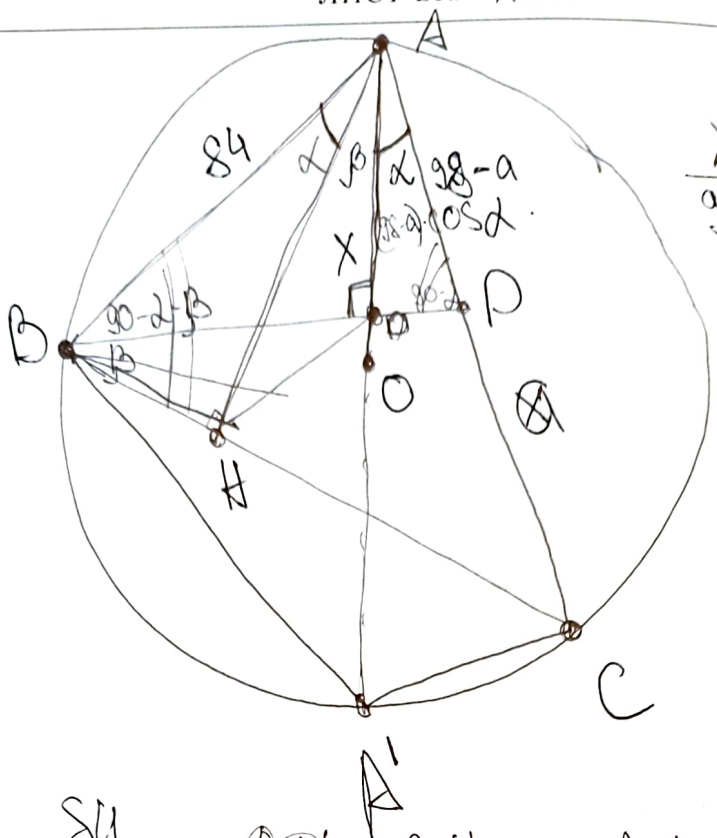
$\sqrt{a - \sqrt{a^2 - 2}} - \sqrt{a + \sqrt{a^2 - 2}}$

$a - \sqrt{a^2 - 2} - \left(a + \sqrt{a^2 - 2}\right) = -2\sqrt{a^2 - 2}$

$0 < 45 - 14\sqrt{7} < 1$

$44 < 14\sqrt{7}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!



$$\frac{X}{98-a} = \cos\alpha$$

$\triangle ABH \sim \triangle ADX$

$\triangle ABX \sim \triangle ACH$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AH}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AX}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{84}{98} = \frac{98-CD}{84}$$

$$\frac{84}{98} = \frac{AX}{AH}$$

$$\frac{98-a}{84} = \frac{84}{98}$$

$$98^2 - 98a = 84^2$$

$$\frac{98^2-84^2}{98} = a$$

$$98^2 = (49\cdot 2)^2 = (7^2\cdot 2)^2 = 7^4\cdot 2^2$$

$$\frac{98^2-84^2}{98} = \frac{7^4\cdot 2^2 - 7^2\cdot 2^2\cdot 6^2}{7^2} = (7\cdot 2\cdot 6)^2 = 7^2\cdot 2^2\cdot 6^2$$

$$\frac{\cancel{7^2}\cdot 2^2(7^2-6^2)^2}{\cancel{7^2}\cdot 2} = a$$

$$(98-a)\cdot\cos\alpha = \frac{6}{\cancel{7}}\cdot\cancel{98}^{7\cdot 2}\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

$$(98-a)\cdot\cos\alpha = 84\cos(\alpha+\beta)$$

$$a = \frac{98\cdot\cos\alpha - 84\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$$

$$\frac{84}{98-a} = \cancel{BX}\ \frac{BH}{XD} = \frac{AH}{\cancel{AD}}$$

$$\frac{84}{98} = \frac{BX}{CH} = \frac{AX}{AH}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{BX}{CH} = \frac{AX}{AH}$$

$$AX = \frac{6AH}{7}$$

$$\boxed{a = 2b}$$

$$AH = 98\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

$$AX = (98-a)\cos\alpha$$

36-11-77-47
(85.17)

$||x|+||y|-3|-3|=1$

$|x|+||y|-3|-3=1$

$|x|+||y|-3|=4$

$\cancel{|x|-4}$

$||y|-3|=4-|x|$ $(|x|\leq 4$

1) $|y|-3=4-|x|$ $(|y|-3\geq 0)$

2) $|y|-3=|x|-4$ $(|y|-3<0)$

1) $|y|=7-|x|$

2) $|y|=|x|-1$

$v_п\cdot t_2=\frac{12}{\frac{4}{5}}=15м.$

$|x|+||y|-3|-3=-1.$

$|x|+||y|-3|=2.$

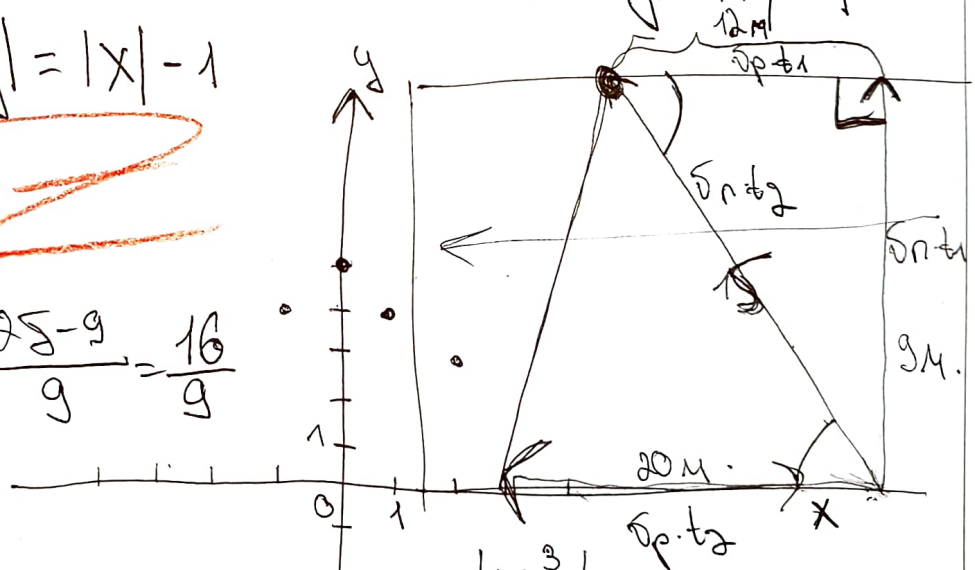
$||y|-3|=2-|x|$ $|x|\leq 2$

$|y|-3=2-|x|$ $(|y|-3\geq 0)$

$|y|-3=|x|-2$ $(|y|-3\leq 0)$

$|y|=5-|x|$

$|y|=|x|+1$



$\frac{25-9}{9}=\frac{16}{9}$

$t_1=\frac{3}{5}t_2$

$\frac{t_2}{t_1}=\frac{5}{3}$ $t_2=\frac{5t_1}{3}.$

$v_п^2\cdot\frac{25t_1^2}{9}=v_п^2\cdot t_1^2+144.$

$v_п^2\cdot t_1^2\left(\frac{25}{9}-1\right)=144.$

$\frac{16}{25}=\frac{4}{5}$

$v_п^2\cdot t_1^2=\frac{144}{\frac{16}{9}}=\frac{144\cdot 9}{16}\Rightarrow v_п\cdot t_1=\frac{\cancel{12}^{3}\cdot 3}{\cancel{4}}$

$\left(v_п\cdot\frac{5t_1}{3}\right)^2=\left(v_п\cdot t_1\right)^2+144$

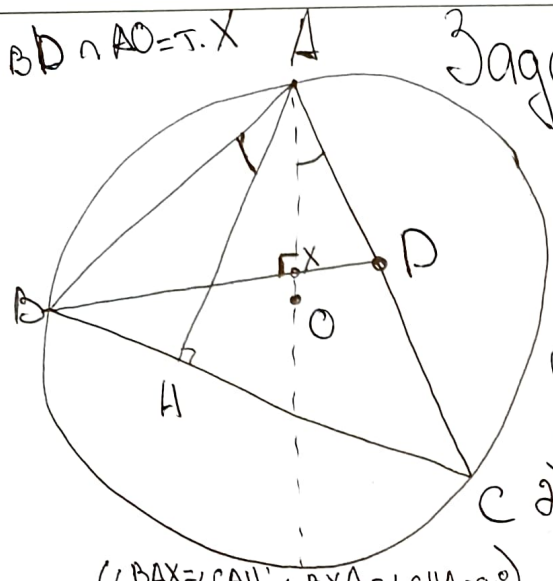
$\left(v_п\cdot t_2\right)^2=\left(v_п\cdot t_1\right)^2+12^2$

$v_п^2\cdot t_2^2=v_п^2\cdot\frac{9}{25}t_2^2+12^2$

$v_п^2\cdot t_2^2\left(1-\frac{9}{25}\right)=144$

Чистовик

Задача 3



$BD \cap AO = T.X$

1) Известно что центр опис окр $\triangle ABC$ и ортоцентр $\triangle ABC$ - изогонально сопряжены $\Rightarrow$ если AH - высота из т. A в $\triangle ABC$, то $\angle BAH = \angle CAO$

2) $\triangle BAH \sim \triangle DAX$ ($\angle BAH = \angle DAX$; $\angle AHB = \angle AXD = 90^\circ$)

$$\frac{BA}{DA} = \frac{AH}{AX}$$

3) $\triangle BAX \sim \triangle CAH$ ($\angle BAX = \angle CAH$; $\angle BXA = \angle CHA = 90^\circ$)

$$\frac{BA}{CA} = \frac{AX}{AH}$$

4) $\frac{BA}{CA} = \frac{DA}{BA} \Rightarrow BA^2 = CA \cdot DA \Rightarrow$

$\Rightarrow BA^2 = (CD + DA) \cdot DA \Rightarrow CD = BX$

$\Rightarrow BA^2 = CA \cdot (CA - CD) \Rightarrow CD = \frac{CA^2 - BA^2}{CA} =$

$= \frac{98^2 - 84^2}{98} = \frac{7^4 \cdot 2^2 - 7^2 \cdot 6^2 \cdot 2^2}{7^2 \cdot 2} = \frac{7^2 \cdot 2 (7^2 \cdot 2 - 6^2 \cdot 2)}{7^2 \cdot 2} =$

$= 26 \Rightarrow$ Ответ: $CD = 26$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Задача 6 Чистовик.

1) Пусть купили k плиток, сторона каждой x, ~~тогда и~~ сторона квадратной комнаты $= t \Rightarrow$

$\Rightarrow k \cdot x^2 = t^2$ (суммарная $S_{плиток} = S_{пола}$)

$k = \left(\frac{t}{x}\right)^2$, т.к k - кол-во $\Rightarrow k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow k$ - квадрат. $k = m^2$

2) Пусть ~~ширина~~ в ширину в новой комнате укладывается a плиток, тогда в длину $a+11$ плиток. Тогда $ax \cdot (a+11) \cdot x = m^2 \cdot x^2 - 15x^2$

($S_{пола}$ = ширина · длина $= ax \cdot (a+11) \cdot x$, где x - сторона плитки, суммарная $S_{плиток} = m^2 x^2 - 15x^2$, т.к всего плиток m^2 и 15 разбились)

$\Downarrow$

$a(a+11)x^2 = (m^2-15)x^2 \quad | : x^2$, $x = 0$, т.к плитки существуют

$\Downarrow$

$a(a+11) = m^2 - 15$

$a^2 + 11a - (m^2 - 15) = 0$

$D = 121 + 4m^2 - 60 = 4m^2 + 61$, т.к a - кол-во плиток, то $\sqrt{D} \in \mathbb{Z}$ (иначе $a \notin \mathbb{N}$) $\Rightarrow D = n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4m^2 + 61 = n^2 \Rightarrow (n-2m)(n+2m) = 61$

у 61 только 2 делителя 1 и 61, очев, что $n+2m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow n-2m$ тоже $\in \mathbb{N} \Rightarrow$ единственный вариант, т.к $n+2m > n-2m$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$n+2m=61$; $n-2m=1 \Rightarrow n=31$, $m=15$. (15 листовик)

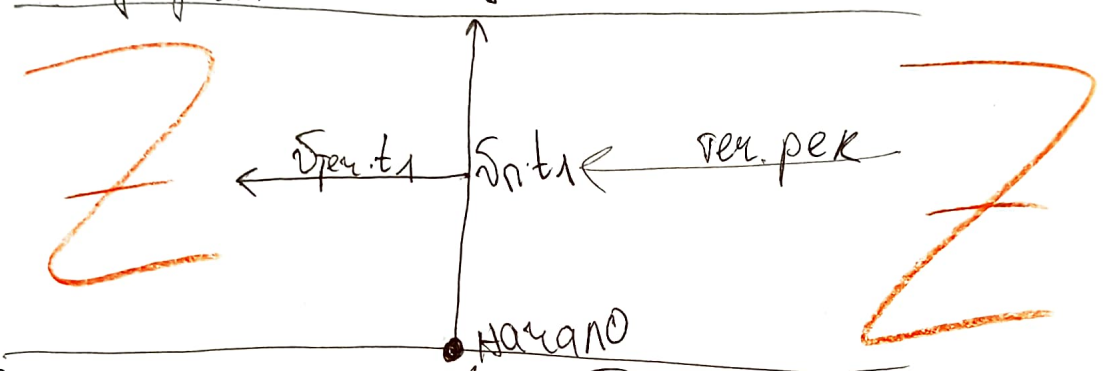
Значит было куплено 225 плиток.

Проверка: $a(a+11)=m^2-15 \Rightarrow a=10$ ($\forall$ е $a \in \mathbb{N} \Rightarrow$ все хорошо, начальная комната имеет $S=$ кв числа $\in \mathbb{N}$, $\forall$ е все хор)

Ответ: купили 225 плиток

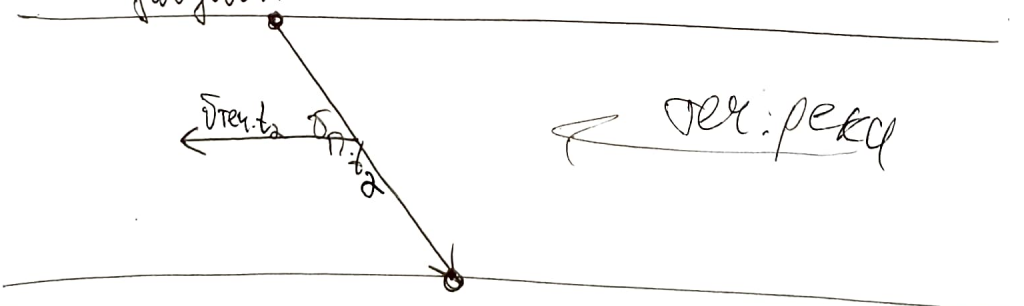
Задача 4

1 ситуация:

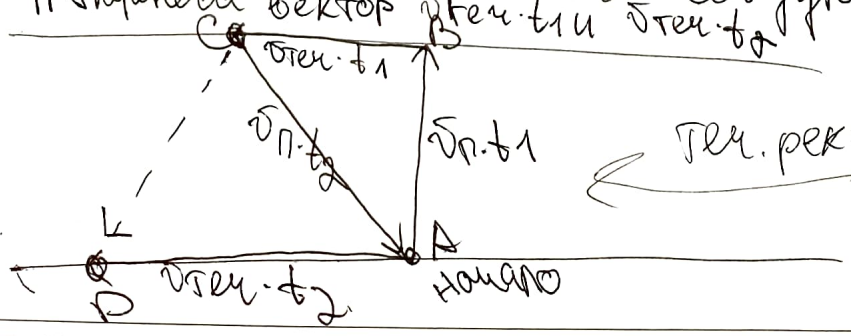


Пусть скорость пловца $= \vec{v}_п$, скорость реки $= \vec{v}_{теч}$, и в первый раз пловец оказался на другом берегу ч-з время t_1.

2 ситуация:



Тогда можем построить общую картину:
II перенесли вектор $\vec{v}_{теч} \cdot t_1$ и $\vec{v}_{теч} \cdot t_2$



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

чистовик.

Тогда понимаем, что $v_{теч} \cdot t_1 = 12$ м, (т.к его снес)

$v_{теч} \cdot t_2 = 20$ м $\Rightarrow$ $\frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{5}{3} t_1$

(т.к его снесло на 12 и 20 м соотв)

$\Downarrow$

т.к в 1 раз пловец плыл $\perp$ течению $\Rightarrow$

$\Rightarrow (v_п \cdot t_1)^2 + (v_{теч} \cdot t_1)^2 = (v_п \cdot t_2)^2$

(т. Пифагора для $\triangle ABC$) $\Rightarrow$

$v_п^2 \cdot t_1^2 + 12^2 = v_п^2 \cdot \frac{25}{9} t_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_п \cdot t_1 = \pm\sqrt{\frac{144}{\frac{16}{9}}} = \pm\sqrt{}$

$= \pm 9$, т.к $v_п, t_1 > 0 \Rightarrow v_п \cdot t_1 = 9$, и

т.к $v_п \cdot t_1 \perp v_{теч} \Rightarrow v_п \cdot t_1$ - ширина реки $\Rightarrow$

Ответ: ширина реки = 9 м.

Задача 1

Док-ем, что $-10 < \sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} < -9$

тогда $\left[\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}}\right] = -10$

1) $\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} < -9$

$\sqrt{45-\sqrt{2023}} + 9 < \sqrt{45+\sqrt{2023}}$

(возведем в кв, т.к ~~прав > 0~~ и лев > 0

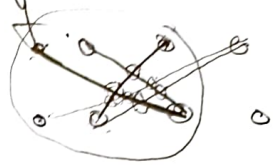
$45 - \sqrt{2023} + 81 + 18\sqrt{45-\sqrt{2023}} < 45 + \sqrt{2023}$

$18\sqrt{45-\sqrt{2023}} < 2\sqrt{2023} - 81$ (возв в кв, т.к ~~прав > 0~~ и левая ч > 0).

черновик

$-9\sqrt{45-17\sqrt{7}}-\sqrt{45+17\sqrt{7}} > -9$.

$\sqrt{45-17\sqrt{7}}+9 > \sqrt{45+17\sqrt{7}}$



$\cancel{45}-17\sqrt{7}+81+18\sqrt{45-17\sqrt{7}} > \cancel{45}+17\sqrt{7}$

$81+18\sqrt{45-17\sqrt{7}} > 34\sqrt{7}$.

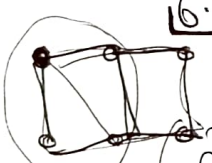
$18\sqrt{45-17\sqrt{7}} > 34\sqrt{7}-81$

$324(45-17\sqrt{7}) > 34^2\cdot 7+81^2-68\cdot 81\sqrt{7}$

$324\cdot 45-\cancel{324\cdot 17\sqrt{7}} > 34^2\cdot 7+81^2-\cancel{68\cdot 81\sqrt{7}}$

$C_6^2\cdot C_6^2$

$\boxed{6\cdot 5}$ $324\cdot 45-$



$2\cdot 9)^2\cdot 9\cdot 5 = 324\cdot 45 > 34^2\cdot 7+81$

$\boxed{18\cdot 18}\cdot 17$

$9\cdot 9\cdot 17\cdot 4$

$C_3^2\cdot C_3^2=9$

$18^2\cdot 45 > 17^2\cdot 2^2\cdot 7+81^2$

$C_2^2\cdot C_2^2$

$2^2\cdot 9^3\cdot 5 > 17^2$

324×45: 1620, 1296, 14580

34×34: 136, 102, 1156

81×81: 81, 648, 6561

1156×7: 8092

$6561+8092$: 14653

$C_5^2\cdot C_5^2$ $\quad C_2^2=C_2^2$

$C_4^2\cdot C_4^2$ $\quad C_3^2\cdot C_3^2$

36-11-77-47
(85.17)

продолж №1

$$\sqrt{45-\sqrt{2023}}+10>\sqrt{45+\sqrt{2023}}$$

правая ч >0 ⇒ возв в кв

$$45-\sqrt{2023}+100+20\sqrt{45-\sqrt{2023}}>45+\sqrt{2023}$$

$$20\sqrt{45-\sqrt{2023}}>2\sqrt{2023}-100$$

это очевидно верно т.к левая часть всегда >0, а правая отриц

$(2\sqrt{2023}<2\cdot45=90)\Rightarrow$

$$\sqrt{45-\sqrt{2023}}-\sqrt{45+\sqrt{2023}}>-10$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\sqrt{45-\sqrt{2023}}-\sqrt{45+\sqrt{2023}}\right]=-10$$

Ответ: -10.

Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Задача 5

$$||x|+||y|-3|-3|=1$$

1) $||x|+||y|-3|-3=1$

$||x|+||y|-3|=4$

$||y|-3|=4-|x|$ $\quad |x|\le 4$

1.1) $|y|-3=4-|x|$ $\quad (|y|\ge 3)$

1.2) $|y|-3=|x|-4$ $\quad (|y|<3)$

1.1) $|y|=7-|x|$

1.2) $|y|=|x|-1$ $\quad (|x|\ge 1)$

2) $||x|+||y|-3|-3=-1$

$||x|+||y|-3|=2$

$||y|-3|=2-|x|$ $\quad |x|\le 2$

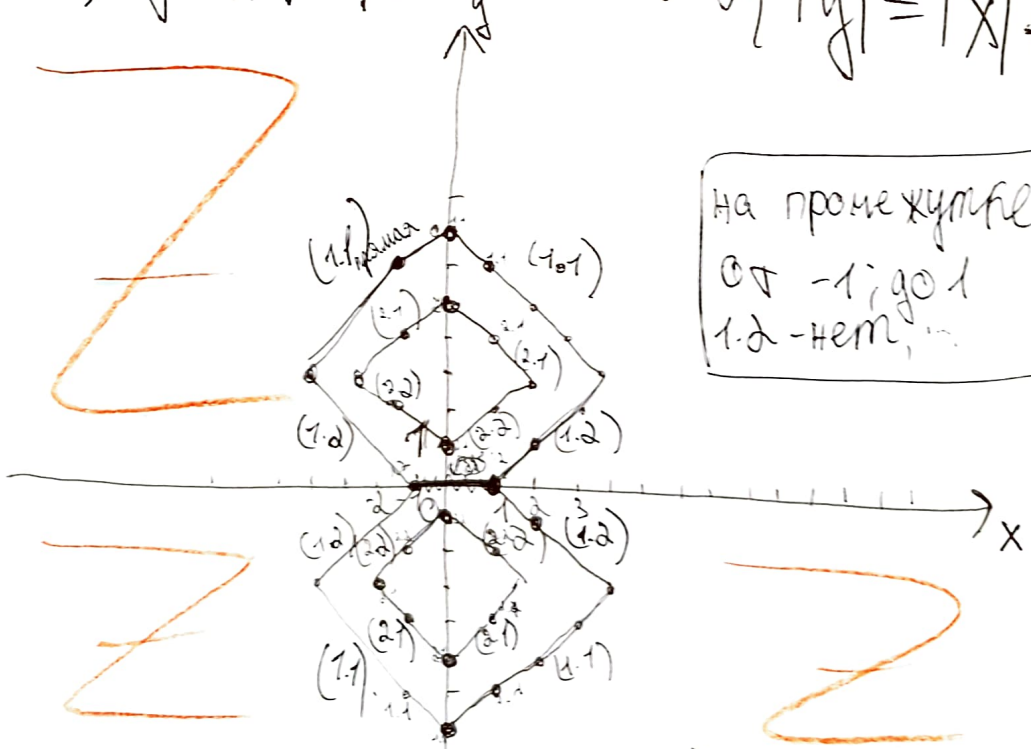
2.1) $|y|-3=2-|x|$

2.2) $|y|-3=|x|-2$

2.1) $|y|=5-|x|$

2.2) $|y|=|x|+1$

на промежутке от -1 до 1 1.2 - нет;



Понятно, что $(-1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$ все случаи задают 4 прямые, т.к. модули на x и на y с какими-то ограничениями

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

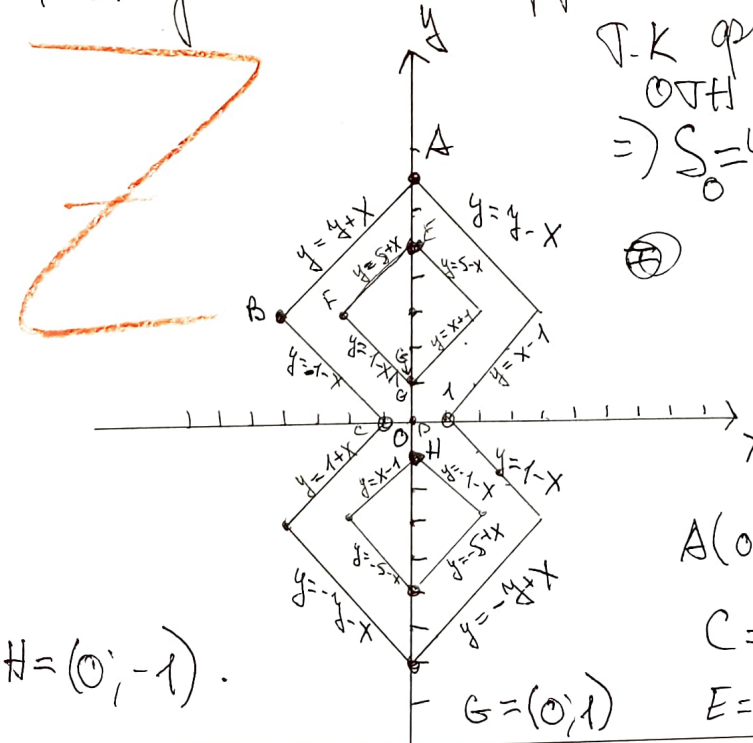
строим ф-ции по точкам, учитывая ограничения на $|x|$ и $|y|$.
можно построить красивые точки для каждого случая

1.1.

x	0	x	-x
y	y	+6	+6

далее соединяем точки исходя из того, что ~~нарис~~ получается ф-ция, т.е одному значению x одно значение y (~~в сл~~ например в случае 1.1 при $x=1$, $|y|=6 \Rightarrow$ $\Rightarrow y=\pm 6$, значит одна из точек соотв одной прямой, другая другой (иначе это не ф-ция).

получили следующее



т.к фигура симм отн ОХ и ОУ $\Rightarrow$
$\Rightarrow S_0 = 4(S_{ABCD} - S_{EFG}) =$

$A(0;4)$; $B(-4;3)$;
$C=(-1;0)$; $D=(0;0)$
$E=(0;5)$; $F=(-2;3)$
$G=(0;1)$
$H=(0;-1)$.

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Заметим, что $S_{ABCD} = S_{ABH} - S_{CDH} =$

$= \frac{8 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = 15,5$

$S_{FGE} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$

$S_O = 4(S_{ABCD} - S_{EFG}) =$

$= 4 \cdot 11,5 = 46.$

Ответ: $S = 46.$

Задача 4

Поймём, что провести 2 перес отрезка концы которых лежат в разных рядах, это тоже самое, что выбрать 4-угольник ~~со~~ вершины которого в верхнем, а в нижнем.

Потому, что 4-уг-ник однозначно задает т. пересечения своих диаг, и при этом в выпуклом, а у нас имеено такой, эта точка точно внутри, т-е пересек имеено отр.

36-11-77-47
(85.17)

Задача 8 продолж

Т.е пара пересекающихся отрезков задает ровно 1 четырехуг (очевидно, мы имеем 4 точки и проведены диагонали) и наоборот, т.е можно построить биекцию.

Значит если нам нужно у пар перес отрезков, то это тоже самое, что выбрать у четырехуг. с 2 верш вверху 2 внизу.

~~Выбрать 1 четырехуг можно~~

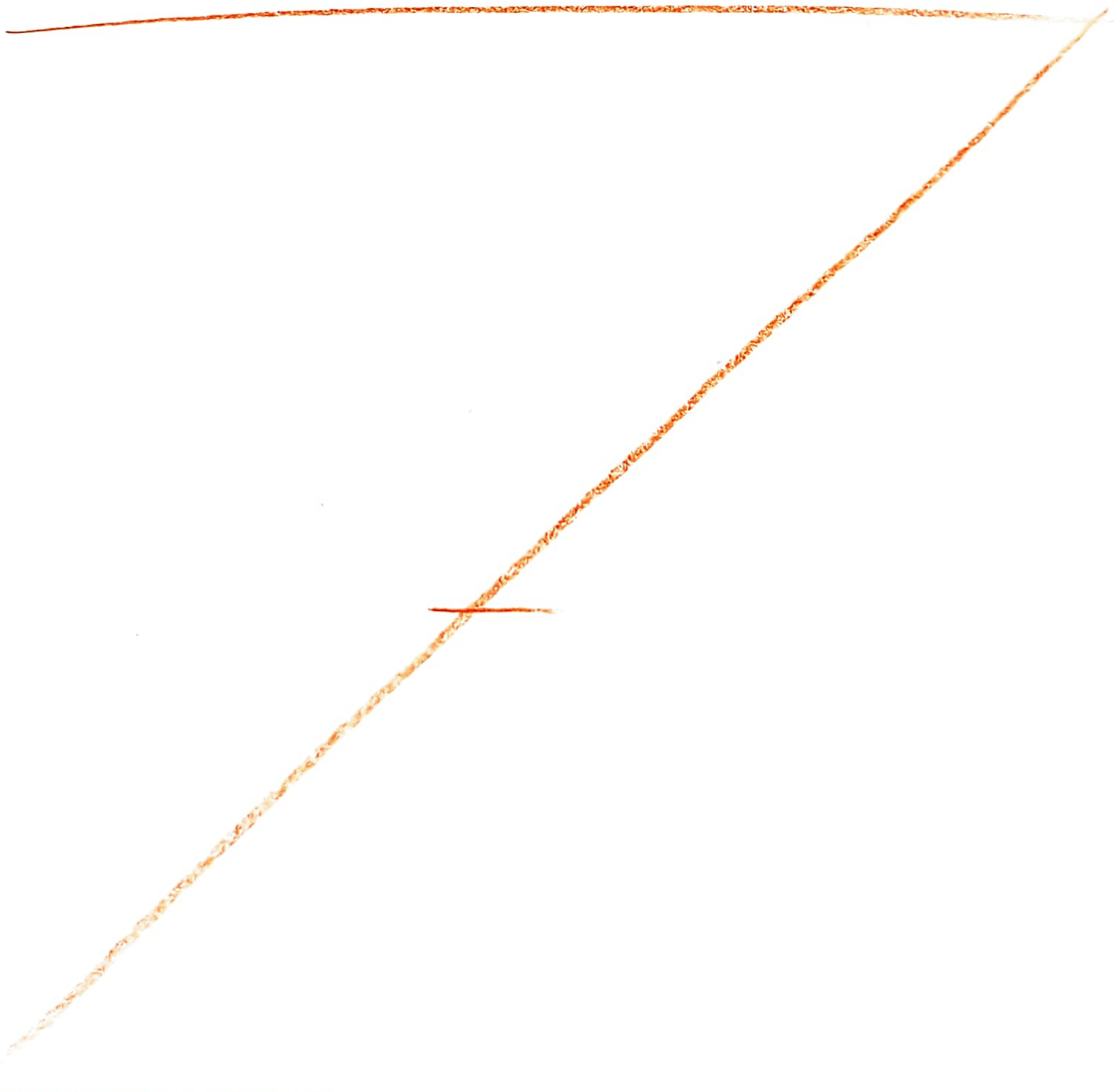
$\cancel{C_6^2 \cdot C_6^2}$ (

Т.е нам необходимо как-то выбрать вершины, чтобы на них можно было бы построить ровно у четырехуг

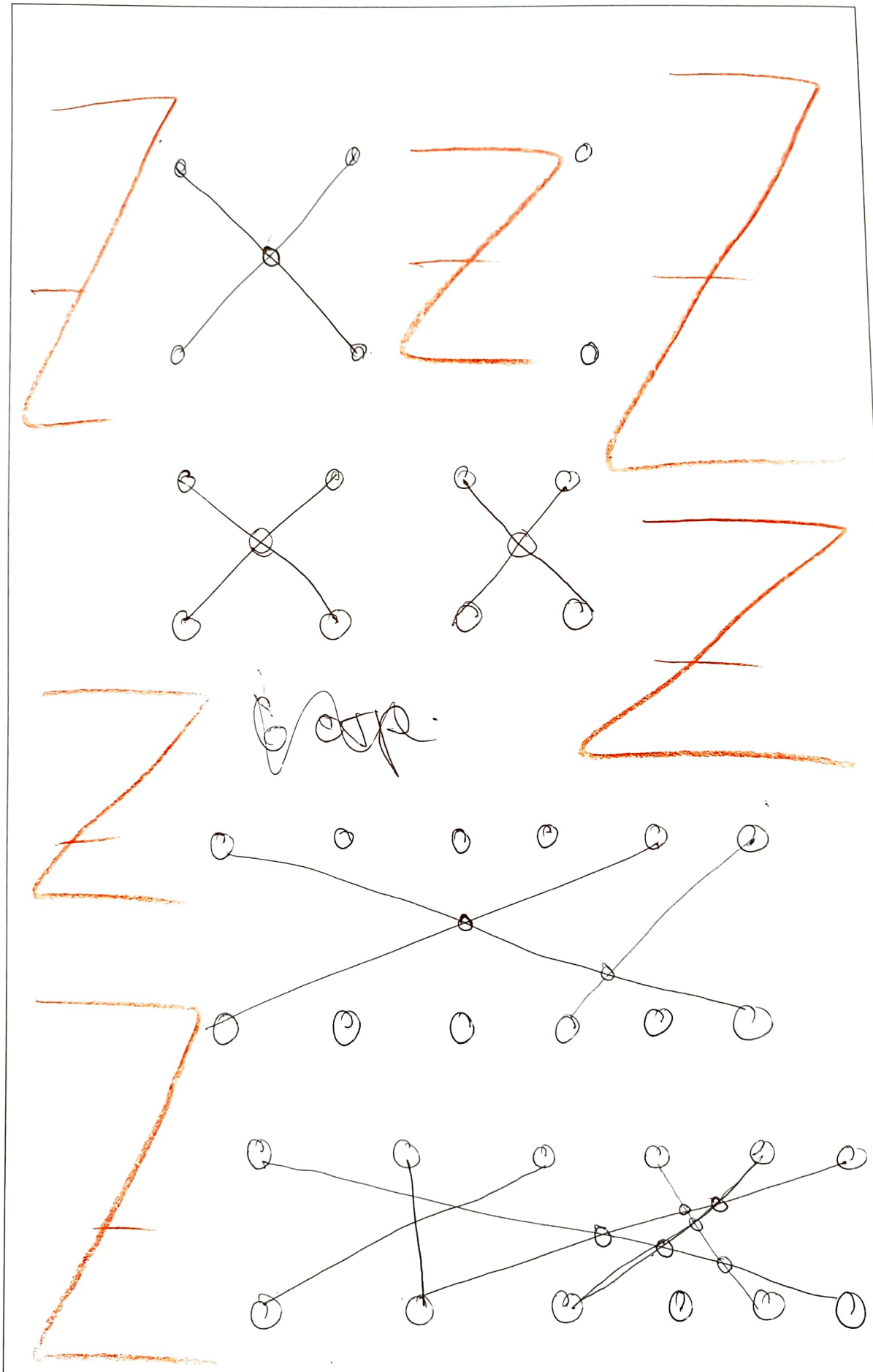
Т.к из каждой точки ровно 1 отр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего 6 отр (Σ deg вершин $= 2 \cdot$ ребра $\Rightarrow$ ребер $= \frac{12}{2}$).

Пусть мы провели 2 отр они задали 1 четырехуг и 1 т. пер @ Такие отр точно будут, т. к иначе никакие 2 не пересекаются



ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

$\sqrt{45+17\sqrt{7}} > \sqrt{45-17\sqrt{7}} + 8$ черновик.

$\cancel{45} + \sqrt{2023} \Rightarrow \cancel{45} - \sqrt{2023} + 64 + 16\sqrt{45-\sqrt{2023}}$

$2\sqrt{2023} > 64 + 16\sqrt{45-\sqrt{2023}}$

$\sqrt{2023} > 32 + 8\sqrt{45-\sqrt{2023}}$

$2023 + 32^2 - 64\sqrt{2023} > 64(45-\sqrt{2023})$

$2023 + 1024 > 64 \cdot 45$

3047

$$\begin{array}{r} 21 \\ 64 \\ \times 45 \\ \hline 320 \\ 256 \\ \hline 2880 \end{array}$$

$|x| + ||y|-3| - 3 < 0$

$|x| + ||y|-3| < 3$.

$\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} > -10$.

$y=7;\ y=-7$

$0 + |7-3| - 3 = 1$

2

$1-3=$

$|y| = 7 - |x|$

$|x| = 0 \quad x = 0,\ x = 1$

продолжение №1. чистовик

$\cancel{81^2 + 18\cdot 81\cdot 2\sqrt{45-\sqrt{2023}} + 36\cdot 324(45-\sqrt{2023}) >}$

$\cancel{4\cdot 2023}$

$\cancel{\sqrt{2023} > 44 \Rightarrow 2\sqrt{2023} > 88 \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow \text{прав часть} > 0 \Rightarrow \text{возв в к.в.}}$

~~слевая ча~~

$\cancel{324\sqrt{45-}}$

$324(45-\sqrt{2023}) < 4\cdot 2023 + 81^2 - 4\cdot 81\sqrt{2023}$

$324\cdot 45 < 4\cdot 2023 + 81^2$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 324 \\ \times\ 45 \\ \hline 1620 \\ 1296 \\ \hline 14580 \end{array}$$

$4\cdot 2023 = 8092$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 81 \\ \hline 81 \\ 648 \\ \hline 6561 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8092 \\ +\ 6561 \\ \hline 14653 \end{array}$$

~~т.е мы получили нер-во наоборот.~~

т.е действительно:

$14580 < 14653 \Rightarrow \sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} <$

< -9

Теперь док-ем, что

$\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} > -10$