0 831264 360001

83-12-64-36
(88.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Семисонова Владислава Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
83-12-64-36	70	15	15	15	15	0	10	0	0

где написано лист... из - чистовик

лист 1 из 6

70 13

семьдесят

№1.

Пусть $\sqrt{45-\sqrt{2022}} - \sqrt{45+\sqrt{2022}} = x < 0$

Рассмотрим число $x^2 > 0$

$x^2 = \sqrt{45-\sqrt{2022}}^2 - 2\cdot\sqrt{(45-\sqrt{2022})(45+\sqrt{2022})} +$

$+ \sqrt{45+\sqrt{2022}} = 45-\sqrt{2022} - 2\cdot\sqrt{2025-2022} + 45+\sqrt{2022} =$

$= 90 - 2\sqrt{3} \in (9^2; 10^2)$, т.к.

$90 - 2\sqrt{3} < 100$ и $90 - 2\sqrt{3} > 81 \Leftrightarrow 9 > 2\sqrt{3}$

$\Updownarrow$

$81 > 12$

$\Rightarrow |x| \in (9; \cancel{\sqrt{40}}\ 10)$ ~~или же $|x| \in (3;4)$~~

$\Updownarrow$

$x \in (-10; -9) \Rightarrow [x] = -10$

№2.

$1234 \sin^{20}(x+\frac{\pi}{6}) \leq 1234$

$-789 \cos^{23}(ax+\frac{\pi}{4}) \leq 789$

Если $1234 \sin^{20}(x+\frac{\pi}{6}) - 789\cos^{23}(ax+\frac{\pi}{4}) =$

$= 1234 + 789 = 2023$, то $\leq$ заменяется на $=$. $\Rightarrow \sin^{20}(x+\frac{\pi}{6}) = -\cos^{23}(ax+\frac{\pi}{4}) = 1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin(x+\frac{\pi}{6}) = 1 \\ \cos(a_1x+\frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3};\ a_1\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} \sin(x+\frac{\pi}{6}) = -1 \\ \cos(a_2x+\frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases} \Rightarrow x+\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3};\ -a_2\cdot\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$$a_1 = \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{\frac{\pi}{3}} = \frac{9 + 24k}{4}$$

$$a_2 = \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{-\frac{2\pi}{3}} = -\frac{9 + 24k}{8}$$

~~Очевидно, что наим. знач. a при~~

~~$k = \left[\begin{array}{l} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right.$, т.к. $24 > 9$ ~~

~~наим значение~~

Наим значение $|a_1|$ либо при $k = 0$ $\left(\frac{9}{4}\right)$,

либо при $k = -1$ $\left(\frac{15}{4}\right)$

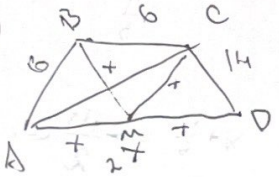
Наим значение $|a_2|$ либо при $k = 0$ $\left(\frac{9}{8}\right)$,

либо при $k = -1$ $\left(\frac{15}{8}\right)$

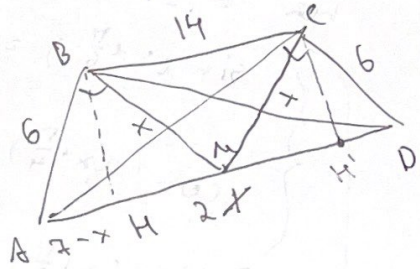
Из всех значений $a_2 = -\frac{9}{8}$ - минимальное по модулю

Есть 2 случая расп. сторон в многоуг.: №4

1



2



$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{BCD} + S_{ABD}$.

Если $\angle ABC = \alpha$; $\angle ACD = \beta$; $AC = y$, то

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} AC \cdot CD \cdot \sin\beta$.

$AC = \sqrt{AB^2+BC^2-2\cos\alpha\, AB\cdot BC}$ => Если $\alpha < 90$ мы сможем писать 3 из 6

взять угол $\gamma = 180^\circ - \alpha$, тогда $-\cos\gamma > 0$ и

$\sin\gamma = \sin\alpha$ => $\alpha \geq 90^\circ$

Заметим, что при $\beta = 90^\circ$ S_{ACD} - max, причём $\angle\alpha$ от $\angle\beta$ не зависит при подсчёте площади.

Аналогично $\angle ABD = 90$ => ABCD - вписан.

На ② картинке ABCD - равнобокая трапеция

опустим на AD ⊥ из т. B. $BH \perp AD$ и 1 из т. C. $CH' \perp AD$

пусть $AD = 2x$, тогда $AH = \frac{AD-BC}{2} = \frac{AD-HH'}{2} = x-7$.

$HD = AD - AH = x+7$

$BH = \sqrt{AH\cdot HD} = \sqrt{AB^2-AH^2}$ => $AH = 2$; $BH = 4\sqrt{2}$

$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}\cdot BH = 64\sqrt{2}$

На самом деле, на ① картинке AD также $= 18$,

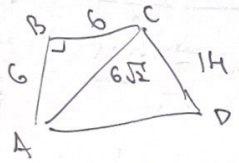
это можно понять, обозначив $\angle CMD$ за 4φ, где M - середина AD, тогда $\angle AMB = \angle BMC = 90^\circ - 2\varphi$

На второй же картинке $\angle BMC = 4\varphi$; и $\angle AMB = \angle CMD = 90^\circ - 2\varphi$ =>

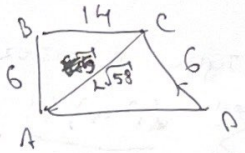
=> $S_{ABCD} = S_{ABM_1} + S_{BMC_1} + S_{CMD_1} = S_{ABM_2} + S_{CMD_2} + S_{BMC_2}$ соотв => >> в ① случае ответ также $64\sqrt{2}$

Если же $\angle ABC = 90^\circ$, то есть снова 2 случая:

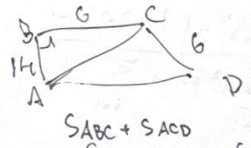
①



②



случай



= ②, т.к. $AC_2 = AC_3$.

① $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{6\cdot 6}{2} + 42\sqrt{2}\cdot\sin\angle ACD$, max при $\angle ACD = 90$ $S_{ABCD} = 18 + 42\sqrt{2}$

2-3 $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 18 + 6\sqrt{58} \cdot \sin\angle ACD$ мин 4 из 6

max при $\sin\angle ACD = 1$ $S_{ABCD} = 18 + 6\sqrt{58}$

$64\sqrt{2} > 18 + 42\sqrt{2} > 18 + 6\sqrt{58}$

$\Downarrow$

$S_{ABCD}\ max = 64\sqrt{2}$ и $AD = 18$.

№5.

Пусть 2^{2020} имеет a чисел в записи, 5^{2020} имеет b чисел в записи, тогда:

$10^a < 2^{2020} < 10^{a+1}$; $10^b < 5^{2020} < 10^{b+1}$

Заметим, что $10^{a+b} < 10^{2020} < 10^{a+b+2}$

$\Downarrow$

$2020 = a+b+1$

$\Downarrow$

$S(2^{2020}) + S(5^{2020}) = a+b = 2019$

№6.

$$a_n = \frac{(n^2+1)\cdot n}{((n-1)^2+1)} \cdot a_{n-1} = \frac{(n^2+1)\cdot n}{\cancel{((n-1)^2+1)}} \cdot \frac{\cancel{((n-1)^2+1)}\cdot(n-1)}{((n-2)^2+1)} \cdot a_{n-2} =$$

$$\ldots = \frac{(n^2+1)\cdot n!}{2} \cdot a_1$$

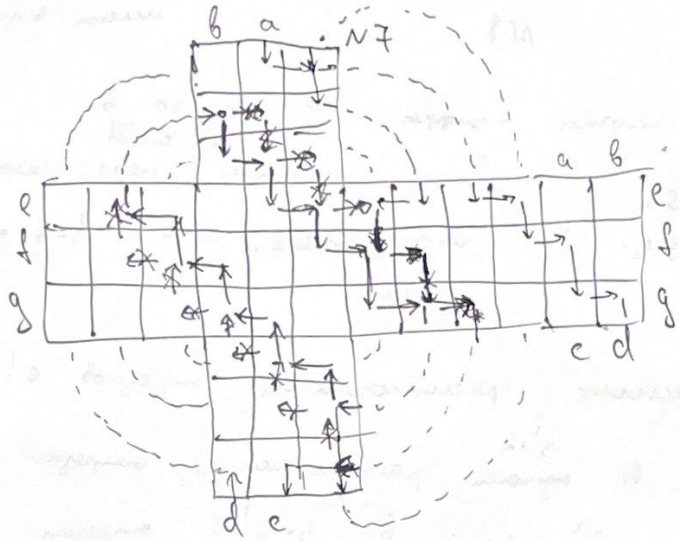
При $n = 2022$ $a_n = \frac{(2022^2+1)\cdot 2022!}{2} \cdot 11$

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{(i^2+1)\,i!}{2} \cdot a_1 = \frac{2022 \cdot a_1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{2021} i^2 i! + \sum_{i=1}^{2021} i!\right)$$

$$\frac{a_{2022}}{\sum_{i=1}^{2021}\left(\frac{(i^2+1)\,i!}{2} \cdot a_1\right)} = \frac{(2022^2+1)\cdot 2022!}{\sum_{i=1}^{2021} i^2 i! + \sum_{i=1}^{2021} i!}$$

83-12-64-36
(88.6)

N 7



Это развёртка кубика Рубика, если между кусками есть хотя бы одно ребро, или они связаны пунктиром, или их соотв. одинаковые буквы. Заметим, что при переходе по пунктиру или через букву кусок ново

N 3.

$$f(x)=\log_7(|x^2-7|^3+1)+\sqrt{3x^4-9x^2+31}-\sqrt{2x^4+5x^2-18}$$

Заметим, что $f(x)=f(-x)$

Заменим x^2 на y; $y\in[0;+\infty)$

При $y\in[0;+\infty)$

$$3y^2-9y+31 \geq 2y^2+5y-18$$

$$\Updownarrow$$

$y^2-14y+49=(y-7)^2\geq 0$, а равенство достигается при $y=7$.

При $y\in[0;+\infty)/\{7\}$ $f(x)>0$, т.к. $\log_7(t+1)$, где $t>0$. $\log(|7-7|^3+1)+\sqrt{3\cdot 49-9\cdot 7+31}=\sqrt{2\cdot 49+5\cdot 7-18}=\sqrt{115}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходит только $x=\pm\sqrt{7}$

лист 6 из 6

№8

Пусть точки - цифры от 1 до 6.

Если отрезки $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ пересекаются,

1 2 3 4 5 6

1 2 3 4 5 6

то ~~отрезк~~. a-c и d-b одного знака

Всевозможных расположений отрезков 6!

Из них в ~~одном~~ $3!\cdot 2$ расположении отрезки пересекаются C_6^2 раз; в $6\cdot 2!\cdot 2$ отрезки пересекаются C_5^2 раз; в $C_6^2\cdot 2!\cdot 2$ отрезки пересекаются $C_4^2 = 6$ раз, в $C_6^3\cdot$

$4\sqrt{5} - \sqrt{2025} - 2\cdot\sqrt{3} + 445 + \sqrt{2025}$

$90 - 2\sqrt{3}$

$\vee$

81

1 2 3 4 5 6

1 2 3 4 5 6

$\frac{3}{2}$

$-\frac{6}{2n}$

1 2 3 4 5 6

$a_1 = 1$

$a_2 = 55$

$a_3 = 330 = 6\cdot 55$

$a_4 = 132\cdot 12 = 6\cdot 22\cdot 12$

1	3
2	9
6	35
24	153
120	823
720	

$\frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} + \frac{((n-1)^2+1)(n-1)}{\cdot}$

$\frac{(n^2+1)n\cdot((n-1)^2+1)}{((n-1)^2+1)((n-1)^2+1)(n-1)}$

16

$\frac{6\cdot 5}{2} = 15$

$\log_3 65 + \sqrt{12-14+31}$

45

5

n^3+1

$C_4^4 = 6$

C_6^4

3

$$\frac{(45-\sqrt{2022})\sqrt{45+\sqrt{2022}} - (45+\sqrt{2022})\cdot\sqrt{45-\sqrt{2022}}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{45-\sqrt{2022}}\cdot\sqrt{45+\sqrt{2022}}\left(\sqrt{45-\sqrt{2022}} - \sqrt{45+\sqrt{2022}}\right)}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{\quad}{\sqrt{3}}$$

$a_n = \frac{(n^2+1)\cdot n!}{2} \cdot a_n$

$17 \cdot \cancel{24}^{12} \cdot 11$

$89 < 45 + \sqrt{2022} < 90$

$-\sqrt{45} \cancel{>} -\sqrt{45+\sqrt{2022}} \cancel{>} -\sqrt{90}$

$0 < \sqrt{45-\sqrt{2022}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{19}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\sqrt{89}+1 > \left(\sqrt{45-\sqrt{2022}} - \sqrt{45+\sqrt{2022}}\right) > -\sqrt{90} > -10$

$\wedge$

-9

$-\sqrt{89} + \frac{1}{\sqrt{2}}$? -9

$\sqrt{89} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$89 + \frac{1}{2} - \sqrt{85}$

89 9 89

81

$\sqrt{89}$ $8\frac{1}{2}$

$89 \times 4 = 356$

45 −

$\frac{19}{2}$? $\sqrt{89}$

$\sqrt{45 - \sqrt{\ }}$

$1936 + \frac{9}{16}$

$19 \times 19 = 171$, 361

$\frac{3}{2} \cdot 44 = 66$

$45 - \sqrt{2022}$? $\frac{1}{4}$

$44\frac{3}{4}$? $\sqrt{2022}$

17×12: 34, 17, $204 + 36 = 240$

44×44: 176, 176, 1936

$\frac{26}{4} = 6\frac{1}{2}$

$\frac{17}{3}$

11

1 5

5 5

30

$17 \cdot 12$ $\frac{17}{3} = 5\frac{1}{3}$

$26 \cdot 60$ $6\frac{1}{2}$

$45 - \sqrt{2021} \le x$

$\frac{445}{445}$

$45 - x \le \sqrt{2021}$

$\sqrt{3} - \sqrt{3}$

$30x^2 - 90x + x^2 \le 2021$

$\frac{45 - \sqrt{2021}}{}$

$\frac{3}{}$

$-90x + x^2 \le 0$

$180 -$

$45^2 - \frac{3}{} = 2016$

$0 = \frac{45^2}{2025}$

$45 - \sqrt{2016}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{45 - \sqrt{2021}}$

$45 - \sqrt{2021} < \frac{1}{2}$

$\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{45 - \sqrt{2021}}}$

$\sqrt{2021} < 90$

$2021 < 90 \cdot 2021$

$19 \quad 2\sqrt{2} \quad \sqrt{45 - \sqrt{2021}} \quad \frac{3}{} - \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{45 - \sqrt{2021}}}\right)$

$9 \quad 11\sqrt{2}$

13

$\Lambda \quad \left[0; 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$

$\Lambda \quad \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$-\frac{\pi}{2}$

$\sqrt{3} \quad 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{}{\sqrt{45 - \sqrt{2021}}}$

$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{}{\sqrt{45 - \sqrt{2021}}}$

$\frac{3}{8} \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$-\frac{3}{8}$

$\sqrt{3} \quad ? \quad 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{3}$

$\frac{3}{\sqrt{45 - \sqrt{2021}}}$

$2\sqrt{3}$

$\frac{445}{445}$

$3 \quad ? \quad \frac{125}{2} + 45\sqrt{2}$

$45 \cdot 45 + 45 + 9$

$\sqrt{58}$

$2 \quad 3$

$\frac{117}{56}$

$\frac{117}{}$

$\frac{126}{76}$

$\frac{232}{}$

$\frac{2}{2}$

$\frac{126}{83}$