0 044480 420002

04-44-80-42
(88.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Олимпиада школьников
наменование олимпиады
„Ломоносов"

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Сметанина Григория Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

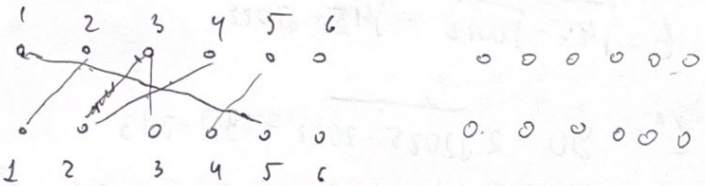
Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
04-44-80-42	100	15	15	15	15	15	15	15	15

04-44-80-42
(88.5)

Черновик

$\frac{2025-2022}{\sqrt{45-\ldots}+\sqrt{45+\ldots}} = \frac{-3}{\ldots 5}$

100 сто



$a_i > a_j$; $j > i$ => пересеч.

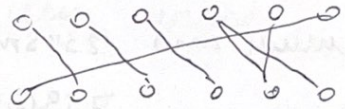
$a_6 = 5 - 4$

$a_6 = 4 - 6 + 3$

$a_6 = 3 - 4 + 3 + 6 + 2$

123456

654321 612354 $a_6 = 2$



5 4 3 2 1 0

_ _ _ 6 _ _

2

613245

4 3 2 1 0

_ _ 5 _ _

2

3 2 1 0

_ _ _ _

2 1 0

_ _ _

1 0

_ _

4321

3×1

54321

3·3

$-x^4 + 14x^2 - 49$

$-(x^2-7)^2$

4 =

Чистовик 1 из 8

N1.

$$\cancel{\left[\sqrt{45-\sqrt{2022}}-\sqrt{45+\sqrt{2022}}\right]=\left[\frac{45-\sqrt{2022}-45-\sqrt{2022}}{\sqrt{45+\sqrt{2022}}+\sqrt{45-\sqrt{2022}}}\right]=}$$

$$t=\sqrt{45-\sqrt{2022}}-\sqrt{45+\sqrt{2022}}$$

$$t^2=90-2\sqrt{2025-2022}=90-2\sqrt{3}$$

$86<90-2\sqrt{3}<87$ (max $\sqrt{3}>1{,}5$; $\sqrt{3}<2$

$$\left.\begin{array}{l} t<0;\quad t\leq -10 \Rightarrow t^2\geq 100 \\ \qquad\qquad t\geq -9 \Rightarrow t^2\leq 81 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$t\in(-10;-9) \Rightarrow [t]=-10$ Ответ: -10.

N2. $1234\sin^{20}(x+\frac{\pi}{6})-789\cos^{23}(\alpha x+\frac{\pi}{4})=2023.$

Заметим, что $1234\sin^{20}(x+\frac{\pi}{6})\leq 1234$;

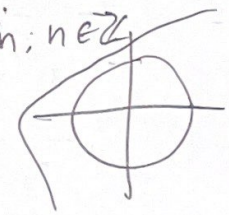
$789\cos^{23}(\alpha x+\frac{\pi}{4})\geq -789$;

$1234+789=2023 \Rightarrow$

ур-е выполняется при

$\sin(x+\frac{\pi}{6})=\pm 1$; $\cos(\alpha x+\frac{\pi}{4})=-1$

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad \alpha x+\frac{\pi}{4}=-\pi+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$



$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\pi k \\ x=-\frac{5\pi}{4\alpha}+\frac{2\pi n}{\alpha} \end{cases}$$

$x\in[-\pi;\pi] \Rightarrow$

$x=\frac{\pi}{3}$ или $x=-\frac{2\pi}{3}$

$-\frac{5\pi}{4\alpha}+\frac{2\pi n}{\alpha}=\frac{\pi}{3}$ $\qquad -\frac{5\pi}{4\alpha}+\frac{2\pi n}{\alpha}=-\frac{2\pi}{3}$

$-15+24n=4\alpha$ $\qquad -15+24n=-8\alpha$

$\alpha=\frac{24n-15}{4}$ $\qquad \alpha=\frac{15-24n}{8}$

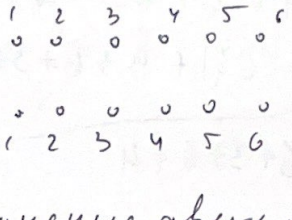
$n\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ $\qquad n\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$|\alpha_{min}|=\frac{9}{4}$; $n=1$ $\qquad |\alpha_{min}|=\frac{9}{8}$; $n=1$

при $n\neq 0$ $|\alpha|\geq\frac{15}{4}$ $\qquad$ при $n\neq 0$ $|\alpha|\geq\frac{15}{8}$ $\Rightarrow$ ответ: $\frac{9}{8}$

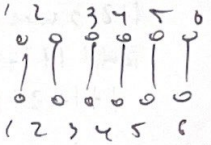
ЧИСТОВИК 2 из 8

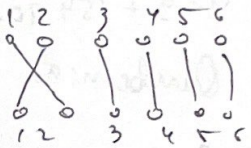
N8. пронумеруем точки верхнего и нижнего рядов от 1 до 6 слева направо:



~~Заметим, что условие пересечения двух отрезков такого, что~~

отрезок – это ~~по~~ соединение двух точек => варианты соединения точек можно описать последовательностью из 6 чисел; номер в послед. обозначает точку нит. ряда, а само число – точку верхнего. Пересечение будет в случае, если одно из чисел стоит раньше какого-то из меньших чисел:

123456 :  нет пересеч.

213456 : 

2>1; стоит раньше

рассмотрим число 6. Число ~~пар~~ пересечений с отрезком, содерж. шестую точку верх. ряда, определяется количеством мест перед ней:

2 пересечения с 46

$\overline{1}$ $\overline{2}$ $\overline{3}$ $\overset{6}{\overline{4}}$ $\overline{5}$ $\overline{6}$

теперь уберем отрезок с точкой 6. останется 5 мест. Аналогично рассмотрим точку 5 и т.д. Общее число пересечений выражается как $S = a_1 + a_5 + a_4 + \dots a_2 + a_1$, где a_i – число пересечений отрезка с i-ой точкой верхнего ~~отрезка~~ ряда, с отрезками $<i$ точками верх. ряда.

$a_6 \in [0;5]$; $a_5 \in [0;4]$ ..... $a_1 = 0$; $S = 6$

переберем все эти случаи:

Чистовик. 3из8 $6-a_6=1 \Rightarrow$ 1 по 1

$a_6=5 \Rightarrow$ 4 ~~способа~~ (C_4^1) способов

$6-a_6=2 \Rightarrow$ 2 по 1 или 1 по 2

$a_6=4 \Rightarrow 6\,(C_4^2)+3\,(C_3^1)$ способов

$6-a_6=3 \Rightarrow$ 3 по 1 или 2+1 или 1 по 3

$a_6=3 \Rightarrow 4\,(C_4^3)+9+2$ способов

$a_6=2 \Rightarrow 1\,(C_4^4)+9+6+3+1$

$6-a_6=4 \Rightarrow$ 4 по 1 или 1+1+2 или 1+3 или 2+2 или 1 по 4

$a_6=1 \Rightarrow 3+6+3+6+4$

$6-a_6=5 \Rightarrow$ 1+4 или 1+1+3 или 1+1+1+2 или 1+2+2 или 2+3

$a_6=0$

$2+1+3+8+1+2+3.$

$6-a_6=6 \Rightarrow$ 2+4 или 3+3 или 1+1+4 или 1+2+3 или 2+2+2 или 1+1+1+3 или 1+1+2+2

всего: $4+9+15+20+22+20=62+28=\underline{90}$

Ответ: 90.

№3. $\log_7(|x^2-7|^3+1)=\sqrt{2x^4+5x^2-18}-\sqrt{3x^4-9x^2+31}$

$|x^2-7|^3+1\geq 1 \Rightarrow \log_7(|x^2-7|^3+1)\geq 0 \Rightarrow$

$\sqrt{2x^4+5x^2-18}-\sqrt{3x^4-9x^2+31}\geq 0$

ОДЗ: $2x^4+5x^2-18\geq 0$

$2x^4+5x^2-18=0$

$D=25+36\cdot 4=$

$=169$

$x^2=\frac{-5\pm 13}{4}$

$x^2\geq 2$

$3x^2-9x^2+31\geq 0$

$3x^2-9x^2+31=0$

$D=81-12\cdot 31<0 \Rightarrow$ всегда >0

по методу рационализации при выполн. ОДЗ (т.к. $\sqrt{t}$ монотонно возраст. функция)

$-x^4+14x^2-49\geq 0$

04-44-80-42
(88.5)

Чистовик 4 из 8

$-(x^2-7)^2 \geq 0$ выполнено только при $x^2=7$

$x^2=7$: $\log_7 1 = \sqrt{98+35-18} - \sqrt{147-63+31} = 0$

подходит;

$x^2=7$ подх по ОДЗ $\Rightarrow$

$x=\pm\sqrt{7}$ Ответ: $\pm\sqrt{7}$.

ЧЕРНОВИК

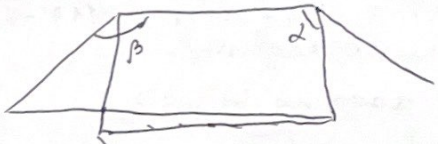
1 2 3 4 5 6 7 8

$\sqrt{32}\cdot 2+\sqrt{20}\cdot 4$

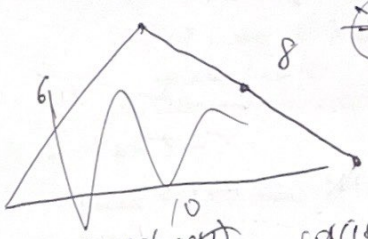
$\sqrt{27}\cdot 6 > 5\cdot 6$

24

27



$\frac{h_1}{2}\left(\sqrt{36-\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)^2}-\sqrt{36-h_1^2}\right)$



$h=4(1-\cos\alpha)$ $\cos(180-\alpha)$

10^t

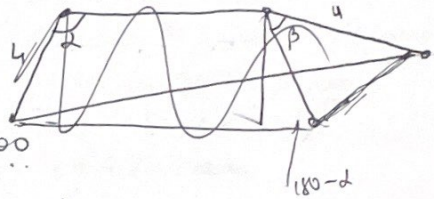
$a\cdot b=10^t$

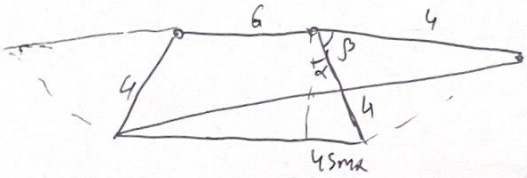
$\log_{10}ab=t \Rightarrow$

$\log_{10}a+\log_{10}b=t$

$8\cdot 125=1000$

$16\cdot 625=10000$



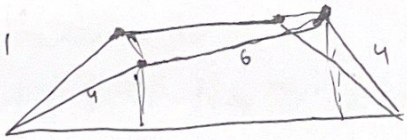


$h=4\cos\alpha$

$V=4\cos\alpha\cdot(6+4\sin\alpha)$

$\lg a=f$

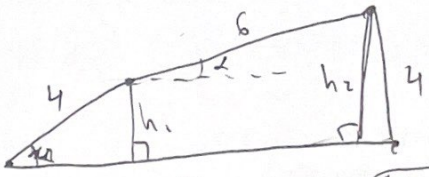
$f\in n;n+1$



$100=10\cdot 10$

$6\cos\alpha+\sqrt{16-h_1^2}+$

$+\sqrt{16-h_2^2}$

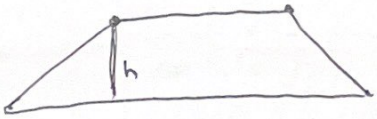


$P=\sqrt{16-h_1^2}+\sqrt{16-h_2^2}+\sqrt{(h_2-h_1)^2}$

$S=\sqrt{16-h^2}\cdot h+h\cdot 6$

$h=\frac{h_1+h_2}{2}$

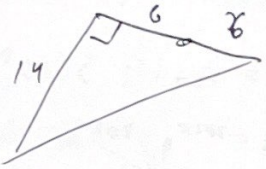
$S=\frac{\sqrt{16-h_1^2}\cdot h_1+\sqrt{16-h_1^2}\cdot h_2}{2}+$



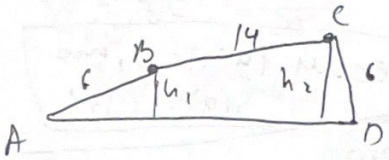
$+\frac{h_1+h_2}{2}\cdot\sqrt{16-(h_2-h_1)^2}$

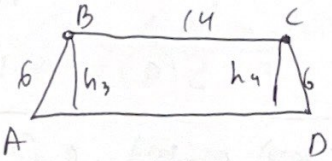
ЧИСТОВИК | 5 из 8

№4 стороны по 6 направлению соед. со стороной 14, тк. иначе макс. площадь $= \frac{1}{2}\cdot 14\cdot 12 = 14\cdot 6$



Тогда рассмотрим произв ABCD: $AB=CD=6$; $BC=14$





$h_1, h_2 =$ расст. от B и C до AD

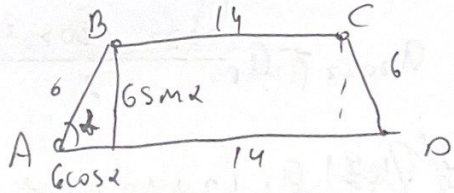
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{36-h_1^2}\cdot h_1 + \frac{1}{2}\sqrt{36-h_2^2}\cdot h_2 + \frac{h_1+h_2}{2}\cdot\sqrt{196-(h_2-h_1)^2}$$

рассмотрим такой же 4-х угольник, но с высотами $h_3 = h_4 = \frac{h_1+h_2}{2}$.

$$S = \underbrace{\sqrt{36-\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)^2}\cdot\frac{h_1+h_2}{2}}_{\vee\ \frac{1}{2}\sqrt{36-h_1^2}\cdot h_1+\frac{1}{2}\sqrt{36-h_2^2}\cdot h_2} + \underbrace{\frac{h_1+h_2}{2}\cdot 196}_{\vee\ \frac{h_1+h_2}{2}\sqrt{196-(h_2-h_1)^2}}$$

$\Rightarrow$

этот 4-х угольник - равнобедр. трапец.



$S = (14+6\cos\alpha)\cdot 6\sin\alpha = 84\sin\alpha + 18\sin 2\alpha$

$S' = 84\cos\alpha + 36\cos 2\alpha = 0$

$21\cos\alpha + 9\cos 2\alpha = 0$

$18\cos^2\alpha + 21\cos\alpha - 9 = 0$

$6\cos^2\alpha + 7\cos\alpha - 3 = 0$

$D = 49 + 3\cdot 24 = 49+72 = 121 \quad \cos\alpha = \frac{-7+11}{12} = \frac{1}{3}$

$\alpha\in(0, 90°) \Rightarrow$ при $\alpha < \arccos\frac{1}{3}$ $S'<0$; при $\alpha > \arccos\frac{1}{3}$ $S'>0 \Rightarrow$

чистовик / 6 из 8

при $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$ достигается макс площадь.

$AD = 14 + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 6 = \underline{18}$

Ответ: 18.

N5. $S(10^n) = n+1$; $S(10^{2020}) = 2021$

$10^{2020} = 5^{2020}\cdot 2^{2020}$

пусть $\lg(a) \in [n; n+1)$, $n \in N$ тогда $a = 10^n\cdot b$; $\lg b < 1 \Rightarrow$

$S(a) = n+1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{если } \lg(a) = t, \text{ то } S(a) = [t]+1}$

$\lg(10^{2020}) = \lg(5^{2020}) + \lg(2^{2020}) = 2020$

$\cancel{\lg 5^{2020} \in [f, f+1), f \in N}$

$\exists \lg 5^{2020} = f \Rightarrow \lg 2^{2020} = 2020 - f$

f - целое $\Rightarrow 2020 - f$ - целое

$S(5^{2020}) + S(2^{2020}) = [f] + [2020 - f] + 2 =$

$= 2019 + 2 = 2021.$

Ответ: 2021.

N6. $a_n = a_{n-1}\cdot\frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1} = a_{n-2}\frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}\cdot\frac{((n-1)^2+1)\cdot(n-1)}{(n-2)^2+1} = \ldots$

$= a_1\frac{n!\,(n^2+1)}{2} \Rightarrow a_{2022} = a_1\frac{2022!\,(2022^2+1)}{2}$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2021} = \frac{a_1}{2}(2 + 10 + \ldots + 2021!\,(2021^2+1))$

$\frac{a_{2021}}{S_{a_1 a_2 \ldots a_{2021}}} = \frac{2022!\,(2022^2+1)}{2+10+\ldots+2021!\,(2021^2+1)}$

$\frac{S_{a_2 a_3 \ldots a_{2021}}}{\frac{a_1}{2}} = \sum_i i!\,(i^2+1) = \sum_i\left((i+2)! - 3(i+1)! + 2i!\right) =$

ЧЕРНОВИК

$$a_n = a_{n-1}\frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1} = a_{n-2}\cdot\frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}\cdot\frac{((n-1)^2+1)(n-1)}{(n-2)^2+1}$$

$$a_n = a_1\cdot\frac{n!\,(n^2+1)}{2} \qquad a_{n-1} = a_1\frac{n-1!\,((n-1)^2+1)}{2}$$

$$a_3 = \frac{(3^2+1)\cdot 3\cdot(2^2+1)\cdot 2}{((3-1)^2+1)\cdot((2-1)^2+1)}\cdot a_1 = \frac{3!\cdot 3^2+1}{2}$$

$$a_2 = a_1\cdot\frac{(2^2+1)\cdot 2}{(2-1)^2+1} \qquad \frac{n!\,(n^2+1)}{2} + \frac{(n-1)!\,((n-1)^2+1)}{2} + \ldots + \frac{2\cdot 5}{2}+1$$

$$S_2 = a_2 + a_1 =$$

$$\frac{1}{2}\left((n-1)!\,(n\cdot(n^2+1) + n^2-2n+2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)!\,(n^3+n^2-n+2) = \frac{1}{2}(n-2)!\,(n^4-2n^2+3n-2)$$

$$a_2 = a$$

$$S_n = a_1\cdot\frac{(2^2+1)\cdot 2}{2}+1 \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!\,n-k!}$$

$$a_{2022} = a_1\frac{2022!\,(2022^2+1)}{2} \qquad \sum_i C_n^i = 2^n$$

$$\frac{a_{2021}}{a_{2022}} = \frac{2022\,(2022^2+1)}{(2021^2+1)} \qquad \frac{2021^2+1}{2022\,(2022^2+1)}$$

$C_3^0 = 1$ 2^3

$C_3^1 = 3$

$C_3^2 = 3$

C

$$\frac{a_{2020}}{a_{2022}} = \frac{2020^2+1}{2021\cdot 2022\,(2021^2+1)}$$

$$\frac{a_t}{a_{2022}} = \frac{(t^2+1)\,t!}{2022!\,(2022^2+1)}$$

$$2021!\cdot 2020\cdot 2022 + 2\cdot 2021!$$

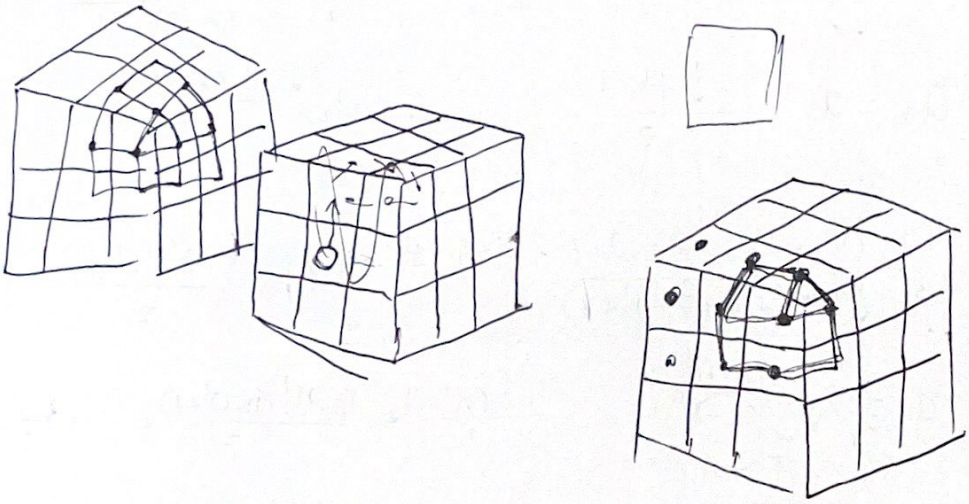
$n \quad n-1 \quad n+1 \quad 2 \quad n$

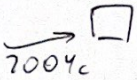
$$(n+1)!\cdot(n-1) + 2n!$$

$$(n+2)! - 3(n+1)! + 2n!$$

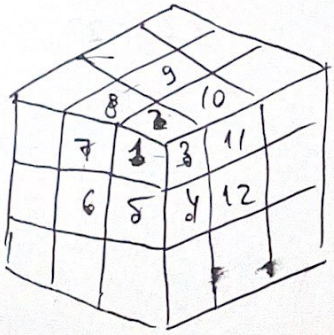
$$4! - 3\cdot 3! + 2\cdot 2! = 4\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 2 + 22 = 64$$

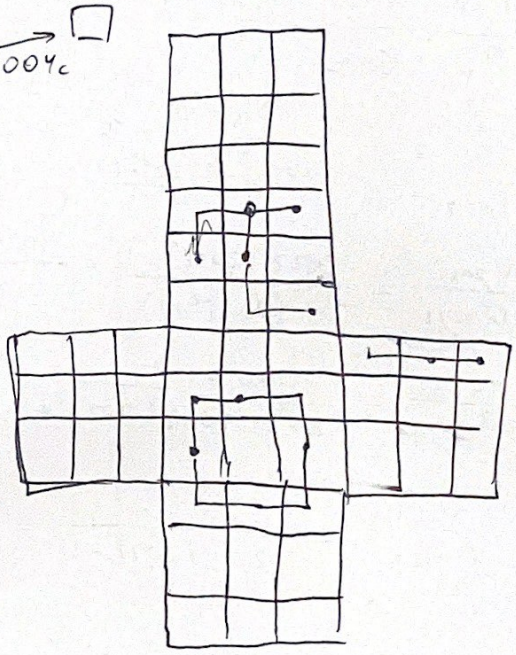
ЧЕРНОВИК

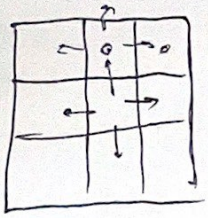




2004







1-2-3-4-5-6-7-8-2-3-1-7-8-9-
-10-11-3-1-2-10-11-12-4

чистовик 7 из 8

$$= \sum_{\text{от 2 до 2021}} (i+2)! - 3\sum_{\text{от 2 до 2021}} (i+1)! + 2\sum_{\text{от 2 до 2021}} i! =$$

$$= \sum_{\text{от 3 до 2022}} (i+1)! - 3\sum_{\text{от 2 до 2021}} (i+1)! + 2\sum_{\text{от 1 до 2020}} (i+1)! =$$

$$= \cancel{2022! - 3\cdot 3! - 3\cdot 2021! + 2\cdot 2!}$$

$$= \sum_{\text{от 4 до 2023}} i! - 3\sum_{\text{от 3 до 2022}} i! + 2\sum_{\text{от 2 до 2021}} i! =$$

$$= 2022! + 2023! - 3\cdot 3! - 3\cdot 2022! + 2\cdot 2! + 2\cdot 3! =$$

$$= 2023! - 2\cdot 2022! - 3! + 2\cdot 2! =$$

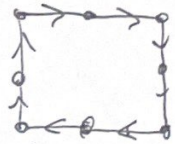
$$= 2022!\cdot 2021 - 2 \Rightarrow$$

$$\frac{S_{a_1 a_2 \ldots a_{2021}}}{\frac{a_1}{2}} = \frac{S_{a_2 a_3 \ldots a_{2021}}}{\frac{a_1}{2}} + 2 = 2022!\cdot 2021 \Rightarrow$$

$$\frac{a_{2022}}{S_{a_1 a_2 \ldots a_{2021}}} = \frac{2022!\,(2022^2+1)}{2022!\cdot 2021} = \frac{2022^2+1}{2021}$$

Ответ: $\frac{2022!+1}{2021}$

~~№8~~. №7. жучок попадёт в какой-то из углов клеток: есть цикл из 8! (назовем $Ц_8$)



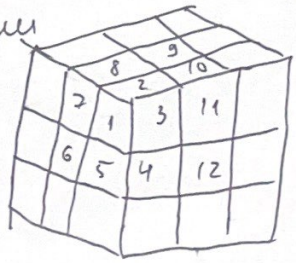
есть след. цикл:

2004

1-2-3-4-5-6-7-8-2-3-1-7-8-9-10-11-3-1-2-10-11-12-4-5-1-2-3-4-5-6-7

2023 конец цикла

между выдел. клетками 19 секунд =>

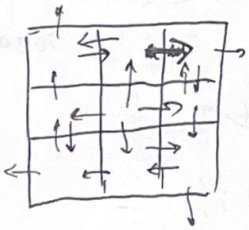


(при этом с 12 на 4 - поворот на право, что совпадает с четностью 2023 хода) => Следующее попадание в 4 через $\boxed{5с}$

ЧИСТОВИК 8 из 8

Заметим, что кроме клеток 4-5 (или аналогичных им, т.е. 10-11 и 7-8) в таком цикле нет клеток на расстоянии в 19 ходов

Рассмотрим другие циклы, рассмотрев один из ходов "прямо".



все отмеченные ходы приводят в 4 и 5, остальные - в рассмотренный ранее =>

других циклов не существует =>

ответ: 5_c - единственный.