+1 лист
+1 лист

0 248399 390009
24-83-99-39
(85.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Смирнова Артёма Денисовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
24-83-99-39	90	+	±	+	+	+	+	∓	—

24-83-99-39
(85.1)

$\left[\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}}\right]$

$2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$

$2015 - 90$ (девяносто)

$2000 = 2 \cdot 10 \cdot 10^2$

$10 \cdot 2\sqrt{5}$

$\sqrt{2022} < \sqrt{2023} < \sqrt{2025} = 45$

$\left[-3,5\right] = -4$

$0 < \sqrt{45-\sqrt{2023}} < 1$

$\sqrt{89} < \sqrt{45+\sqrt{2023}} < \sqrt{90}$

$\sqrt{2022} < \sqrt{2023} < 45$

$0 < 45 - \sqrt{2023} < \sqrt{45}$

$\left(-\sqrt{90}\,;\ 1-\sqrt{89}\right)$

$\sqrt{10^3 \cdot 2} = 10\sqrt{20} = 20\sqrt{5}$

$-10 < -\sqrt{90} < -9 < 1-\sqrt{89}$

$20\sqrt{5} < \sqrt{2023} < 45$

$1-\sqrt{89} \vee -9$

$1 \vee \sqrt{89} - 9$

$-9 \vee \sqrt{45-\sqrt{2023}} - 10 > \sqrt{89}$

$0 < \sqrt{45-\sqrt{2023}} < \sqrt{45-20\sqrt{5}}$

$\sqrt{45+\sqrt{2023}} \vee \sqrt{45-\sqrt{2023}} + y < 9 + 5 + 2\sqrt{5} = 14 - 2\sqrt{5}$

$\sqrt{45+2\sqrt{5}} < \sqrt{45+\sqrt{2023}} < \sqrt{90}$

$45+\sqrt{2023} < 10^2 - 10 <$

$45+\sqrt{2022} >$

$-10 \quad -\sqrt{90} \quad ; \quad \sqrt{45-20\sqrt{5}} - \sqrt{45+20\sqrt{5}} \vee -9$

$2\sqrt{5} >$

$45 - 20\sqrt{5} \quad 5\left(9 - 4\sqrt{5}\right)$

$4 < 2\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$

$14 - 2\sqrt{5} < 10$

$0 < x < 5 - 2\sqrt{5}$

$a^2 + 5 = 45$

$2ab =$

$a - b\sqrt{5}$

$-2ab\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

$\left(5 - 2\sqrt{5}\right)^2$

$\left(5+2\sqrt{5}\right)^2$

$\sqrt{10}$

$\left(5-2\sqrt{5}\right)$

$5 + 2\sqrt{5} <$

$< \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \quad ab = 10$

$= -4\sqrt{5} \vee -9$

$9 \vee 4\sqrt{5}$

$>$

$2015 \mid 5$

$-3\sqrt{10} < x - y < -4\sqrt{5} < -8$

$-10 < -\sqrt{90} < -9$

$-9 < -4\sqrt{5} < -8$

$-10 \ldots -9$

$-4\sqrt{5} \ldots -9 \quad -9 < -4\sqrt{5} < -8$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} = \frac{-2\sqrt{2023}}{\sqrt{45-\sqrt{2023}}+\sqrt{45+\sqrt{2023}}}$

$5+2\sqrt{5} \quad < \quad < \quad 5-2\sqrt{5}+3\sqrt{10}$

$\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45}$ V - 9

$-\pi; \pi.$

$+ 1234$
$\quad 789$
2023 ✓

$\begin{cases} \cos^{23}(2x-\frac{5}{4}) = -1 \\ \sin^{10}(x-\frac{\pi}{3}) = 1 \end{cases}$

$-\frac{5\pi}{6} \quad \frac{5\pi}{6}$

$\sin^{10}(x-\frac{\pi}{3}) = 1$

$\cos(2x-\frac{5}{4}) = -1$

$x-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}+2\pi k$

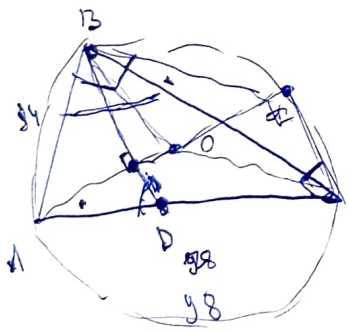
$\cos = \pi + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+2\pi k =$
$= \frac{5\pi}{6}+2\pi k$

$2x-\frac{5\pi}{4} = \pi+2\pi k$

$2x = \pi+\frac{\pi}{4}+2\pi k$

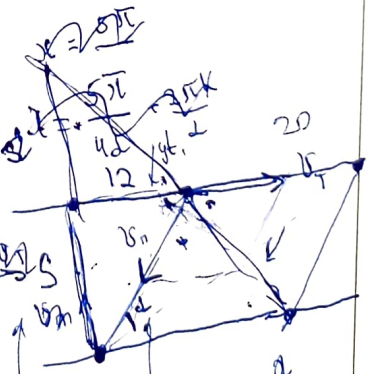
$2x = \frac{5\pi}{4}+2\pi k.$



$tg\alpha - tg\beta = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$

$2 \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{4}+2\pi k$

$\frac{5\pi}{5}$



AP $\frac{5'}{5} = \frac{12}{20} = \frac{BJ}{5} \rightarrow$

$\frac{\sqrt{1,5^2+12^2}}{\sqrt{5^2+20^2}} = \frac{3}{5}$

$v_n = x$

$v_1 = y$

$5+5$

$5' = \frac{3}{5}5 + \frac{3}{5}5$

$5' = \frac{3}{2}5$

$\rightarrow v$

$5^2+12^2+5^2+32^2-2\sqrt{\ldots} = 20^2$

$25^2-2\sqrt{\ldots} =$

$yt = 12 \quad \frac{1,5\,5^2+12^2}{5^2+20^2} = \frac{y}{15}$

$xt, \quad \sqrt{5^2+32^2}$

$tg\alpha = \frac{2,5}{20} =$

$= \frac{5}{8}$

$20^2-12^2 = 8 \cdot 32 - 32^2 =$

$15+7 \quad tg\frac{5}{12}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Часть 1.

Задача 1) Сравним: $\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}}$ $\vee -9$

$9 \vee \sqrt{45+\sqrt{2023}} - \sqrt{45-\sqrt{2023}}$ $|^2$

$81 \vee 45+\sqrt{2023} + 45-\sqrt{2023} - 2\sqrt{2025-2023}$

$81 \vee 90 - 2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2} \vee 9$

$2\sqrt{2} < 9 \Rightarrow \sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}} < -9$

С другой стороны $\sqrt{2000} < \sqrt{2023} < 45 = \sqrt{2025}$

$\Rightarrow \sqrt{45+\sqrt{2023}} > \sqrt{20\sqrt{5}+45} = \sqrt{(5+2\sqrt{5})^2} = 5+2\sqrt{5}$

$\sqrt{90}$

$5-2\sqrt{5} > \sqrt{45-\sqrt{2023}} > 0$

$\Rightarrow \sqrt{45+\sqrt{2023}} + \sqrt{45+\sqrt{2023}} > 0 - \sqrt{90} > -10$

$\Rightarrow \left[\sqrt{45-\sqrt{2023}} - \sqrt{45+\sqrt{2023}}\right] = -10$

Задача 2) Заметим, что $1234 \sin^{20}(x-\frac{\pi}{3}) \leq 1234$

$-789 \leq 789 \cos^{23}(2x-\frac{\pi}{4}) \leq 789$

$\Rightarrow$ т.к. $1234 + 789 = 2023$, то данные ур-ния р-сильны системе:

$$\begin{cases} \sin^{20}(x-\frac{\pi}{3}) = 1 \\ \cos^{23}(2x-\frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x-\frac{\pi}{3}) = 1 \\ \cos(2x-\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ 2x-\frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

Наш отрезок решения на отр. $[-\pi; \pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow x$ может быть только $\frac{5\pi}{6}$.

x из 1 ур-ния:

$x_1 = \frac{5\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi < -\pi$

$x \in \frac{5\pi}{6}$

Чистовик 2.

Перенесем все в одну часть:

$$2 \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$2 = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} + \frac{6}{5} \cdot 2k, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$2 = \frac{3}{2} + \frac{12}{5}k, \; k \in \mathbb{Z}.$$

при $k = 0$: $2 = \frac{3}{2}$

при $k = -1$: $2 = \frac{3}{2} - \frac{12}{5} = \frac{15 - 24}{10} = -\frac{9}{10}$

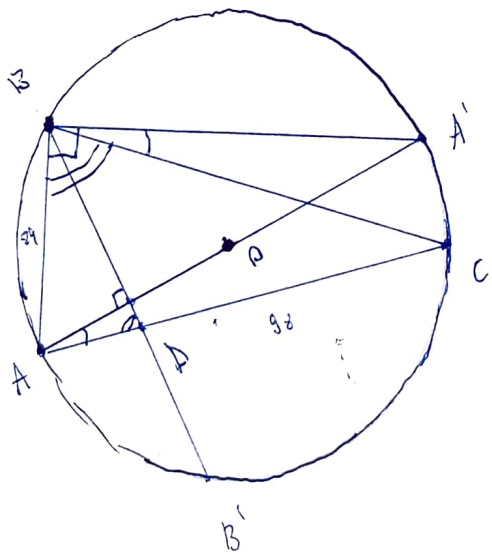
$\Rightarrow |2| < \frac{3}{2}$

при $k > 1$: $|2| > \frac{3}{2} > \left|-\frac{9}{10}\right|$

при $k < -1$: $|2| > \left|-\frac{9}{10}\right|$

$\Rightarrow$ наименьшее по мод. 2: $2 = -\frac{9}{10}$.

Задача 3



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

24-83-99-39 (85.1)

Вписывать 3

1) Прямая AD не пересек с окр. в т. A' : AA' - хорда, прох. через ц. окр-ти D => AA' - диаметр

2) $\angle ABA' = 90°$, т.к. опир. на диаметр

3) $\angle A'AC = \angle A'BC$, т.к. опир на 1 дугу

4) Значит $\angle ABC = 90 - \angle A'BC = 90 - \angle A'AC = \angle ADB$

5) Значит, $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ по II приз. ($\angle A$ - общий)

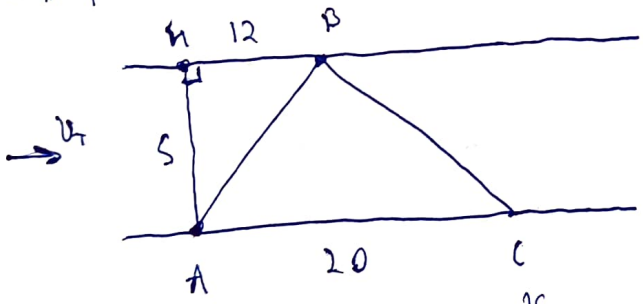
6) Значит $\frac{AD}{84} = \frac{84}{98}$

$$AD = \frac{84 \cdot 84}{98} = \frac{84 \cdot 84}{2 \cdot 49} = \frac{42 \cdot 84}{7 \cdot 7} = \frac{6 \cdot 84}{7} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 12}{7} = 6 \cdot 12 = 72$$

$$\Rightarrow CD = AC - AD = 98 - 72 = 26$$

Задача 4)

Изобразим всё описанное:



Пусть скорость $v_п$, течения $v_т$.

Плот за 1 случай в воде, что $v_п \cdot t_1 = S$, $v_т \cdot t_1 = 12$

t_1 - время плавания

$\Rightarrow \frac{v_п}{v_т} = \frac{S}{12}$

Запишем ур-ния для случая, когда плывёт лодка обратно:

$$\begin{cases} |AB| = v_п \cdot t_2 \\ v_т \cdot t_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \frac{v_п}{v_т} = \frac{|AB|}{20} = \frac{S}{12} \Rightarrow |AB| = \frac{20S}{12} = \frac{5S}{3}$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик. 4

Задание 7. Пифагора ЕГЭ 1 4413:

$5^2 + 12^2 = \left(\frac{55}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow 9S^2 + 36^2 = 55^2$

$\Leftrightarrow 16S^2 = 36^2$

$\Leftrightarrow 4S = 36 \Leftrightarrow S = 9$ м. – ширина реки

$\uparrow 4S > 0$

Задача 5) ~~Заметим, что $|x| = |-x|$ и $|y| = |-y|$~~

Исходная сис-ма р-ний: $\begin{cases} |x| + \big||y|-3\big| - 3 = 1 \\ |x| + \big||y|-3\big| - 3 = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| + \big||y|-3\big| = 4 \\ |x| + \big||y|-3\big| = 2 \end{cases}$

Т.к. будем решать задачу графически, Т.к. у нас $|x|$ и $|y|$, то достаточно построить фигуру при $x \geq 0$, $y \geq 0$, а дальше провести симметрично относительно осей Ox и Oy и центра к-ат.

при $x \geq 0$, $y \geq 0$: первое р-ние: $x + |y-3| = 4$

при $y \geq 3$: $x + y - 3 = 4$

$y = -x + 7$

$0 < y < 3$: $x + 3 - y = 4$

$y = x - 1$

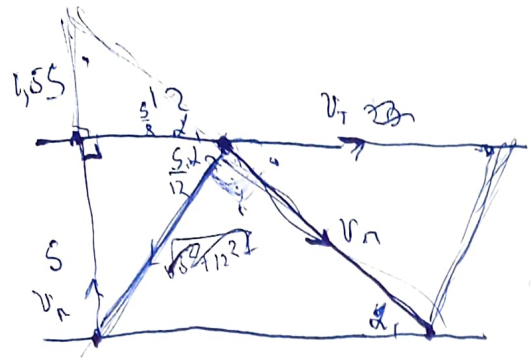
второе р-ние: $x + |y-3| = 2$

$y \geq 3$: $x + y = 5$

$y = -x + 5$

$y < 3$: $x + 3 - y = 2$

$y = x + 1$



$\frac{1,55}{2,55} = \frac{?}{5}$ V.

20

$tg\alpha_1 = \frac{1,55}{12} = \frac{35}{24} = \frac{5}{8}$

$tg\alpha + tg\beta =$

$\sin\alpha =$

$S = v_п \cdot t_1$

$12 = v_т \cdot t_1$

$\frac{v_п}{v_т} = \frac{5}{12}$

$v_т \cdot t_2 = 20$

$v_п \cdot t_2 = 2,5 S'$

$v_п \cdot t_2 = \frac{55}{3}$

$\frac{v_п}{v_т} = \frac{S'}{20} = \frac{5}{12}$

$S' = \frac{20 \cdot 5}{12} = \frac{100}{8} =$

$S^2 + 12^2 = \frac{255^2}{9}$

$9S^2 + 36^2 = 255^2$

$16S^2 = 36^2$

$4S = 36$

$S = 9$ м.

$x \geq 0$

$y \geq 0$

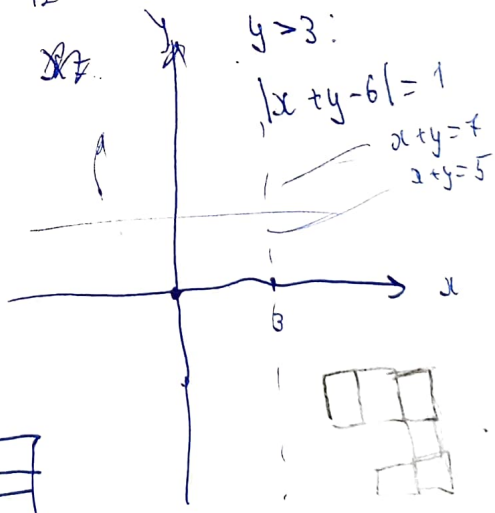
$|x + |y-3| - 3| = 1$

$y > 3$:

$|x + y - 6| = 1$

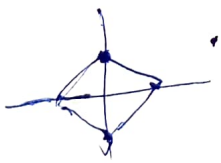
$x + y = 7$

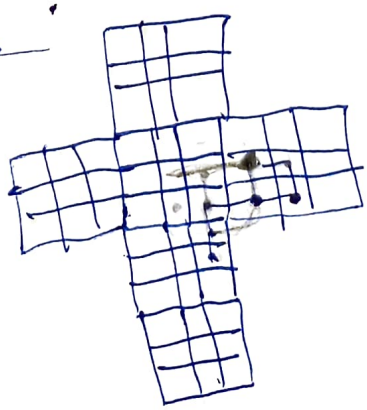
$x + y = 5$

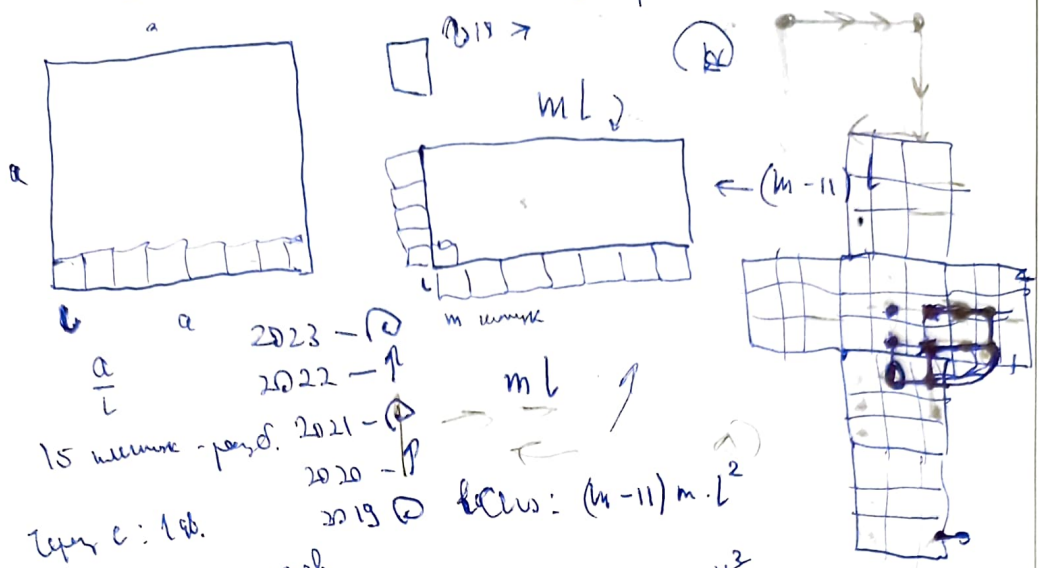


$|x| + |y| = 3$

$y = -x + 3$







$$\frac{a}{l}$$

$$S = a^2$$

$$l^2$$

$$15 + m(m-11) = \frac{a^2}{l^2} - \text{цел.}$$

$$15 + m(m-11) = n^2$$

$$m^2 - 11m + (15 - n^2) = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot (15 - n^2) =$$

$$= 121 - 60 + 4n^2 =$$

$$= 4n^2 + 61 = k^2$$

$$(2n - k)(2n + k) = 61$$

$$\begin{cases} 2n - k = 1 \\ 2n + k = 61 \end{cases} +$$

$$4n = 62$$

$$n =$$

$$31^2 - 11^2 = 20 \cdot 42 = 9 \cdot 15 \quad 14 \quad 4c$$

(5) (8)

20

m = 2k + 3

m - 11 = 2k - 8

+ 11

2018 2021
2019 2022
2020 2023

2018 с. 2019 с. 2023 с.

2018

5 цветов. и только они же

2018 сек.
2019 - 1
2020 - 2
2021 - 3
2022 - 4
2023 - 5

Куб тёти

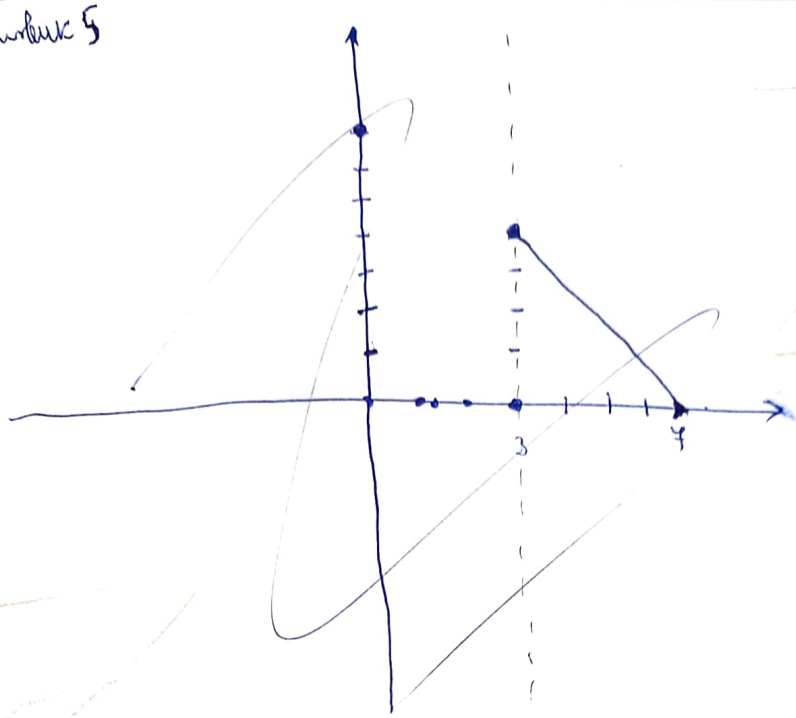
Куб начёт

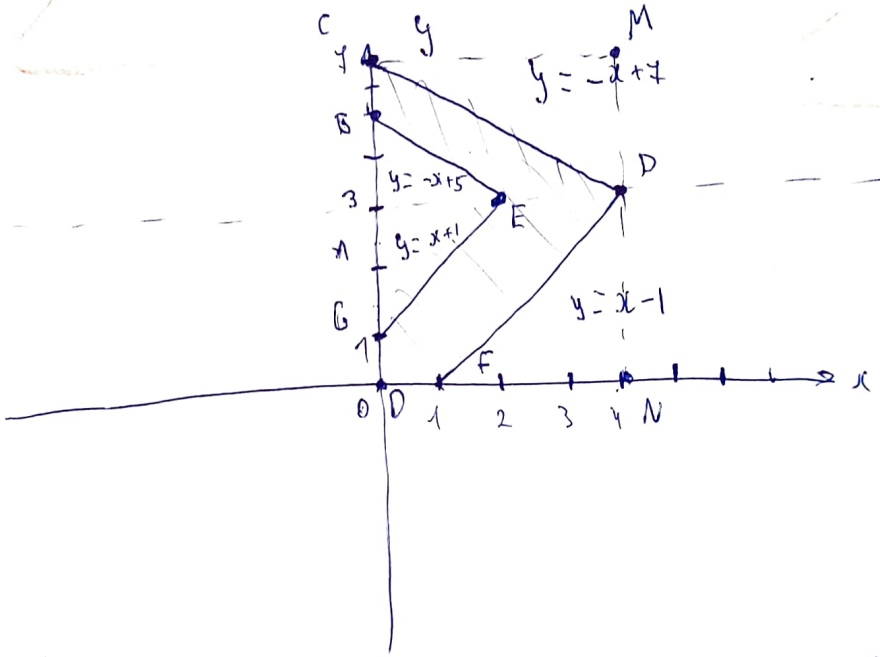
2023 с.

Был на кв. 5 раз сек. назад.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!
Выполнять задания на листе

Чертёж 5





Ясно, что после симметрии площадь фигуры не изменится =>

=> достаточно посчитать её площадь в 1 четверти и умножить

на 4 $S = S_{OCMN} - S_{ABE} - S_{CHD} - S_{FON} - S_{GAE} =$

$= 4 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 =$

$= 28 - 8 - 2 - 2 - 4,5 = 18 - 6,5 = 11,5$

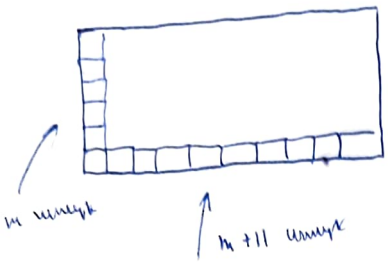
=> общая площадь фигуры: $11,5 \cdot 4 = 46$ ед^2

Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Участник 6

3-задача 6)

Рассмотрим внутри квадратную комнату:



Плитка в ее ширине помещается m плиток.

Плитка в длине m+11

Значит всего на внутреннюю комнату

Кол-во плиток: $m(m+11)$

Из, как мы знаем, 15 было истрачено $\Rightarrow$ всего плиток $15+m(m+11)$

Этими плитками собрались уложить квадратную комнату $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ пусть k-кол-во плиток. Плитки - квадраты натуральных чисел:

$15+m(m+11)=k^2 \Leftrightarrow m^2+11m+(15-k^2)=0$

↑ кв. ур-ние относительно m.

$\sqrt{D}=\sqrt{121-4(15-k^2)^{2}}=\sqrt{121-60+4k^2}=\sqrt{4k^2+61}$ ← должен быть целым числом, т.к. m – натуральное

$\Rightarrow$ имеем $4k^2+61=n^2$

$(2k-n)(2k+n)=-61$

$(n-2k)(n+2k)=61$ ← простое число

$n-2k$ - делитель.

$n+2k$

1) $\begin{cases} n-2k=61 \\ n+2k=1 \end{cases}$ +

$2n=62$

$n=31$, $k<0$ – не подх., плиток не отр. числа

2) $\begin{cases} n-2k=1 \\ n+2k=61 \end{cases}$ +

$\begin{cases} n=31 \\ k=15 \end{cases}$ $\Rightarrow$ имеем: $m^2+11m+15-15^2=0$

$m^2+11m-15\cdot 14=0$

$D=11^2+4\cdot 15\cdot 14=31^2$

$\Rightarrow$ т.к. $m>0$, то $m=\frac{-11+31}{2}=10$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Выполнять задания на [illegible]

24-83-99-39 (85.1)

Задача 3)

Обозначим верхние вершины (их номера) за $a_1 \dots a_6$, а нижние за $b_1 \dots b_6$

т.е имеем:

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6$

$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6$

т.к. из каждой вершины выходит 1 отрезок, то каждая a_i будет смежна с 1 b_i

1) a_1 смеж с b_6:

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6$ — гарант. 5 пар пересеч.

$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6$

a_2 и b_5 + 4 гарант., т.е. в сумме $5+4>7$ ✗

$\Rightarrow a_2$ и b_3 : 1 вар, анал. по пр: b_1 с a_3, b_2 с a_4 и т.д.

a_2 и b_2 : 1 пересеч. ост $\Rightarrow b_1$ с a_4

b_1 и a_3 : 2 сост.

a_2 и b_1 : еще 2: 1+1+1 = 3 способа, итого: 6 способов

2) a_1 смеж с b_5:

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ b_5\ a_6$

$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6$

1 гарант. и пересеч., ост 3:

a_2 и b_6 ✗

a_2 и b_4: 1

a_2 и b_3: еще 1: 2+1=3 сост.

a_2 и b_2: еще 2: 1+1+1 = 3 сост.

1+

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Участник 5

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Участник 10

1) a_1 след с b_6:

$\Leftrightarrow$ сколько способов след a_1 и a_6 и $b_1 \dots b_5$ нам нужны были

2 пары пересек.

$a_2 a_3 a_4 b_5 a_6$

$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5$ — 3 способов: $a_1 и b_3$: 1; $a_2 и b_1$: 2; $a_3 и a_2 и b_1$: 3 } р-т: 6

2) a_1 след с b_5:

$\Leftrightarrow$ $a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$

$b_1 b_2 b_3 b_4 b_6$ — 3 пары пересек. $1+2+3+4 = 10$

3) a_1 след с b_4:

$\Leftrightarrow$ ~~$a_2 a_3 a_4 b_5 b_6$~~

$a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$

$b_1 b_2 b_3 b_5 b_6$ — 4 пары пересек: $1+2+3+4+5 = 15$.

4) a_1 след с b_5:

$\Leftrightarrow$ $a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$

$b_1 b_2 b_3 b_4 b_6$ — 5 пар пересек.

~~$a_3 a_4$~~

3 из 2

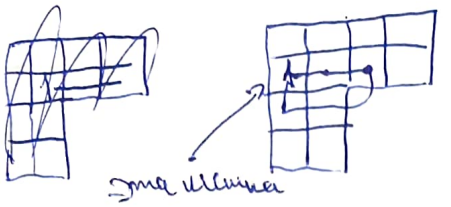
1 из 4

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

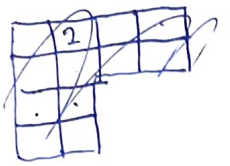
24-83-99-39
(85.1)

Сначала я

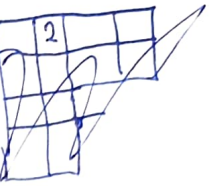
Для начала найдём, что клетка 1 как идут:



и оканчиваются координатой 2

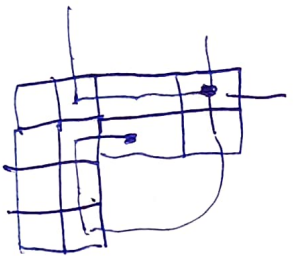


и аналогичной 2:

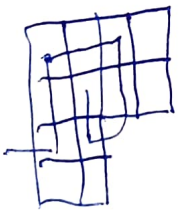


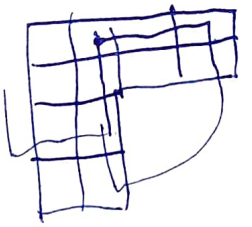
Теперь найдём, что другие не идут, разобрав их идущие

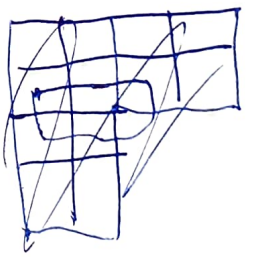
цикловые:

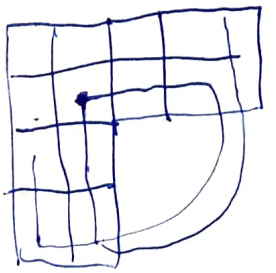


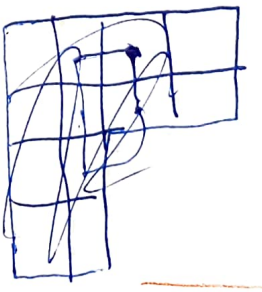
аналогично для других других циклов

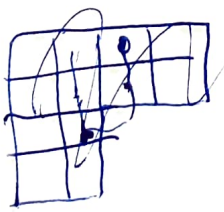


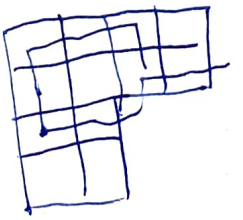






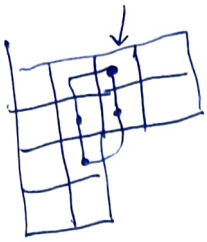






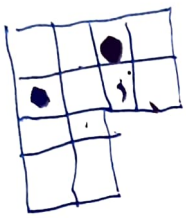
Участник 4

Но, знаешь, так подойдёт след клетка:



А остальные не годятся. Из стрелки из неё

Значит, которая находится в углу из синих клеток;



И ещё раз проверим не надо ли клеточки:

при ходе. по данному пути я должен по часовой стрелке

"Запрыгнуть" сюда и вернуться в исходную клетку, так чтобы

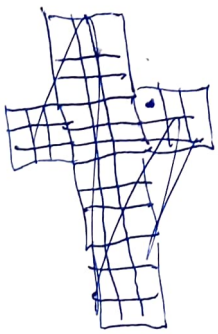
вернуться в эти синие. В остальных не будет клеток.

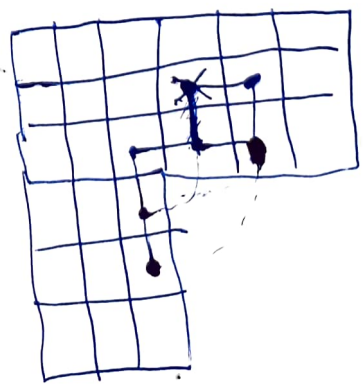
дольше чем увидеть с этих стрел.

Теперь след. Ход ~~повернуть налево~~ он идёт вперёд и комментарии через

сколько ходов он идёт вверх. На них все клетки:

1)





За 11 ходов

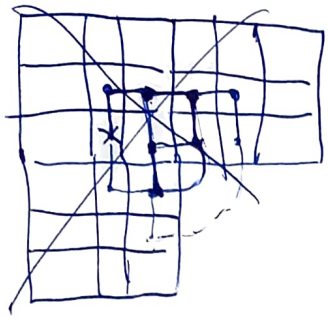
← траектория

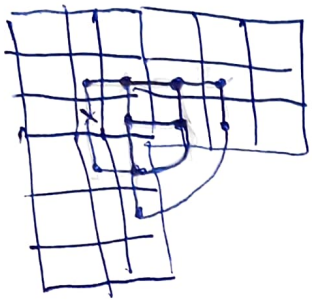
Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Выполнять задания на титульном

Чистовик 15

2)



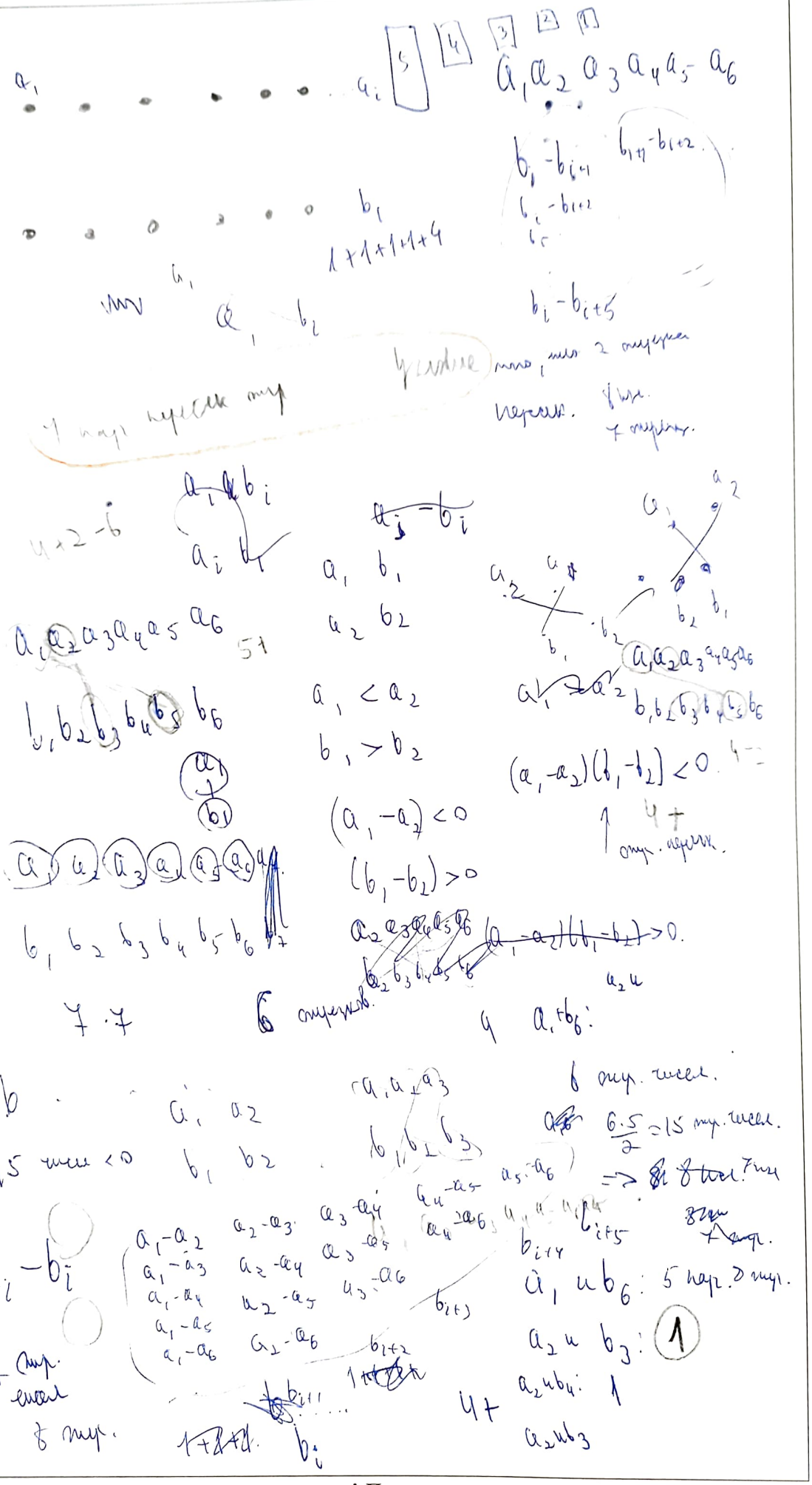


17 жуков

Це, т.к. за каждый ход. Итак 2023 в 1 из клеток, но возможны 2 хода.

Он вернётся за 11 или 17 секунд.

#4 Задача 8)



Участник №

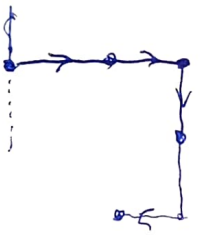
11.

Значит, всего клеток $15 + 10 \cdot 21 = 210 + 15 = 225$ клеток

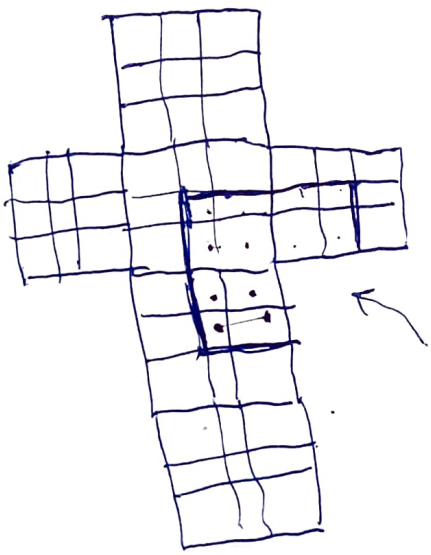
9

с учётом стенок.

Задача 7.) Из условия известно, что во время тех 5 секунд, кузнечик с последней клетки один раз, и этим прыг, жучок прыгал через "угол" кубика рубика. Действительно, если он прыгал бы прыгал в 1 сторону 2 раза, а в другую только 1: — без угла никак быть не может.

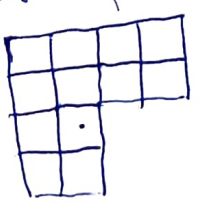


Теперь рассмотрим развёртку кубика рубика и найдём где тоже будет жучок:



Видно за все сколько развёртки так, что он прыгал из угла „i", оказавшись там, где был на рисунке

Получается, что достаточно рассмотреть 12 клеток, прилегающих к углу, ведь для остальных он прыгал не больше 2 раз. В этих углах



Таким образом, мы нашли искомое перемещение за заданный промежуток времени - 2023 сек.

Тестовый 9

Я начинал в 2019 сек. С куда начинаю. И, т.к. он мог идти в V. Смотр, т.к. он мог зайти в клетку с V стороны.

Допустим, что клетки ниже нас не было:

↑ зайдем.

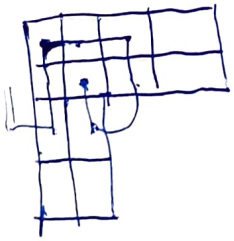
Т.к. у нас первая нож. в нож, что он мог тед. эти уже за перв. 3 секунды.

Дополнительно, пример хуже для 1 кроме:

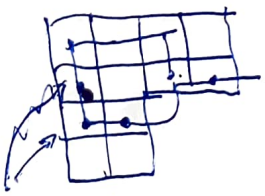
← для осн. алгоритма

для крайних:

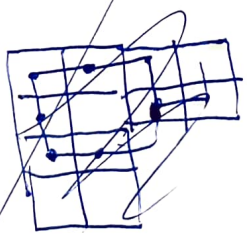
=> и для осн. нам "1" и "2" в том они не нужн.

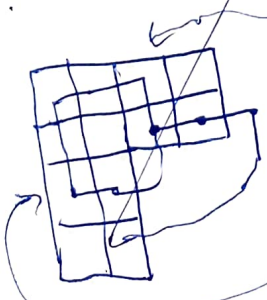


← и "умная не нужн".



не нужн.





← не нужн