0 116443 080001

11-64-43-08
(88.9)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Тилканова Рахмана-Али Рахимовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
11-64-43-08	75	15	15	15	15	15	0	0	0

75 (семьдесят пять)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

11-64-43-08 (88.9)

чистовик

№1

Возведем число $\left|\sqrt{45-\sqrt{2022}}-\sqrt{45+\sqrt{2022}}\right|$ в квадрат, получаем $90-2\sqrt{3}$. Данное число больше 9^2, т.к. $81<90-2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}<9 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 12<81$. И данное число меньше 10^2. Поэтому $9<\left|\sqrt{45-\sqrt{2022}}-\sqrt{45+\sqrt{2022}}\right|<10$. Значит $-10<\sqrt{45-\sqrt{2022}}-\sqrt{45+\sqrt{2022}}<-9$. Число -10 не превосходит данное число

Ответ: -10

$\sqrt{45-\sqrt{2022}}-\sqrt{45+\sqrt{2022}}<0$, т.к. $45-\sqrt{2022}<45+\sqrt{2022}$; $0<2\sqrt{2022}$.

№2

т.к. $0\leq \sin^{20}(\varphi)\leq 1$, то $0\leq 1234\sin^{20}(\varphi)\leq 1234$;

т.к. $-1\leq \cos^{22}(\varphi)\leq 1$, то $789\geq -789\cos^{22}(\varphi)\geq -789$;

т.к. $1234+789=2023$, то равенство может выполняться только при $\cos(\varphi)=-1$ и $\sin(\varphi)=\pm 1$. Тогда уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases}\cos\left(ax+\frac{\pi}{4}\right)=-1\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ax=\frac{3\pi}{4}+2\pi k_1 & k_1\in Z\\ x=\frac{\pi}{3}+\pi k_2 & k_2\in Z\end{cases}$$

Так как $x\in[-\pi;\pi]$, то из второго уравнения системы следует, что $x=\frac{\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}$. a равняться нулю не может, иначе $\cos\left(a\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Получаем, что $\frac{3\pi}{4a}+\frac{2\pi k_1}{a}=\frac{\pi}{3};-\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{9}{4}+6k_1;\ k_1\in Z \Rightarrow |a|_{min}=\frac{9}{4}\\ a=-\frac{9}{8}-3k_2;\ k_2\in Z \Rightarrow |a|_{min}=+\frac{9}{8}\end{array}\right. \Rightarrow a=-\frac{9}{8}$$

Ответ: $a=-\frac{9}{8}$

чистовик

№5

$S(2^{2020})+S(5^{2020})=S(2^{2020})+S\left(\frac{10^{2020}}{2^{2020}}\right)$

Пусть $S(2^{2020})=k+1$, тогда $10^k<2^{2020}<10^{k+1}$;

$\frac{10^{2020}}{10^k}>\frac{10^{2020}}{2^{2020}}>\frac{10^{2020}}{10^{k+1}}$. т.к. $\frac{10^{2020}}{10^k}=1\underbrace{00\ldots0}_{(2020-k)}$ и

$\frac{10^{2020}}{10^k}>\frac{10^{2020}}{2^{2020}}$. и $\frac{10^{2020}}{10^{k+1}}=1\underbrace{00\ldots0}_{(2020-k-1)}\Rightarrow S\left(\frac{10^{2020}}{10^k}\right)=S\left(\frac{10^{2020}}{10^{k+1}}\right)+1$,

то $S\left(\frac{10^{2020}}{2^{2020}}\right)=S\left(\frac{10^{2020}}{10^{k+1}}\right)=2020-k$. Значит:

$S(2^{2020})+S(5^{2020})=k+1+2020-k=2021$.

Ответ: 2021.

№3

$\sqrt{3x^4-9x^2+31}\geq\sqrt{2x^4+5x^2-18}$; $3x^4-9x^2+31\geq$
$\geq 2x^4+5x^2-18$; $x^4-14x^2+49\geq 0$; $(x^2-7)^2\geq 0$. т.к.
$|x^2-7|^3+1\geq 1$, то $\log_7(|x^2-7|^3+1)\geq 0$. Значит левая часть уравнения не меньше правой части. Чтобы выполнялось равенство, должно выполняться $\sqrt{3x^4-9x^2+31}=\sqrt{2x^4+5x^2-18}$, что возможно только при $(x^2-7)^2=0\Leftrightarrow x^2=7$. При подстановки $x^2=7$ как раз получается равенство и $\sqrt{2x^4+5x^2-18}>0$, т.к. $5x^2-18>0$; $35>18$. Получается, что $x^2=7$; $x=\pm\sqrt{7}$.

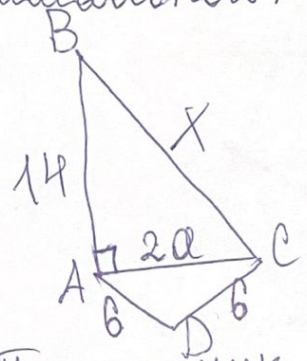
Ответ: $x=\pm\sqrt{7}$

$\sqrt{3x^4-9x^2+31}>0$, т.к. $\sqrt{49\cdot3-63+31}=\sqrt{115}>0$

чистовик.

№4

Возможно два варианта: либо обе стороны равные 6 смежные, либо находятся на противоположенных сторонах. Если предположить, что наибольшую площадь четырехугольника можно получить только если стороны равные 6 противоположены, то мы можем провести диагональ в таком четырехугольнике, после чего получится два треугольника. Мы можем перевернуть один из двух треугольников и состыковать его к оставшемуся треугольнику теми же сторонами что и до этого. Мы получили четырехугольник с максимальной площадью у которого стороны равные 6 находятся рядом. Значит нам достаточно разобрать случай, когда стороны равные 6 находятся рядом. Предположим, что мы нашли четырехугольник с максимальной площадью



Треугольник со сторонами 14, x, 2a - прямоугольный, иначе мы бы могли выбрать $l = \sqrt{14^2+14a^2}$ и $S^{ABC}_{\cancel{треуг.}\ \cancel{четырг.}} = 14a$. высота из т. B на основание AC меньше или равна 14; значит $S^{ABC}_{\cancel{четырг.}} \leq 14a$.

чистовик

№4 (продолжение)

площадь четыр-ка равна $14a+a\sqrt{36-a^2}$

находим производную относительно a

$14+\sqrt{36-a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{36-a^2}}$;

$14\sqrt{36-a^2}+36-2a^2=0$; $7\sqrt{36-a^2}=a^2-18$;

$\cancel{a^4}\ 49(36-a^2)=(a^2-18)^2$; $x^4+13a^2-1440=0$

$D=13^2+4\cdot1440=77^2$

$a^2=\frac{-13\pm77}{2}$; $a^2=\frac{77-13}{2}=32$ $\left(\frac{-13-77}{2}<0\right)$

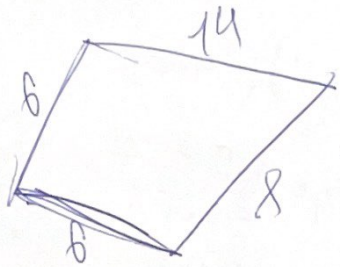
если взять $a^2=0$ и подставить в производную, то она будет положительной.

Значит в ~~т. $a^2=32$~~ т. $a=\sqrt{32}$ $S_{четыр}$ - максимальна.

$x=\sqrt{14^2+4a^2}=\sqrt{196+128}=\sqrt{324}=18$

Ответ: 18

черновик.



$a^2 = \frac{13 \pm 177}{2}$

$a_1 =$

$77 - 13 = 64$

$1764 - 324 = 1440$

$77 \cdot 77$

$121 \cdot 49 = 1089 + 484 = 1569$

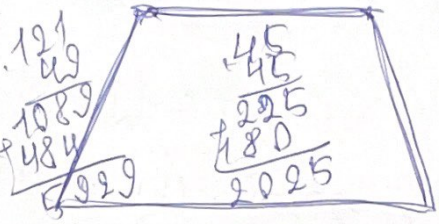
$45 \cdot 45 = 225 + 180 = 2025$

$1448 \cdot 4 = 5760$

$18 \cdot 18 = 144 + 18 = 324$

$18 \cdot 18 = 144 + 18 = 324$

11.7



$324 : 4 = 81$, $32 : 4$

$87 \cdot 87 = 49$

9.2

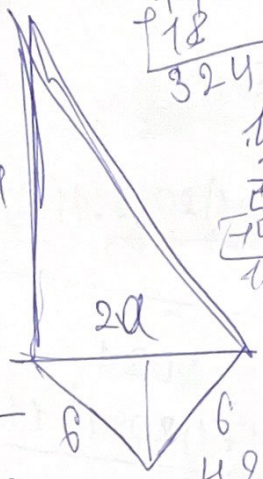
$14 +$

$324 : 16 = 14$, 2

$14 \cdot 14 = 56 + 14 = 196$

$D = 169 + 5760$

$5760 + 169 = 5.929$

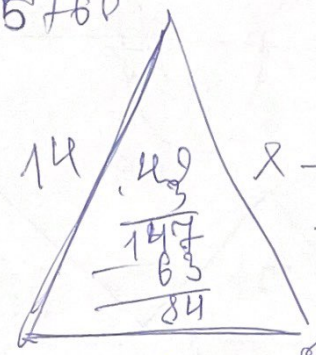


$49 \cdot 36 = 294 + 147 = 1764$

$49 - 36 = 13$

$32 \cdot 4 = 128$

14



$49 \cdot 3 = 147 - 63 = 84$

8

$84 + 31 = 175$

$128 + 128 = 326$

$a\sqrt{36-a^2}$

$73 \cdot 73 = 219 + 511 = 5329$

$\frac{2a\,14}{2} + a\sqrt{36-a^2}$

$196 + 128 = 324$

1629

$-2a^2$

$14 + \sqrt{36-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{36-a^2}} = 0$

$\frac{-2a^2}{2\sqrt{36-a^2}}$

$14\sqrt{36-a^2} + 36 - a^2 - a^2 = 0$

$7\sqrt{36-a^2} = a^2 - 18$

$49(36-a^2) = a^4 - 36a^2 + 18^2$

$a^4 + 13a^2 - 1440 = 0$

Черновик

$2\sqrt{-\frac{x^2}{4}+7x-13}^{\,2} = \left(\frac{x}{2}-7\right)(14+x)$

126
52
144

$-x^2+28x-52 = x^2-14^2$

$\frac{124\cdot 17}{2\cdot 36\ 3}$

72
49
121

$\frac{(4^2+1)4!}{60+10}$

$2x^2-28x-144=0$

$\frac{26\cdot 120}{17\cdot 24+30\cdot 2+5\cdot 2+2}$

$x^2-14x-72=0$

$x=7\pm\sqrt{11}$

$\frac{17\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{70}$

$(x-7)^2=11$

$\frac{260}{17\cdot 2+5+1}$

$\frac{((n+2020)^2+1)(2020+n)!}{((n-1)^2+1)(n-1)!}$

$\frac{26\cdot 60}{17\cdot 12+30+6}$

$\frac{13}{2}$

$\frac{(2022^2+1)2022!}{2}\cdot 11 = a_{2022}$

$17\cdot 24$

$\frac{26\cdot 6}{34\ 40}$

$\frac{(3^2+1)3!\cdot 3}{(2^2+1)2!}$

$6!$

2021

$\frac{(2021^2+1)2021!\cdot 11}{2}$

$30+5+1$

$10\cdot 3!$

15

$\frac{8\cdot 5}{2}$

$n=2$

$n-1=1$

$\frac{210\cdot 3}{5n}=6$

$\frac{(4^2+1)4!}{2+5\cdot 2+30\cdot 2}$

n^2-2n+2

$10\cdot 6$

$\frac{n(\cancel{n^2+1})(n+1)(\cancel{(n+1)^2+1})(n+2)((n+2)^2+1)}{((n-1)^2+1)(\cancel{n^2+1})(\cancel{(n+1)^2+1})}$

$\frac{17\cdot 24}{36}\ 2$

$\frac{17\cdot 24}{2+5\cdot 2+30\cdot 2}$

$\frac{n(n+1)(n+2)((n+2)^2+1)}{((n-1)^2+1)}$

$\frac{(2022^2+1)2022!}{(2021^2+1)2021!+(2020^2+1)2020!+\ldots+(2^2+1)2!}$

$\frac{5\cdot 2}{2}$

$\frac{10\cdot 6}{2+5\cdot 2}=\frac{5\cdot 10\cdot 6}{6\cdot 2}$

$\frac{((n-1+m)^2+1)(n-1+m)!}{((n-1)^2+1)(n-1)!}$

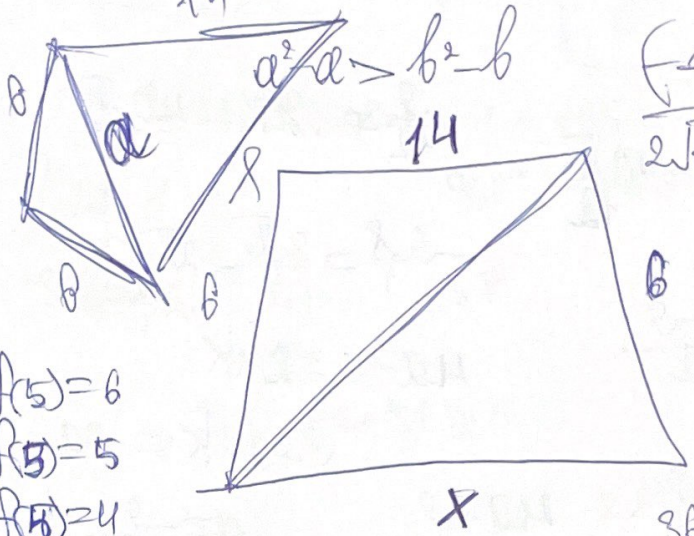
черновик

$\sqrt{-\frac{x^2}{4}+7x-13}\,(14+x)$

$a-b<a^2-b^2$

$a^2-a>b^2-b$

$\frac{\left(-\frac{x}{2}+7\right)(14+x)}{2\sqrt{-\frac{x^2}{4}+7x-13}}$



$-\frac{2x}{24}$

$f(5)=6$

$f(5)=5$

$f(5)=4$

$f(5)=3$

$f(5)=2$

$f(5)=1$

$36-49+7x-\frac{x^2}{4}$

$S(2^{2020})+S\left(\frac{10^{2020}}{2^{2020}}\right)$

$10^k<2^{2020}<10^{k+1}$

$\frac{14+x}{2}$

$2021-k-1$

$k+1$ $+$

$2020-k$

2021

$3x^4-9x^2+81\geq 2x^4+5x^2-18$

$\sqrt{36-\left(\frac{14-x}{2}\right)^2}\left(\frac{14+x}{2}\right)$

$x^4-14x^2+49\geq 0$

$49-36=13$

$(x^2-7)^2\geq 0$

$\left(7-\frac{x}{2}\right)^2$

$\sqrt{-13+7x-\frac{x^2}{4}}\left(\frac{14+x}{2}\right)$

черновик

$$\frac{3\pi}{4a} + \frac{2\pi k}{a} = \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{9}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\frac{9}{12a} + \frac{2\pi k}{a} = \frac{-8\pi}{12}$$

$$\frac{9}{12} + 2\pi k = \frac{4a\pi}{12}$$

$$\frac{9\pi}{12} + 2\pi k = \frac{4a\pi}{12}$$

$$-\frac{9}{8} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$2k = \frac{4a-9}{12}$$

$$4a - 9 = 24k$$

$$9 + 24k = -8a$$

$$k = \frac{4a-9}{24}$$

$$4a = 9$$

$$a = -\frac{9}{8} - 3k$$

$$k = \frac{a}{6}$$

$$a = \frac{9+24k}{4}$$

$$\frac{9}{4} + 6k$$

$$\frac{9}{12} + 2k = -\frac{8a}{12}$$

$$\frac{a}{3} = \frac{9}{12} + 2k$$

$$-9x = 6\pi + 16\pi k$$

$$a = \frac{9}{4} + 6k$$

$$a = -\frac{9}{8} - 3k$$

$$\frac{9}{12} + 2k = -\frac{8a}{12}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} - \frac{16\pi k}{9}$$

$$9 + 24k = -8a$$

черновик.

$\log_7(|x^2-7|^3+1)+\sqrt{3x^4-9x^2+31}=\sqrt{2x^4+5x^2-18}$

$3x^2-9x+31$ $(x-7)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$3x^2-21x+12x-84+115$

$\log_7 1$ $3x^4$

$x^2-3x+\frac{9}{4}$

~~$3\log_7(|x^2-7|)$~~ $3x$

$\frac{27}{4}$

$3x^2-9x+31\geq 0$

$2x^4+5x^2-18$

x^4-14x^2+49

$a=b$

$(x^2-7)^2$

$\log_7(\sqrt{a^2-b^2}^3+1)+a=b$

$+\sqrt{a}=\sqrt{b}$

$\log_7(\sqrt{a-b}^3+1)+\sqrt{a}=\sqrt{b}$

$\log_7(\sqrt{(a-b)(a+b)}^3+1)+(a-b)=0$

$(|x^2-7|+1)((x^2-7)^2-|x^2-7|+1)$

$\log_7(\sqrt{a-b}+1)+\log_7((a-b)^2-\sqrt{a-b}+1)+\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$

черновик.

$\cancel{2\sqrt{1011}}$

$45 > \sqrt{2022}$

$\sqrt{\frac{90+2\sqrt{2022}}{2}}$

$337 \cdot 3$

$\cos^{23}(ax+\frac{\pi}{4})=-1$

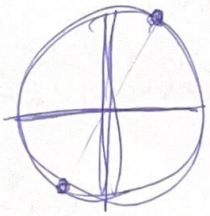
$1011 \mid 3$
$9 \quad 337$
11
9
21
21
0

$337 \mid 17$
$-17 \quad 1$
167

$45 \cdot 45$
225
$+180$
2025

147

107



43

14

$\frac{1234^2}{x^2}+\frac{789^2}{x^2}=1$

47

$2025-2022$

3

$-1<\sqrt{45-\sqrt{2022}}-\sqrt{45+\sqrt{2022}}$

$x^2=1234^2+789^2$

$\cancel{45}-\sqrt{2022}-\cancel{45}-\sqrt{2022}$

$-2\sqrt{2022}$

$x=\frac{3\pi}{4a}+\frac{2\pi k}{a}$

$1234 \cdot 1234$
6

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{6}+\pi k$

$45-\cancel{\sqrt{2022}}+45+\cancel{\sqrt{2022}}-2\sqrt{3}$

$(90-2\sqrt{3})=x^2$

1234
$+789$
2023

$81<90-2\sqrt{3}<100$

$ax+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$

$\begin{cases}\cos(ax+\frac{\pi}{4})=-1\\ \sin(x+\frac{\pi}{6})=\pm 1\end{cases}$

$2\sqrt{3}<9$

$2<3\sqrt{3}$

$\begin{cases}ax=\frac{3\pi}{4}+2\pi k\\ x=\frac{\pi}{3}+\pi k\end{cases}$