0 475520 920006

47-55-20-92
(89.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Усольцева Ивана Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
47-55-20-92	70	15	15	15	0	10	0	15	0
	70	15	15	15	0	10	0	15	0

70 (семьдесят)

47-55-20-92 (89.6)

Задача 1.

$[\sqrt{45+\sqrt{2023}} - \sqrt{45-\sqrt{2023}}] = t$

$(t+1)^2 > 45+\sqrt{2023}+45-\sqrt{2023}-2\sqrt{2025-2023} \geq t^2$

$(t+1)^2 > 90-2\sqrt{2} \geq t^2$; $100 > 90-2\sqrt{2} > 81$,

тогда $t = 9$.

Ответ: 9

Задача 2.

$1234\sin^{20}(x+\frac{\pi}{3}) - 789\cos^{23}(2x+\frac{\pi}{3}) = 2023$;

$1234+789=2023$; $\sin^{20}(x+\frac{\pi}{3}) \in [0;1]$;

$\cos^{23}(2x+\frac{\pi}{3}) \in [-1;1]$, тогда $\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \pm 1$ и

$\cos(2x+\frac{\pi}{3}) = -1$; $k, n, m, t \in \mathbb{Z}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}+2\pi k \\ 2x+\frac{\pi}{3} = \pi+2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}+2\pi m \\ 2x+\frac{\pi}{3} = \pi+2\pi t \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x = \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}+2\pi n) \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6}+2\pi m \\ x = \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}+2\pi t) \end{cases} \end{array}\right.$$

$x \in [-\pi;\pi]$, тогда в первом случае:

$\frac{2\pi}{32} + \frac{2\pi n}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+n) = \frac{1}{6}$; $2 = 2(\frac{1}{3}+n)6 =$

$= 12\frac{1}{3}+12n = 4+12n$; $|2_{min1}| = 4$, во втором

случае: $-\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\pi+2\pi t)$; $2 = -\frac{6}{5}\cdot\frac{2}{3} - \frac{6}{5}\cdot 2t =$

$= -\frac{4}{5} - \frac{12}{5}t$; $|2_{min2}| = \frac{4}{5}$

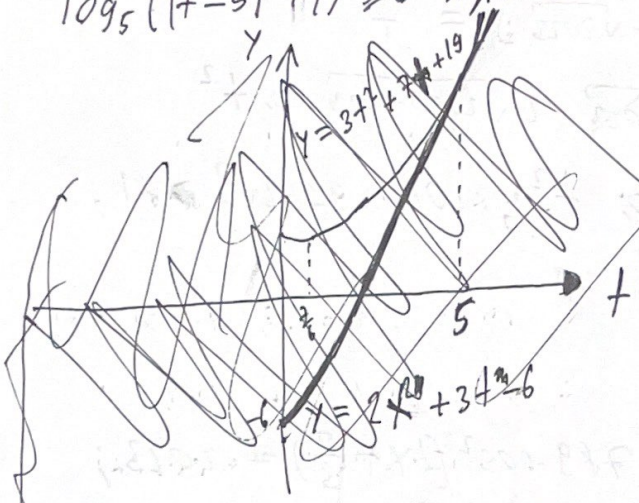
Ответ: $|2_{min}| = \frac{4}{5}$, $2_{min} = -\frac{4}{5}$

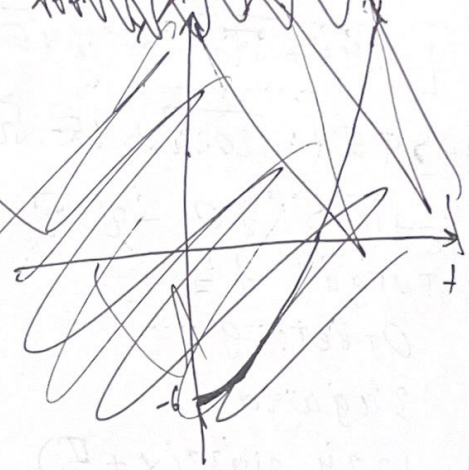
Задача 3.

$\log_5(|x^2-5|^3+1) + \sqrt{3x^4-7x^2+19} = \sqrt{2x^4+3x^2-6}$; $x^2 = t; t \geq 0$

$\log_5(|t-5|^3+1) + \sqrt{3(t-\frac{7}{6})^2+16\frac{1}{12}} = \sqrt{2(t+\frac{3}{4})^2-7\frac{1}{8}}$

$\log_5((t-5)^3+1) \geq 0$ при $\forall t$.





$3x^4-7x^2+19=2x^4+3x^2-6$; $x^4-10x^2+25=0$;

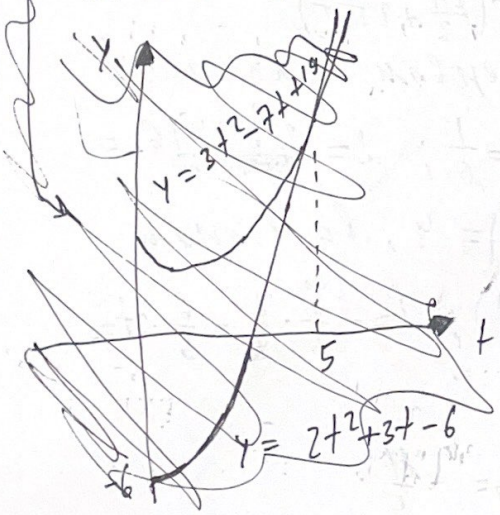
$(x^2-5)=0$ – одна точка касания, значит

$\sqrt{3x^4-7x^2+19} \geq \sqrt{2x^4+3x^2-6}$, и они равны

при $t=5$, тогда и $\log_5 1=0$, значит

единственное решение при $t=5$; $x=\pm\sqrt{5}$

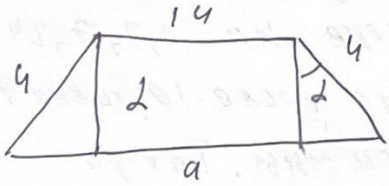
Ответ: $x=\pm\sqrt{5}$



Задача 4.

~~Наибольшая площадь будет тогда, когда четырёхугольник~~

Если стороны по 4 прилегают к стороне 14, тогда S_{max} будет тогда, когда четырёхугольник симметричен:



$S = 14\cdot 4\cdot\cos\alpha + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cos\alpha\cdot\sin\alpha =$

$= 56\cos\alpha + 8\sin 2\alpha;$

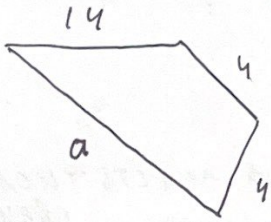
$S' = -56\sin\alpha + 8\cos 2\alpha;$

$-7\sin\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha = 0;\quad \sin^2\alpha + \frac{7}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2} = 0;$

$D = \frac{49}{4} + 2 = \frac{57}{4};\quad \sin\alpha = -\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4};$

$a = 14 + 2\cdot 4\sin\alpha = \cancel{14} - \cancel{14} + 2\sqrt{57} = 2\sqrt{57}$

Если стороны по 4 не одна у стороны 14:

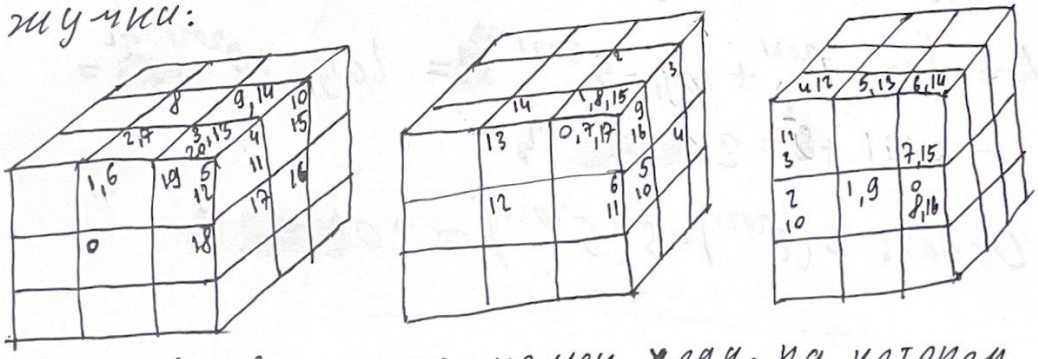


Максимальная площадь, когда две стороны лежат на одной прямой, тогда получается треугольник, что противоречит условию.

Ответ: $a = 2\sqrt{57}$

Задача 7.

Рассмотрим возможные варианты похождений жучка:



Номер в квадратике - номер хода, на котором жучок оказался на нём (не от начального)

Если жучок будет делать всего 2 перехода через одно ребро, то он будет двигаться по

„круговой" траектории с периодом в 8с, такой вариант нам не подходит. Значит жучёк переходит минимум 2 ребра в процессе движения. Как видно из иллюстраций, в одном примере жучок был на одной клетке на 3, 13 его ходах, разница следующая после 10 равна 7. Во втором примере на 0, 7, 17, 24 секундах, разница следующая после 10 равна 7. Остальные варианты аналогичны. Тогда наименьшее число секунд после 2023-й, через которое жучок снова окажется на этом квадратике, равно 7.

Ответ: 7.

Задача 5.

$S(2^{2021}) + S(5^{2021}) = ?$

$S(n) = [\log_{10}(n)]$; [ ] - целая часть числа сверху

$A = S(2^{2021}) + S(5^{2021}) =$

$= [\log_{10} 2^{2021}] + [\log_{10} 5^{2021}]$, $\log_{10} 2^{2021}$ и $\log_{10} 5^{2021}$ - не целые числа, поэтому

$A = \log_{10} 2^{2021} + \log_{10} 5^{2021} + 2 = \log_{10} 10^{2021} + 2 =$

$= 2021 + 2 = 2023$

Ответ: $S(2^{2021}) + S(5^{2021}) = 2023$

$$a_{n-1} = \frac{(n-1)^2+1}{(n^2+1)\cdot n}\ ;\ a_{n-2} = \frac{((n-1)^2+1)\ \cancel{(n^2+1)}}{\cancel{(n^2+1)}\cdot n\ ((n+1)^2+1)(n+1)}$$

$$a_{n-3} = \frac{((n-1)^2+1)\ \cancel{((n+1)^2+1)}}{\cancel{((n+1)^2+1)}\ (n+1)\ n\ ((n+2)^2+1)(n+2)}$$

$$S = ((n-1)^2+1)\left(\frac{1}{(n^2+1)n} + \frac{1}{((n+1)^2+1)(n+1)n} + \frac{1}{((n+2)^2+1)(n+2)(n+1)n} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{((n+2)^2+1)(n+1)(n+2)n} = \frac{k}{((n+1)^2+1)(n+1)n} + \frac{p}{((n+2)^2+1)(n+2)} = \frac{(n+1)n(n^2+2n+2)p - (n^2+4n+5)k}{((n+1)^2+1)(n+1)n(n+2)((n+2)^2+1)} =$$

$$\frac{1}{(n+1)^3+(n+1)} \qquad \frac{1}{(n+2)^3(n+1)+(n+2)(n+1)}$$

4; 25 3

$S(n) = [\log_{10}(n)]$; 2 +1

2 5 2 16 125 5

1+1 3 +2

Черновик

32 625 5

4+1

(и далее)

$S(2^{2021})+S(5^{2021})$

$S(n)=k;\ 10^k < 2^{2021} < 10^{k+1};\ 2^k\cdot 5^k < 2^{2021} < 10\cdot 2^k\cdot 5^k$

$2^m 5^m < 5^{2021} < 10\cdot 2^m\cdot 5^m;\ m+k=?$

$5^k < 2^{2021-k} < 10\cdot 5^k;\ 2^{k-2021}5^k < 1 < 10\cdot 2^{k-2021}5^k$

$10^k < 2^{2021} \mid \wedge \frac{1}{k};\ 10 < 2^{\frac{2021}{k}};$

$\frac{2021}{k} \geq 3;\ 10\cdot 10 > 2^{\frac{2021}{k}};\ k > \frac{2021}{3};\ k < \frac{2021}{6}$

$64 = 2^6$

$10^k < 2^{2021} < 10\cdot 10^k;\ 10^k < 2^{2021} \mid \wedge \frac{1}{k};$

$10 < 2^{\frac{2021}{k}};\ 2^{\frac{2021}{k}} \geq 16;\ \frac{2021}{k} \geq 4;$

$k \leq \frac{2021}{4};$

$505\frac{1}{4}$

$10^{k+1} \geq 2^{2021} \mid \wedge \frac{1}{k+1};$

$10 \geq 2^{\frac{2021}{k+1}};\ 2^{\frac{2021}{k+1}} \leq 10;$

$2^{\frac{2021}{k+1}} < 10;\ 2^{\frac{2021}{k}} > 10;\ \frac{2021}{k} > \log_2 10$

$k < 2021\log_2 10;\ k+1 > \frac{2021}{\log_2 10};$

$2021\log_2^{-1}10 < k < 2021\log_2^{-1}10;\ k = [2021\log_{10}2]$

$2021\log_{10}2\ \ p;\ \log_{10}2\ \ \frac{p}{2021};\ 10^{\frac{p}{2021}}\ 2$

$$\frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1}\,\frac{(n^2+2n+2)(n+1)}{(n^2+1)} = \frac{(n^2+2n+2)(n+1)n}{n^2-2n+2}$$

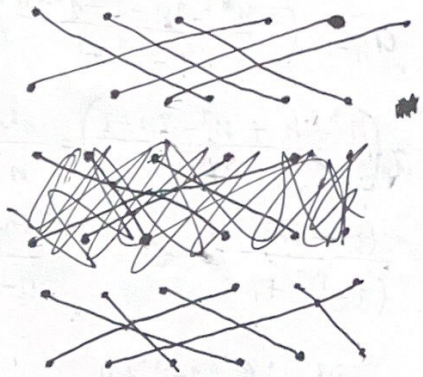
$$\frac{(n^2+2n+2)(n+1)n}{(n^2-2n+2)}\,\frac{(n^2+4n+5)(n+2)}{(n^2+2n+2)} = \frac{(n^2+4n+5)(n+2)(n+1)n}{n^2-2n+2}$$

$$\frac{(n^2+4n+5)(n+2)(n+1)n}{n^2-2n+2}\,\frac{(n^2+6n+10)(n+3)}{n^2+4n+5} = \frac{(n^2+6n+10)(n+3)(n+2)(n+1)n}{n^2-2n+2}$$

сумма равна a_1 $(\ldots (n^2+4n+5)(n+2)(n+1)n +$

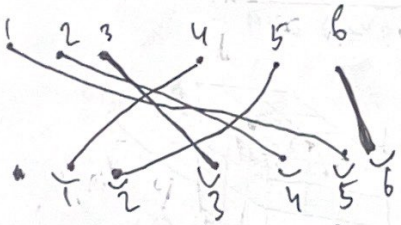
$+ (n^2+6n+10)(n+3)(n+2)(n+1)n + (n^2+1)n$

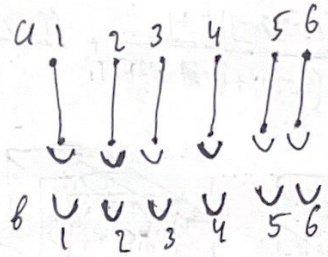
8.



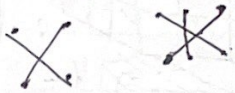
9 пересек. пар. = 9 точек пересеч (если по уве)

$C_n^k = 9$





а − в = кол-во пересечений с другими отрезками.

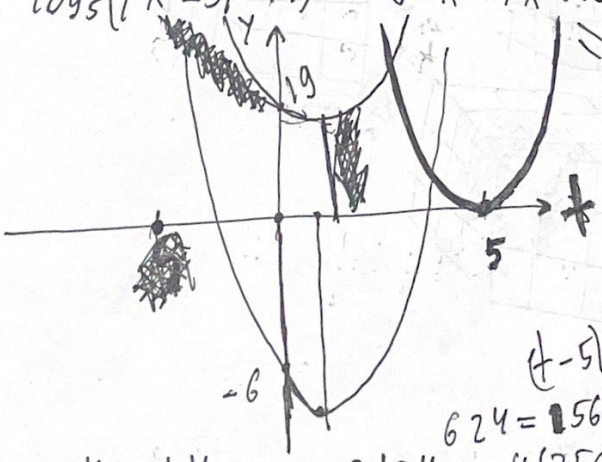


2.

3. $\log_5(|x^2-5|^3+1) + \sqrt{3x^4-7x^2+19} = \sqrt{2x^4+3x^2-6}$; $x^2 = t$

$= 2(t-\frac{3}{4})^2 - 7\frac{1}{8}$

$= 3(t-\frac{7}{6})^2 + 16\frac{1}{12}$



$3x^4 - 7x^2 + 19 = 2x^4 + 3x^2 - 6$

$x^4 - 10x^2 + 25 = 0$

$(t-5)^2 = 0$ $(x^2-5)^2 = 0$

в т. $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$ пересеч

$624 = 156 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 39 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 13$

$124 = 31 \cdot 4$; $3124 = 4(750+25+6) = 4 \cdot 781$

$\log_5(z^3+1)$; $y = \log_5(\ )$; $k = 5^y$;

$\frac{dk}{dy} = \frac{5^{dy}}{dy}$

$t = 5$; $x = \pm\sqrt{5}$

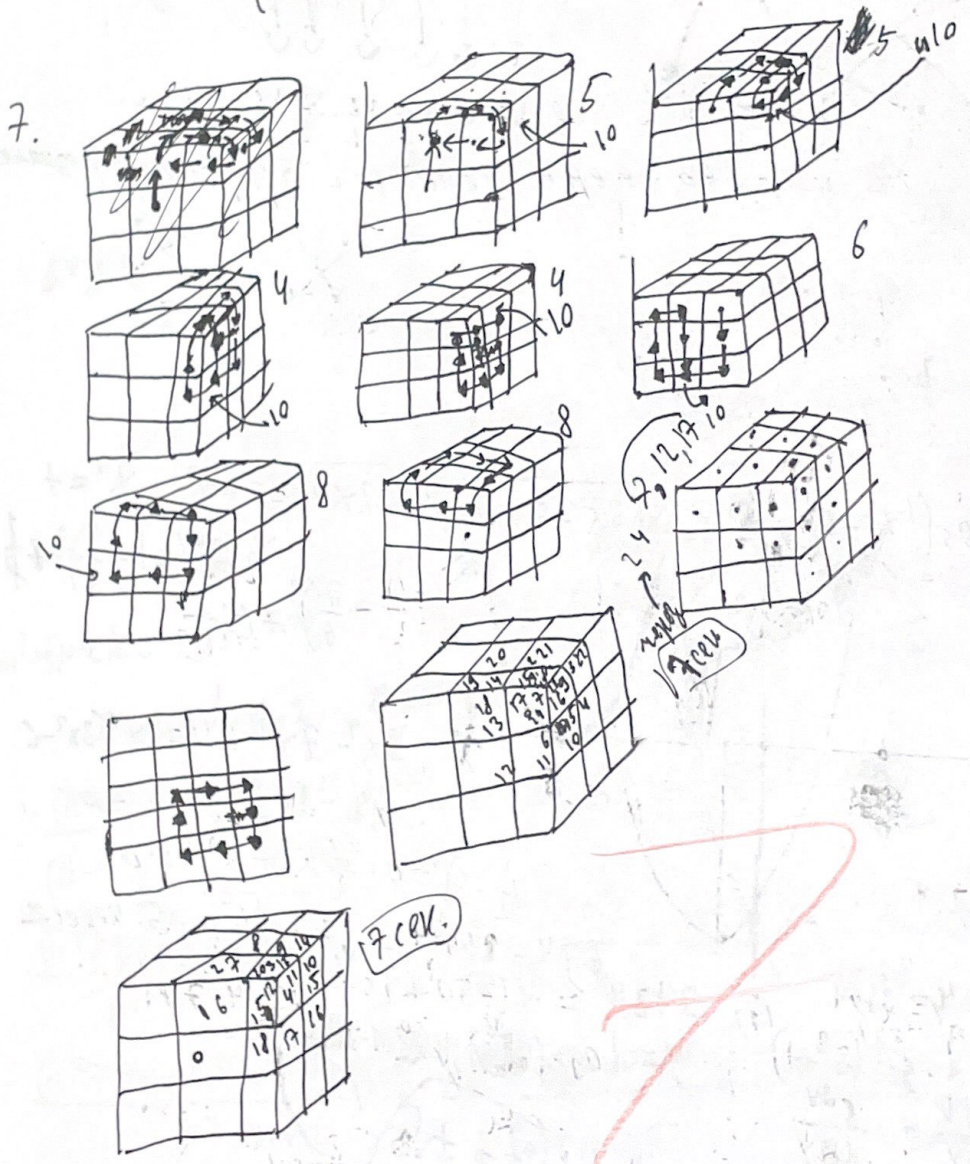
$$a_n + a_{n-1} = a_{n-1}\left(1 + \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1}\right) = a_{n-1}\left(\frac{n^2-2n+2+n^3+n}{(n-1)^2+1}\right) = \frac{n^3+n^2-n+2}{(n-1)^2+1}$$

$$a_{n-1} + a_n = a_n\left(1 + \frac{(n-1)^2+1}{(n^2+1)n}\right) = a_n\left(\frac{n^3+n+n^2-2n+2}{n^3+n}\right) = \frac{n^3+n^2-n+2}{n^3+n}$$

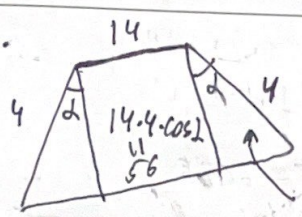
$$\frac{a_{2022}}{\sum_{i=1}^{2021} a_i} = ? \; ; \quad 1 + \frac{(2^2+1)2}{(2-1)^2+1} + \frac{(3^2+1)3}{(3-1)^2+1} \quad \frac{(2^2+1)2}{(2-1)^2+1}$$

$$a_{2021}\left(1 + \frac{(2020-1)^2+1}{(2020^2+1)\cdot 2020} + \frac{((2020-1)^2+1)((2019-1)^2+1)}{(2019^2+1)\,2019} + \dots\right.$$

7.



4.



$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\cos\alpha\sin\alpha = 8\cos\alpha\sin\alpha;$

$56\cdot\cos\alpha + 16\cos\alpha\sin\alpha \to max$

$f(\alpha) = 7\cos\alpha + \sin 2\alpha \to max;\ f'(\alpha) = -7\sin\alpha + \cos 2\alpha =$

$= -7\sin\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha = 0;\quad 2\sin^2\alpha + 7\sin\alpha - 1 = 0;\ \sin^2\alpha + \frac{7}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2} = 0;$

$b = \frac{49}{4} + 2 = \frac{57}{4};\ \sin\alpha = -\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4};$

$a = 14 + 4\cdot 2\cdot\sin\alpha = 14 + 2\sqrt{\frac{57}{4}} - 2\cdot\frac{7}{4} = \sqrt{\frac{57}{2}}$

5. $s(2^{2021}) + s(5^{2021})$

2 4 8 16 32 64 128 256 512

1024 2048 4096 8192 16384 32768 65536

130 --- 260 --- 520 --- 1024 --- 2048 --- 4096 ---

5 25 125 625 3125 15625 78125

6. $\{a_n\};\ a_1 = 13;\quad a_n = a_{n-1}\frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1};\ \frac{(n^2+1)n}{n^2-2n+2} =$

$= \frac{(n^2+1)n}{n^2+(n-1)2};\quad \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{(n-1)^2+1}{(n^2+1)n} = \frac{n^2-2n+2}{(n^2+1)n} =$

$= \frac{n^2+1-2n+1}{(n^2+1)n} = \frac{1}{n} - \frac{2n-1}{(n^2+1)n} =$

$n^2+1 = (n-1)(n+1)+2;\ (n-1)^2+1 = (n-1-1)(n-1+1)+2 =$

$= n(n-2)+2;\quad a_n = a_{n-1}\frac{(n-1)(n+1)+2}{n(n-2)+2};$

$a_{n+1} = a_{n-1}\frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1}\cdot\frac{(n^2+2n+2)(n+1)}{n^2+1} = a_{n-1}\frac{(n^2+2n+2)(n+1)}{n^2+2-2n}$

$13,\ 13\cdot 5 = 75;\ 75\cdot 6 = 450$

$\frac{5\cdot 2}{2} = 5;\ \frac{10\cdot 3}{5} = 6$

$\frac{17\cdot 4}{10} = \frac{34}{5};\ 90\cdot 34 = 3060$

$538 = 48\cdot 11 = 6\cdot 8\cdot 11$

$6\cdot 8\cdot 11 + \frac{13\cdot 5\cdot 6}{5}\cdot 17\cdot 2$

Черновик

1. $\left[\sqrt{45+\sqrt{2023}} - \sqrt{45-\sqrt{2023}}\right] \ldots = t$

$40^2 = 1600$; $45^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025$

$45 + 45 = 90 \approx 9^2$

$\sqrt{45+\sqrt{2023}} - \sqrt{45-\sqrt{2023}} > 9$; $45 + \cancel{\sqrt{2023}} + 45 - \cancel{\sqrt{2023}} -$

$-2\sqrt{(45+\sqrt{2023})(45-\sqrt{2023})} > 81$

$90 - 2\sqrt{2} > 81$

$9 > 2\sqrt{2}$

$81 > 8$

$90 - 2\sqrt{2} < 100$

$t < 10$

$t > 9$ $\Rightarrow$ $[t] = 9$

2. $[-\pi; \pi]$; $1234\sin^{20}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - 789\cos^{23}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 2023$

$1234 + 789 = 2023$; $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1$ и $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 2x+\frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi n \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ 2x+\frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi t\right) \end{cases}$$

Если $x = \frac{\pi}{6}$, то $\frac{2\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{6}$; $\alpha = 4$; Если $x = -\frac{5\pi}{6}$, то

$-\frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{2\alpha}$; $-\alpha = \frac{4}{5}$; $\alpha = -\frac{4}{5}$; $\frac{4}{5} < 4$;

Ответ: $\boxed{\alpha = -\frac{4}{5}}$

3. $\log_5(|x^2-5|^3+1) + \sqrt{3x^4-7x^2+19} = \sqrt{2x^4+3x^2-6}$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^4+3x^2-6 \geq 0 \\ 3x^4-7x^2+19 \geq 0 \\ |x^2-5|^3+1 \geq 0 \end{cases}$

$3x^4 - 7x^2 + \frac{49}{12} - \frac{49}{12} + 19 = \frac{-49+228}{12} = \frac{179}{12}$

$\sqrt{3}x^2$ $\quad$ $\sqrt{3}x^2 \cdot 2\frac{7}{2\sqrt{3}}$;

$2x^4 + 3x^2 + \frac{9}{8} - \frac{9}{8} - 6 = \frac{57}{8}$

$\sqrt{2}x^2$ $\quad$ $\sqrt{2}x^2 \cdot 2\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^2 - 7\frac{1}{8}$; $\sqrt{3}\left(x^2 - \frac{7}{6}\right)^2 + 16\frac{1}{12}$