



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Устенко Ивана Павловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист Дж

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
49-70-81-46	75	15	15	15	0	10	10	0	10

Чистовик, лист 2

N 2 (продолжение)

$$\begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \\ \sin(x + \frac{\pi}{3}) = -1 \\ \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = -\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{5\pi}{6} \\ 2x = -\frac{4\pi}{3} \\ 2x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$2 = \frac{-\frac{4\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = -8$$

$$2 = \frac{-\frac{4\pi}{3}}{-\frac{5\pi}{6}} = \frac{8}{5}$$

$$2 = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 4$$

$$2 = \frac{-\frac{2\pi}{3}}{\frac{5\pi}{6}} = -\frac{4}{5}$$

→ наим. по модулю: $\frac{4}{5}$

Ответ: $\frac{4}{5}$

N 3

Сделаем замену: $t = x^2$, $t \geq 0$

$$\log_5(x^3 - 5)$$

$$\log_5(1-t-5)^3 + 1 + \sqrt{3t^2 - 7t + 19} = \sqrt{2t^2 + 3t - 6}$$

$$|t-5|^3 \geq 0 \Rightarrow \log_5(1-t-5)^3 + 1 \geq \log_5 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{3t^2 - 7t + 19} \leq \sqrt{2t^2 + 3t - 6}$$

Докажем, что $\sqrt{3t^2 - 7t + 19} \geq \sqrt{2t^2 + 3t - 6}$

$$3t^2 - 7t + 19 \geq 2t^2 + 3t - 6$$

$$t^2 - 10t + 25 \geq 0$$

искомое ур-е.

$(t-5)^2 \geq 0$, и.т.д. $\Rightarrow$ Если решение есть, то оно только $t=5$,

иначе, $\sqrt{3t^2 - 7t + 19} > \sqrt{2t^2 + 3t - 6}$. Проверим $t=5$:

$$\log_5 1 + \sqrt{45 - 35 + 19} = \sqrt{50 + 15 - 6}$$

$$0 + \sqrt{29} = \sqrt{59}, \text{ и.т.д. } \Rightarrow x^2 = 5, x = \pm \sqrt{5} \text{ Ответ: } \pm \sqrt{5}$$

Чистовик, лист 3

N 5

Допустим $S(2^{2021}) = x$, $S(5^{2021}) = y$. Тогда:

$$10^{x-1} < 2^{2021} < 10^x$$

$$10^{y-1} < 5^{2021} < 10^y$$

$$10^{x+y-2} < 10^{2021} < 10^{x+y}$$

$$x+y-2 < 2021$$

$$x+y > 2021$$

$$2021 < x+y < 2023 \Rightarrow x+y = 2022 = S(2^{2021}) + S(5^{2021}) \Rightarrow \text{Ответ: } 2022$$

N 8

1 2 3 4 5 6
2 3 4 5 6
3 4 5 6
4 5 6
5 6
6

Отрезком (x, y) будем называть такой отрезок, ~~то~~ который состоит из x -ой по счету точки верхнего ряда и y -ой по счету точки нижнего ряда. Отрезки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будут пересекаться тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2, y_1 < y_2$ или $x_1 < x_2, y_1 > y_2$. Допустим n наших отрезков: $(1, y_1), (2, y_2) \dots (n, y_n)$. Тогда введем $F_1, F_2 \dots F_n$, где

F_n показывает количество отрезков, пересекающихся с (n, y_n)
1 $y_1 F_1$ Заметим, что если (n, y_n) и (m, y_m) пересекаются,
2 $y_2 F_2$ то $n < m$, то $y_n > y_m \Rightarrow$
3 $y_3 F_3$ Заметим, что если (n, y_n) и (m, y_m) не пересекаются,
4 $y_4 F_4$ то $n < m$, то $y_n < y_m \Rightarrow F_n$ показывает
5 $y_5 F_5$ нам, сколько из множества $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ больше
6 $y_6 F_6$ чем y_n . Тогда $F_1 \leq 5, F_2 \leq 4 \dots F_5 \leq 1, F_6 = 0$. Замечая, что по такому набору, ~~то~~ ^{однозначно} определяется ровно 1 набор отрезков. Среди $(y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ ровно 5- y_1 чисел, что больше чем y_1 (т.к. $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ перестановка $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). $\Rightarrow$
 $6 - y_1 = F_1 \Rightarrow y_1 = 6 - F_1$. Определив y_1 , можно ^{однозначно} определить y_2 , т.к. множество возможных y_2 ^{однозначно} равно 5. (т.к. это множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{y_1\}$, где y_1 мы ^{однозначно} определили. В этом множестве все числа разные $\Rightarrow$ зная F_2 мы сможем ^{однозначно} определить y_2)
Аналогично для y_3, y_4, y_5 и y_6 , ч.т.д.

Следовательно из доказательства

Чистовик, лист 4

N 8 (продолжение)

Нам нужно 9 пар ~~перес.~~ отрезков $\Rightarrow$ это $6 \cdot 5 - 9 = 6$

пар непересекающихся отрезков. Заметим, что это кол-во

равно $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 6$. ~~Мы всели задачу~~

~~Сумму 6 с помощью 6 неот. чисел можно получить след. образом~~

Найдём все варианты $F_1 \leq 5, F_2 \leq 4, F_3 \leq 3, F_4 \leq 2, F_5 \leq 1, F_6 = 0$, что

их сумма = 6. Переберём

Handwritten list of combinations of $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ that sum to 6, grouped by the value of F_1 (indicated by a subscript below the group):

- $F_1 = 5$: 510000, 501000, 500100, 500010, 500001
- $F_1 = 4$: 420000, 402000, 400200
- $F_1 = 3$: 330000, 321000, 320100, 320010, 302100, 302010, 300210, 312000, 310200, 301200
- $F_1 = 2$: 222000, 221100, 221010, 220110, 212100, 212010, 202110, 202101, 201210, 201120
- $F_1 = 1$: 211100, 231000, 230100, 230010, 203100, 203010
- $F_1 = 0$: 130000, 130100, 130010, 103200, 123000, 121100, 112110, 111210, 122100, 122010, 120210, 112200, 102210
- $F_1 = 0$: 041000, 040100, 040010
- $F_1 = 0$: 033000, 032100, 032010, 031200, 030210
- $F_1 = 0$: 022200, 022110, 021210, 012210

Итого: 8988

* Разложить в строке a, b, c, d, e, f , $a = F_1, b = F_2, c = F_3, d = F_4, e = F_5, f = F_6$

Чистовик, лист 5

N 6

Докажем, что $a_n = \frac{a_1}{2} \cdot n! \cdot (n^2 + 1)$

Для $a_1 = \frac{a_1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = a_1$

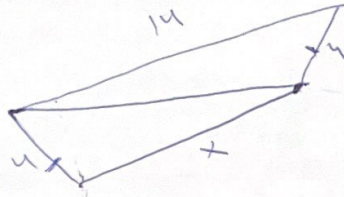
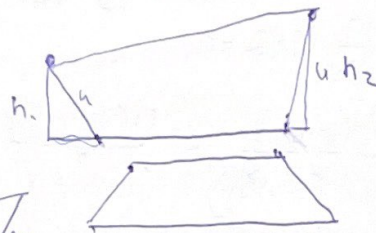
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n! \cdot (n^2 + 1)}{(n-1)! \cdot ((n-1)^2 + 1)} = \frac{n(n^2 + 1)}{(n-1)^2 + 1} \quad \text{ч.г.}$$

Тогда $a_{2022} = \frac{2022(2022^2 + 1)}{2021^2 + 1}$

Черновик

Век $a_n =$

h_1^2

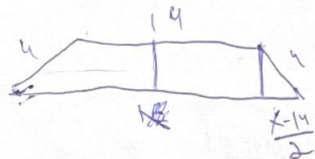
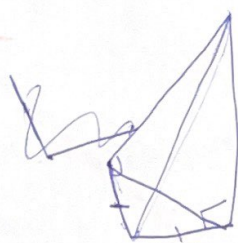


$$\frac{4x \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{14 \cdot 4 \cdot \sin \beta}{2} \leq \frac{4x}{2} + \frac{14 \cdot 4}{2}$$

$$S \leq 2x + 28$$



$$S = 2x + 28$$



$$\frac{14+x}{2}$$

$$\frac{(n^3+1)n}{(n-1)^3+1}$$

$$1 \ 6 \ 36 \ 240 \ 1800$$

$$\frac{240}{36} = \frac{120}{18} = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$$

$$(n-1)! (n(n^3+1) + (n-1)^3+1)$$

$$\frac{1800}{240} = \frac{90}{12} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2} = \frac{30}{4}$$

$$\frac{n!(n^3+1)}{2}$$

$$\frac{n!(n^3+1)}{(n-1)!(n-1)^3+1}$$

$$1 \ 5 \ 30 \ 204$$

$$\frac{204}{30} = \frac{102}{15} = \frac{34}{5}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n^3+1)n}{(n-1)^3+1} \cdot \frac{(n-1)!(n^3+1)}{(n-1)!(n^3+1) + (n-2)!(n^3+2)}$$

$$\frac{n!(n^3+1)}{(n-k)!(n-k)^3+1}$$

$$6 \cdot \frac{34}{5}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n^3+1)n}{(n-1)^3+1} \cdot \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3+1} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n^3+1}{(n^3+1)}$$

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)^3+1}{(n-1)^3+1} \cdot \frac{(n+2)^3+1}{(n+1)^3+1} = \frac{(n+2)^3+1}{(n-1)^3+1}$$

$$a_{n+k} = a_{n-1} \cdot ((n+k)^3+1)(n+k)(n+k) \dots (n+1)$$

$$a_1 = \frac{n!(n^3+1)}{n!}$$

$$a_{k+2} = \frac{a_1}{2} \cdot ((k+2)^3+1)(k+2) \dots 2$$

$$a_{k+2} = \frac{(k+2)!((k+2)^3+1) \cdot a_1}{2}$$

$$a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a_1 \quad a_n = n!(n^3+1) \cdot \frac{a_1}{2}$$

$$a_3 = a_1 \frac{n!(n^3+1)}{2}$$

$$n!(n^3+1) + (n-1)!(n-1)^3+1$$

$$(n-1)!(n^3+n^2-n+2)$$

$$n^4 - n^3 - n^2 - n - 2 + n^3 - 4n + 4 + 1$$

$$(n-1)!(n^3+n^2-n+2)$$

$$(n-1)!(n^3+n^2-n+2)$$

$$n^4 - n^3 - n^2 - n + 3$$

$$(n-1)!(n^3+n^2-n+2)$$

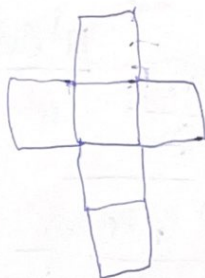
$$(n^3-1)(n+1)$$

$$(n-1)!(n^3+n^2-n+2) + (n-2)!(n-2)^3+1$$

$$(n^3+n^2-n+2)(n-1) + n^3-4n+4+1 =$$

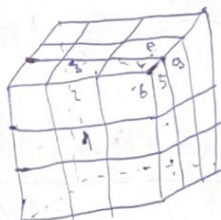
Черновик

510
420
411
330
321
222

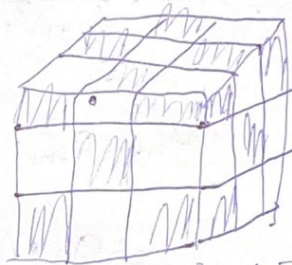


(x_1, x_2) (x_1, y_1)
 (y_1, y_2) (x_2, y_2)
 $x_1 > y_1$ $x_1 > x_2$
 $x_2 < y_2$ X

y_1
 y_2
 y_3
 y_4
 y_5
 y_6
 F_1
 F_2
 F_3
 F_4
 F_5
 F_6

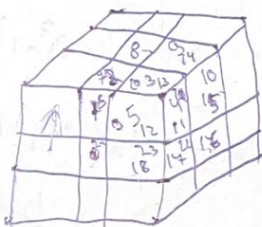


$\frac{65}{30}$ $\frac{6.5}{2}$ $x_1 - 1$
15



x_1
 x_2
 x_3
 x_4
 x_5
 x_6

1 y_1
2 y_2
3 y_3
4 y_4
5 y_5
6 y_6



1 2 3 4 5 6
X X X X X X
1 2 3 4 5 6
1 5 - 2 3
2 0 - 0 2
3 4 - 1 2
4 2 - 0 2
5 5 - 0 1
6 6 - 0 0

$x_2 = 1$

$x_3 = 1$

$$a_1 = 13 a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{18}{2} \cdot 5$$

$$a_3 = a_2 \cdot 6 = 30 a_1$$

$$a_4 = 204 a_1 \quad 1560$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} \quad \text{Зерновик}$$

$$\frac{26.5}{14} \cdot 204 \cdot 12 \quad \frac{10.3}{41}$$

$$\frac{17.4}{10} = \frac{18.34}{5} \cdot 30 a_1$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 34 \\ \times 6 \\ \hline 204 \\ \times 26 \\ \hline 1560 \end{array}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n^2+2n+2)(n+1)}{n^2+1} \cdot \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1}$$

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ 6.5 \\ 12.17 \\ 24.65 \\ \hline 1560 \\ + 240 \\ \hline 1800 \end{array}$$

$$\frac{(n^2+2n+2)(n^2n)}{n^2-2n+2} \cdot \frac{204 \cdot 14}{17 \cdot 12} \cdot \frac{204}{36}$$

$$\frac{n^2+2n+4-2}{n^2-2n+4-2} \cdot \frac{(n+2)^2-2}{(n-2)^2-2} = \frac{(n+2-\sqrt{2})(n+2+\sqrt{2})}{(n-2+\sqrt{2})(n-2-\sqrt{2})}$$

$$a_{n+1} = a_{n-1} \cdot \frac{((n+1)^2+1)(n+1)n}{((n-1)^2+1)} \quad 26 \cdot 60$$

$$\frac{((n+1)^2+1)(n^2n)}{(n-1)^2+1} \cdot \frac{(n^2+2n+2)(n+1)}{(n^2+2n+2)(n+1)}$$

$$n^3+3n^2+4n+2 \quad (n+1)(n^2+2n+2)$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{(n-1)^2+1}$$

$$n(n^2+1) \rightarrow \frac{n(n+1)((n+1)^2+1)}{(n-1)^2+1}$$

$$\begin{array}{r} 260.18 \\ 520.3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 520 \overline{) 8} \\ 48 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$65.24$$

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 Черновик

1024 2048 4096 8192

$10^{21} < 2^{2021} < 10^x$

$10^{21} < 5^{2021} < 10^y$

$10^{x+y} < 10^{2021} < 10^{x+y}$

$2^{10} \approx 10^3$

$2^{2020} \approx 10^{606}$

$2^{2021} < 10^{607}$

$2^{2021-x} < 5^x$

$\log_5 2^{2021-x} = x$

$(2021-x) \log_5 2 = x$

$2021 \cdot \log_5 2 - x \log_5 2 = x$

$2x \cdot \sin \alpha + 28 \sin \alpha$

$7x \cdot \sin \alpha$

$x = \frac{2021 \cdot \log_5 2}{14 \log_5 2}$

$\frac{1}{3} = \log_5 \frac{1}{2}$

$a_{n-1} = a_n \frac{(n-1)^2 + 1}{(n^2 + 1)n} = \frac{n^2 - 2n + 2}{n^3 + n^2 + n}$

$a_n + a_{n+1}$

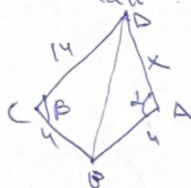
$a_n = \frac{(n^2 + 1)n}{(n-1)^2 + 1} a_{n-1} + a_{n-1}$

$a_{n-1} \left(\frac{n^3 + n + (n-1)^2 + 1}{(n-1)^2 + 1} \right) = n^3 + n^2 - n + 2$

числовик, лист 6

N 4

1 случай: стороны длины 4 соседние:



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{4x \sin \alpha}{2} + \frac{56 \sin \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \leq 1, \sin \beta \leq 1 \Rightarrow$$

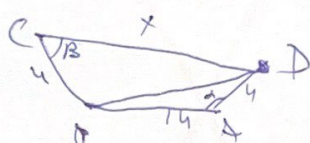
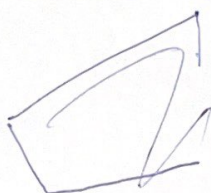
$$S_{ABCD} \leq 2x + 28. \text{ Равенство достигается,}$$

когда $\sin \alpha = \sin \beta = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = 90^\circ \Rightarrow$ Прямог. Треуг.

$\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ равны по гипот. и катету ($AC=CD=4$) $\Rightarrow S_{ABCD} =$

$$2S_{ABC} = 56$$

2 случай: стороны длины 4 несоседние



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{4x \sin \alpha}{2} + \frac{56 \sin \beta}{2}. \text{ Это максимум}$$

Макс. Площадь при $\sin \alpha = \sin \beta = 1 \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow$

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 56$$

Ответ: 56

Черновик

$$\frac{789}{23} + 2023 = 1234 \sin^{20}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$1234 \sin^{20}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 202$$

$$510000 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{2023 + 789 \cdot 23}{1234}} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

501000
500100
500010
4

$$2023 + 789 \cdot \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < 1234$$

$$1234 \cdot 20 \cdot \sin^{19}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$(x^2 - 5)^3 + 1^3 = (x^2 - 5 + 1)((x^2 - 5)^2 - x^2 - 5 + 1)$$

10

$$(x^4 - 10x^2 + 25 - (x^2 - 5) + 1)$$

$$50 + 15 - 6$$

$$\log_5(|t-5|^3 + 1) + \sqrt{3t^2 - 7t + 19} = \sqrt{2t^2 + 3t - 6}$$

$$6t - 4$$

$$4t + 3$$

$$45 - 35 + 19$$

$$\frac{35}{16}$$

$$t \in \frac{4}{6}$$

$$t = -\frac{3}{4}$$

$$6t - 4 > 4t + 3$$

$$2t > 10$$

$$t > 5$$

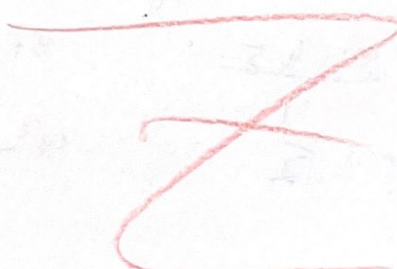
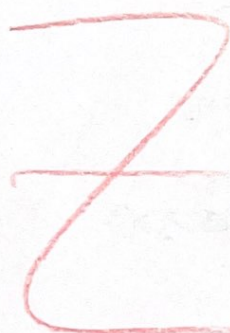
$$45 - 35 + 19$$

$$\frac{45}{16}$$

$$3t^2 - 7t + 19 = 2t^2 + 3t - 6$$

$$t^2 - 10t + 25 = 0$$

$$\frac{45}{16} + \frac{50}{15}$$



Черновик

$$2823 \div 43$$

$$\begin{array}{r} 2023 \div 4 \\ 14 \\ \underline{62} \\ 289 \\ \underline{56} \\ 63 \end{array}$$

$$45 - 14\sqrt{7}$$

$$17^2 \cdot 7$$

$$a^2 \cdot b^2$$

$$17$$

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 + 2ab$$

$$2ab = \sqrt{2023}$$

$$a^2 + b^2 = 45$$

$$17 \cdot 17 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 45 \\ \underline{225} \\ 80 \end{array}$$

$$90 - 2\sqrt{2023}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 25 \end{array}$$

$$\left(\frac{19}{2} + \frac{17}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$45 - 34\sqrt{7}$$

$$45 - 34\sqrt{7}$$

$$45 - 14\sqrt{7}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$90 - 34\sqrt{7}$$

$$a^2 + b^2 = 90$$

$$ab = \sqrt{2023}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ \times 180 \\ \hline 14400 \\ 1806 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2023 \\ \times 14 \\ \hline 12138 \\ 2023 \end{array}$$

$$a^2 + b^2 = 45$$

$$2ab = \sqrt{2023}$$

$$\begin{array}{r} 32400 \\ - 32368 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$180 \pm 4\sqrt{2}$$

$$4$$

$$45 \pm \sqrt{2}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{2023}{4}$$

$$x + \frac{2023}{4x} = 45$$

$$4x^2 - 180x + 2023 = 0$$

Черновик

$$\begin{array}{r} 66 \\ 289 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$2023$$

$$\sqrt{90 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{87} = 9$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 119 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$289 \cdot 81 < 90 - 2\sqrt{2} < 100$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 119 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 126 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$426 \cdot 17$$

$$283 \cdot 7$$

$$119 \cdot 17$$

$$81 \cdot 81 + 2\sqrt{2} < 90$$

$$\left(\frac{119}{8} + \frac{17}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$119\sqrt{2} + \frac{17}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{119}{\sqrt{8}} + 17\sqrt{2}$$

$$\sqrt{19}$$

$$a = \sqrt{45 \pm \sqrt{2}}$$

$$\frac{119}{8} +$$

$$b = \sqrt{45 - \sqrt{2}}$$

$$x \cdot y = 45$$

$$xy = \frac{2023}{4}$$