0 514946 010004

51-49-46-01
(86.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения г. Москва
город

дешифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Христова Георгия Валентиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
51-49-46-01	75	15	15	0	15	15	15	0	0

Сумма: семьдесят пять (75) баллов.

51-49-46-01
(86.2)

Черновик 75 семьдесят пять

$2023 \approx 2048 = 2^{11}$

$2^{5,5} \approx 32 \cdot 2,5 = 16 \cdot 3 = 48$

$\frac{1}{2} - 10$

$\sqrt{2000} = 10\sqrt{20} = 20\sqrt{5}$

$9 < \sqrt{90} < 9,5$

на 1 меньше коэф.

$\sqrt{2023}$ чуть меньше 45

$45 \cdot 45 = 2025$

$45 \times 45 = 225 + 180 = 2025$

19

$\sqrt{90}$

$\frac{1}{2} > 45 - \sqrt{2023} > 0$

$\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

меньше 2 коэф. мл. разр.

$9 < \sqrt{90} < 9,5$ (верхняя граница)

$\frac{1}{2} -$

$89,5 < 45 + \sqrt{2023} < 90$

макс.

$\frac{1}{2} - 9 = -8,5$

мин

$1234 + 789 = 2023$

$\frac{n^2+n}{n^2-2n+2}$

$0 - 9,5 = -9,5$

$\sqrt{48 - \sqrt{2023}} = 0$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$

$\cos\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$

$[-\pi; \pi]$

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \pi k - \frac{\pi}{6}$

$3\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1) =$

$\alpha x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$

$10^{k-1} < a < 10^k$

$10^{l-1} < b < 10^l$

$10^{k+l-2} < ab < 10^{k+l}$

$\alpha x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$

$3(1+\sqrt{37})$

$-\frac{\pi\alpha}{6} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$

$\frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$

$\left|\le -\frac{11\pi}{4}\right|$ $\left|-\frac{3\pi}{4}\right|$ $\frac{5\pi}{4}$ $\left|\ge \frac{13\pi}{4}\right|$

$\frac{5\pi\alpha}{6} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$

$\alpha = 1,5$

$9,5^2 = 90,25$

$445 \times 445 = 2225 + 1780 + 1780 = 198025$

$ab = 10^x$

$x = k + l - 1$

$-\frac{3\pi}{4}$

$\alpha = -\frac{3}{10}$

как будто лучше

$\sqrt{90} < 9,5$

$\frac{5}{6}\alpha = -\frac{3}{4}$

$k + l = 2024$

$9,5^2 > 90$

$3\sin\alpha$ — площадь

$36 + 37 = 73$

$\alpha = \frac{14}{20} = -\frac{9}{10}$

если тупо проходят

мин. $-\sqrt{90} > -9,5$

макс. $\frac{1}{2} - \sqrt{89,5}$

$a = 36 + 1 - 12\cos\alpha$

$3\sin\alpha$

$\frac{1}{2} - \sqrt{90}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{6}{\sin\gamma}$

$\sqrt{37 - 12\cos\alpha}$

$3\sqrt{37 - 12\cos\alpha} \cdot \sin\beta$

макс.

$3(\sin\alpha + \sqrt{37 - 12\cos\alpha})$

$(45 - \frac{1}{4})^2 = 2025 - 22,5 + \frac{1}{16}$

445×445

10	2 5	2
100	4 25	3
1000	8 125	4
10000	16 625	5
	32 3125	6
	64 15625	7
	128 78125	8

x	y	z
		+1
+1		+1
	-1	-1
		-1
-1	+1	

макс. $k+2$ — только от 10-ки

мин. $k+1$

$\frac{9,5}{9,5}$

$90,25$

$\frac{n^2+n}{n^2-2n+2}$

макс.

$\frac{1}{2} - 9 = -8,5$

мин

1000

9.99

$\frac{5\pi}{6}$ из отрезка

Чистовик лист 1

№1.

~~$45^2=2025$, поэтому $44{,}75^2=(45-\frac{1}{4})^2=2025-22{,}5+\frac{1}{16}<2023<$~~
~~$<45^2$, то есть $44{,}75<\sqrt{2023}<45$. Поэтому~~

~~$\sqrt{45-45}-\sqrt{45+45}<\sqrt{45-\sqrt{2023}}-\sqrt{45+\sqrt{2023}}<\sqrt{45-44{,}75}-\sqrt{45+44{,}75}$~~

~~$-\sqrt{90}<\sqrt{45-\sqrt{2023}}-\sqrt{45+\sqrt{2023}}<\frac{1}{2}-\sqrt{89{,}75}$~~

~~Так как $9{,}5^2=90{,}25>90$, $\sqrt{90}<9{,}5$, и $-\sqrt{90}>-9{,}5$.~~
~~Также $\frac{1}{2}-\sqrt{89{,}75}>\frac{1}{2}-\sqrt{81}=-8{,}5$.~~
~~Получается, что $-9{,}5<\sqrt{45-\sqrt{2023}}$~~

№2.

$$1234\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-789\cos^{23}\left(\alpha x-\frac{\pi}{4}\right)=2023$$

Так как $\sin^{20}(x-\frac{\pi}{3})\le 1$, и $\cos^{23}(\alpha x-\frac{\pi}{4})\ge -1$, причём $1234+789=2023$, равенство достигается только при $\sin^{20}(x-\frac{\pi}{3})=1$ и $\cos^{23}(\alpha x-\frac{\pi}{4})=-1$, то есть $\sin(x-\frac{\pi}{3})=\pm 1$, $\cos(\alpha x-\frac{\pi}{4})=-1$. У $\sin(x-\frac{\pi}{3})=\pm 1$ реш. $x=\pi k-\frac{\pi}{6}$ $(k\in\mathbb{Z})$, то есть на $[-\pi;5\pi]$ это $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Также из $\cos(\alpha x-\frac{\pi}{4})=1$ $\alpha x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$. α будет наименьшим (по модулю), если x из первого будет наиб. по модулю, а αx из второго будет наим. по модулю. Наиб. по модулю x из первого — это $\frac{5\pi}{6}$, а наим. по модулю αx из второго — это $-\frac{3\pi}{4}$. $\alpha=-\frac{3\pi}{4}:\frac{5\pi}{6}=-\frac{9}{10}$. Ответ: $-\frac{9}{10}$.

№5.

Пусть даны 2 числа x и y, m и n — значные соотв., не явл. степенями десятки. Тогда $10^{m-1}<x<10^m$ и $10^{n-1}<y<10^n$. Отсюда $10^{m+n-2}<xy<10^{m+n}$. В нашем случае $x=2^{2023}$, $y=5^{2023}$ (очев., это не ст. десятки). Тогда $10^{m+n-2}<10^{2023}<10^{m+n}$, откуда $2023=m+n-1$, и $m+n=2024$. $m=S(2^{2023})$, $n=S(5^{2023})$, поэтому $S(2^{2023})+S(5^{2023})=2024$.
Ответ: 2024.

№1.

$(45-\frac{1}{16})^2=2025-\frac{45}{8}+\frac{1}{256}=2020-\frac{5}{8}+\frac{1}{256}<2023<2025=45^2$, то есть $45-\frac{1}{16}<\sqrt{2023}<45$. Из второго вырак. из усл. больше $\sqrt{45-45}-\sqrt{45+45}=-\sqrt{90}>-10$. Из первого выр-ия вырак. из усл. меньше $\frac{1}{4}-\sqrt{90-\frac{1}{16}}$. $(9+\frac{1}{4})^2=81+\frac{9}{2}+\frac{1}{16}=85{,}5+\frac{1}{16}<90-\frac{1}{16}$, поэтому $\frac{1}{4}-\sqrt{90-\frac{1}{16}}<-9$, и вырак. из усл. <-9. Значит, оно между (строго) -10 и -9, и его целая часть равна -10. Ответ: -10.

51-49-46-01
(86.2)

Черновик

$\left(\sin\alpha + \sqrt{37-12\cos\alpha}\right)' = \cos\alpha + \frac{12\sin\alpha}{2\sqrt{37-12\cos\alpha}}$

числа от 1 до 6

~~ситуации~~ пар, где левое больше правого, 7

$\sqrt{45-\sqrt{2025}} - \sqrt{45+\sqrt{2025}}$

$-\sqrt{90} > -9{,}5$

~~мин.~~

$-\sqrt{90} > -10$

123456
623451

макс.

$(9+\frac{1}{4})^2$

$(9+\frac{1}{4})^2 = 81 + \frac{9}{2} + \frac{1}{16}$

нужно, чтобы < -9

нет

$-\sqrt{83{,}75} < -9\frac{1}{4}$

123456

$a < b$

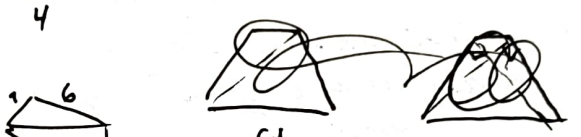
$f(a) > f(b)$

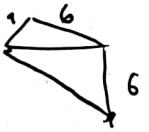
таких ситуаций 7

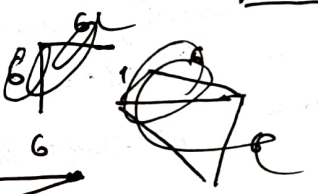
$< \frac{1}{8} - \sqrt{83{,}75}$

$(45-\frac{1}{16})^2 = \boxed{2025 - \frac{45}{8} + \frac{1}{256}}$

$\frac{1}{4}$ –

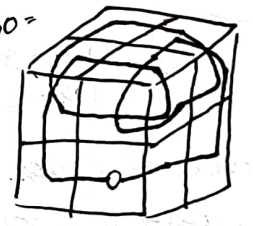






$95 \cdot 6 = 19 \cdot 30 =$

$= 570$



$\frac{6}{a} = \sin\alpha$

$a - 12\sin\alpha = 1$

$a - \frac{72}{a} = 1$

$a^2 - a - 72 = 0$

корни -8 и 9

$a = 9$

$19 + 95 =$

$\frac{24 \cdot 17}{2} = 12 \cdot 17$

$\boxed{6}\,1\,2\,\boxed{5}\,3\,4$

$30 \cdot \frac{17 \cdot 4}{10}$

$5+2$

$5+1+1$

$4+3$

$4+2+1$

$4+1+1+1$

$3+3+1$

$3+2+1+1$

$3+1+1+1+1$

$2+2+2+1$

$2+2+1+1+1$

$2+1+1+1+1+1$

$3+2+2$

36

$\alpha_n = n^2+1$

$1 \quad 5 \quad 30$

$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{((n+1)^2+1)\cdot(n+1)}{n^2+1} =$

$= a_{n-1} \cdot \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} \cdot \frac{((n+1)^2+1)(n+1)n}{(n-1)^2+1}$

$a_n = a_{n-1} \cdot n \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$

$a_n = \frac{n!\,(n^2+1)}{2}$

$\frac{(n-1)!\,(n^2+1)}{2} \cdot \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} = \frac{n!\,(n^2+1)}{2}$

Чистовик лист 2

№ 4.

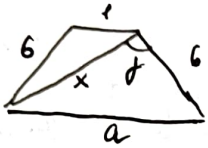
Посмотрим, что это м/б за четырёхугольник. Про условие на выпуклость пока забудем.

Пусть сторона длины 1 не между сторонами длины 6:

Тогда разделим четырёхуг. на 2 треугольника по диагонали, как на рис., и развернём "один из треугольников":

Площадь от этого не изменится, стороны будут те же.

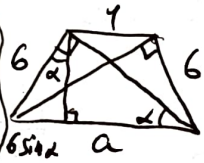
Теперь можно считать, что сторона длины 1 между сторонами длины 6.



Если длина д. диагонали x, и $\gamma \neq 90°$ (где γ - уг. угол), площадь не наибольшая, ведь если γ сделать $90°$, сохранив левый треугольник, площадь правого из. $3x\sin\gamma$ станет просто $3x$, т.е. увел.

Поэтому $\gamma = 90°$. Аналогично, с другой стороны:

Противоп. стороны равны (диагонали равны (из равенства пр. тр.)), поэтому это п/б трапеция.



Пусть д. сторона a, д. угол α. Тогда $a - 2\cdot 6\sin\alpha = 1$. Но $\sin\alpha = \frac{6}{a}$, поэтому

$a - 72/a = 1$, т.е. $a^2 - a - 72 = 0$,

$\left[\begin{array}{l} a=9 \\ a=-8 \end{array}\right.$. $a > 0$, поэтому $a = 9$.

Трапеция с осн. 9 и 1 и бок. сторонами 6, конечно, выпуклая, поэтому и с усл. на выпуклость всё хорошо.

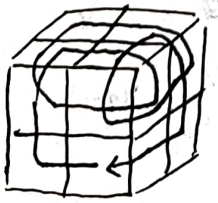
Ответ: 9.

№ 7.

Единственный значимый маршрут по соседним клеткам, не включающий двух поворотов подряд (прохождения по всем 3 клеткам при вершине по углу) следующий: (с точностью до поворота)

Так как жук, опять же, не делает 2 поворотов подряд он мог начать этот путь только в отм. клетке, и идти по часовой стрелке (т.к. поворот вправо).

Далее его путь будет:



Он займёт 19 сек.

Всего $19 + 5 = 24$ сек.

Ответ: 24.

51-49-46-01
(86.2)

Черновик

1, 5, 30, 17·12

$\frac{17}{3}$

$\frac{10}{2}$

$\frac{n^2+1}{n-1}$

$\frac{n!(n^2+1)}{2} : S_{n-1} = \frac{n^2+1}{n-1}$

$S_n = \frac{(n+1)!\,n}{2}$

$S_{n-1} = \frac{n!(n-1)}{2}$

$\frac{n!(n-1)}{2} + \frac{n!(n^2+1)}{2} = \frac{(n+1)!\,n}{2}$

123456

341652

сумма расст. 14

Чистовик лист 3

№6.

Ответ: $\frac{2023^2+1}{2022}$

Рассмотрим посл. $b_n = \frac{a_n}{19}$. Нужное отношение сохранится, рекуррентное отношение тоже сохранится.

Докажем, что $b_n = \frac{n!(n^2+1)}{2}$. Действительно, база индукции верна $\left(\frac{1\cdot 2}{2} = 1 = b_1\right)$, переход: $\frac{(n-1)!((n-1)^2+1)}{2} \cdot \frac{(n^2+1)n}{(n-1)^2+1} = \frac{n!(n^2+1)}{2}$.

Теперь обозн. за S_n сумму первых n членов посл. $\{b_n\}$. Докажем, что $S_n = \frac{(n+1)!n}{2}$. База индукции: $S_1 = \frac{2\cdot 1}{2} = 1 = b_1$, верно. Переход: $S_n = S_{n-1} + b_n = \frac{n!(n-1)}{2} + \frac{n!(n^2+1)}{2} = \frac{n!(n^2+n)}{2} = \frac{(n+1)!n}{2}$. Значит, $\frac{b_n}{S_{n-1}} = \frac{n!(n^2+1)}{n!(n-1)} = \frac{n^2+1}{n-1}$.

В случае $n=2023$ $\frac{b_{2023}}{S_{2022}} = \frac{2023^2+1}{2022}$.

№14.

Заметим, что если верхняя вершина отрезка a-тая слева, а нижняя b-тая слева, то отрезок пересекает $|a-b|$ отрезков. Нужно найти кол-во случаев, когда $\sum_{i=1}^{6} |a_i - i| = 14$, где a_i-тое – номер верхнего конца отрезка с i-тым нижним концом. То есть число подстановок чисел от 1 до 6, где сумма модулей