0 517297 830000

51-72-97-83
(20.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 232

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"

по механике и математическому моделированию

Быкова Егора Алексеевича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«26» февраля 2023 года

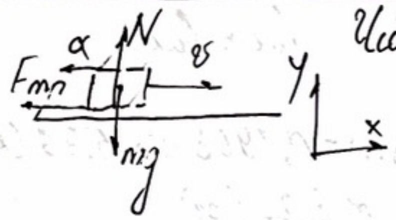
Подпись участника

51-72-97-83 (20.2)

90 (...)

Чистовик.

№1.



1) По II закону Ньютона на ось Oy:

$N - mg = 0$ (т.к. $a = 0$)

$N = mg$

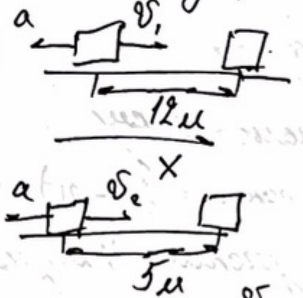
По II закону Ньютона на ось Ox:

$-F_{тр} = -ma$

$F_{тр} = \mu mg = \mu N$ (т.к. скольжения) $\Rightarrow -\mu mg = -ma$

$\mu g = a \Rightarrow a = const$ во всех 3 ударах

2)

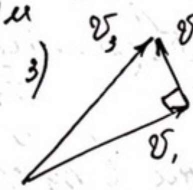


$s = \frac{v_к^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow$

$\Rightarrow s_1 = \frac{0 - v_1^2}{-2a} = \frac{v_1^2}{2a} = 12 \Rightarrow v_1^2 = 24a$

$s_2 = \frac{0 - v_2^2}{-2a} = \frac{v_2^2}{2a} = 5 \Rightarrow v_2^2 = 10a$

3)

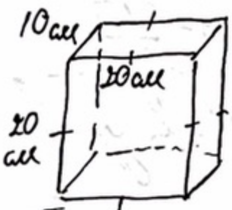


$v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{24a + 10a} = \sqrt{34a}$

$s_3 = \frac{0 - v_3^2}{-2a} = \frac{0 - (\sqrt{34a})^2}{-2a} = \frac{-34a}{-2a} = 17$ (м)

Ответ: $s_3 = 17$ м +

№2.



Начнём с ~~углов~~ вершин: всего их 8 и от каждой лёд отстоит на 4 см, образуя $\frac{1}{8}$ шара:

$V_{верш} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \underbrace{8}_{\text{кол-во вершин}} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Объём льда на рёбрах: всего их 12 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ имеем длину рёбер и умножаем на S сечения льда (лёд намерзает, образуя $\frac{1}{4}$ круга в поперечном сечении) $\Rightarrow$

$\Rightarrow V_{рёб.} = (20 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 4) \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi R^2 = (80 \cdot 2 + 40)\frac{1}{4}\pi R^2 = 50\pi R^2$

Объём льда на сторонах считаем, как объёмы параллелепипедов (у всех будет ребро равное 4 см $\Rightarrow$ считаем S поверхности ~~сверочника~~ и умножаем на 4 см):

$V_{сторон} = (20 \cdot 20 \cdot 2 + 10 \cdot 20 \cdot 4) \cdot \underset{4 см}{R} = (800 + 800)R = 1600 \cdot R = 1600 \cdot 4 = 6400$ см^3

$V_{общий} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 + 50\pi R^2 + 6400 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 + 50\pi \cdot 16 + 6400 =$

$= \frac{256\pi}{3} + 800\pi + 6400 = \frac{256\pi + 2400\pi}{3} + 6400 = \frac{2656\pi}{3} + 6400$ (см^3)

$m_{лёд} = V_{общ} \cdot \rho = \left(\frac{2656\pi}{3} + 6400\right) \cdot 0{,}9 = 2656\pi \cdot 0{,}3 + 5760$ (г) $=$

$= 796{,}8\pi + 5760$ (г) $= 0{,}7968\pi + 5{,}76$ (кг) +

$0,7968 \times 3,14$

31872
7968
23904

$2501952 \approx 2,502$

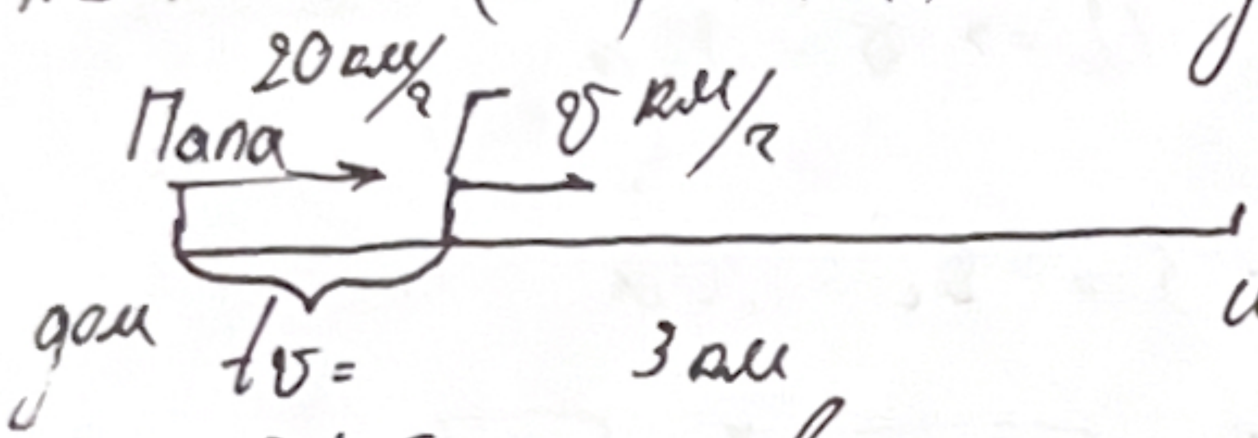
⑤ $2,502 + 5,76 \approx 8,26$ (кг) Чистовик.

$5,760 + 2,502 = 8,262$

Ответ: $\Delta m = 0,7968\pi + 5,76$ (кг) $\approx$
$\approx 8,26$ (кг)

Дополнение к решению:
Масса начальная скворечника $m_0 = const$ (объём дерева не менялся)
Масса конечная скворечника $m_1 = m_0 + m_{лёд} \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta m = m_0 + m_{лёд} - m_0 = m_{лёд}$

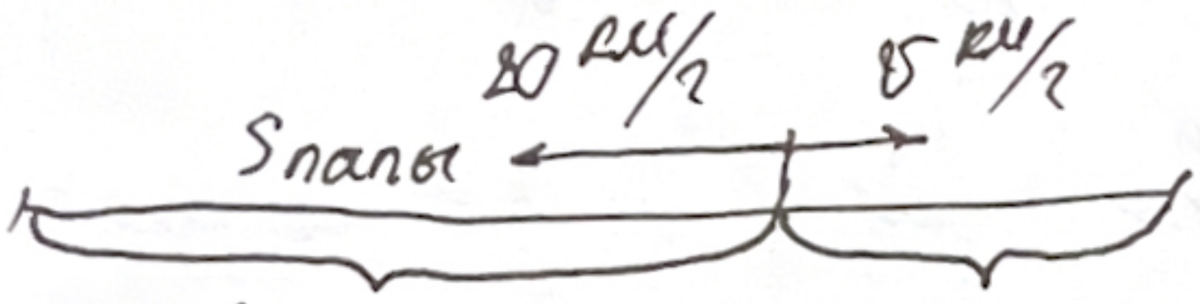
№3. $t = 6$ (мин) $= 0,1$ (ч)



$= 0,1v = S_{отрыва}$

Через $t = \frac{0,1v}{20-v}$ (ч)

Пусть скорость Гаврилы $= v$ км/ч,
тогда $v_{догонки} = (20 - v)$ км/ч,
тогда папа догонит Гаврилу
через $t_1 = \frac{0,1v}{20-v}$ (ч) $= \frac{S_{отрыва}}{v_{догонки}}$



$\left(\frac{0,1v}{20-v}\right) \cdot 20$ (км) $\left(3 - \frac{0,1v}{20-v} \cdot 20\right)$ км

Приехали они в пункта назначения в одно время $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ехали одно время t_2

$t_2 = \frac{0,1v \cdot 20}{(20-v) \cdot 20} = \frac{3 - \frac{0,1v}{20-v} \cdot 20}{v}$

Зная это, составим уравнение:

$S_{папы} = t_1 \cdot v_{папы}$

$\frac{0,1v}{20-v} = \frac{3}{v} - \frac{0,1 \cdot 20}{20-v} \quad | \cdot 10$

$\frac{v}{20-v} = \frac{30}{v} - \frac{20}{20-v} \quad | (20-v)v$

$v^2 = 30(20-v) - 20v$

$v^2 = 600 - 30v - 20v$

$v^2 + 50v - 600 = 0$

$D = 2500 + 4 \cdot 600 = 2500 + 2400 = 4900$

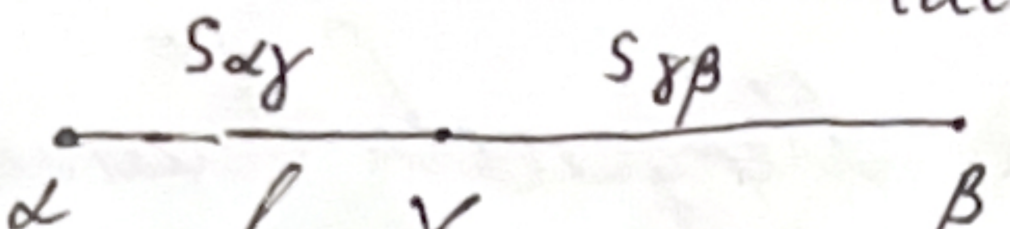
$v_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{4900}}{2} = \frac{-50 \pm 70}{2}$

$v > 0 \Rightarrow v = \frac{-50+70}{2} = 10$ км/ч

$S_{папы} = \frac{0,1v}{20-v} \cdot 20 = \frac{2v}{20-v} = \frac{2 \cdot 10}{20-10} = 2$ (км)

Ответ: $S_{папы} = 2$ (км) +

Чистовик.

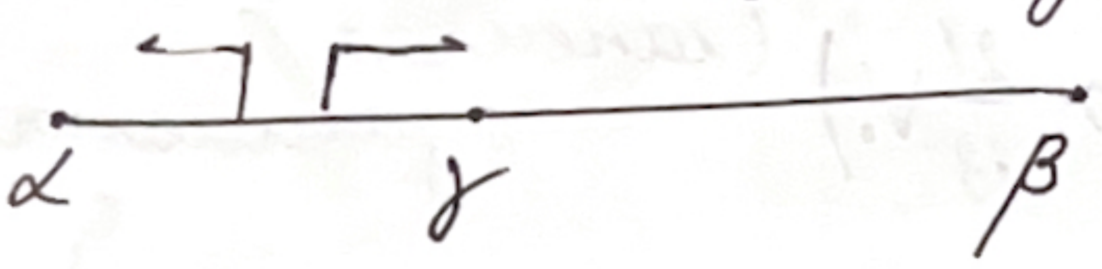
№4. 

~~Пусть поезд движется со скоростью ϑ~~

~~Время, которое поезд находится между станциями α и γ и движется в сторону станции γ~~ ~~$= t_{\alpha\gamma} = \frac{2S_{\alpha\gamma}}{\vartheta}$~~

~~Время, в которое поезд находится между станциями γ и β и движется в сторону станции γ~~ ~~$: t_{\beta\gamma} = \frac{2S_{\beta\gamma}}{\vartheta}$~~

Вероятность того, что Гаврила приедет в Бетовск = вероятности того, что поезд находится между станциями α и γ



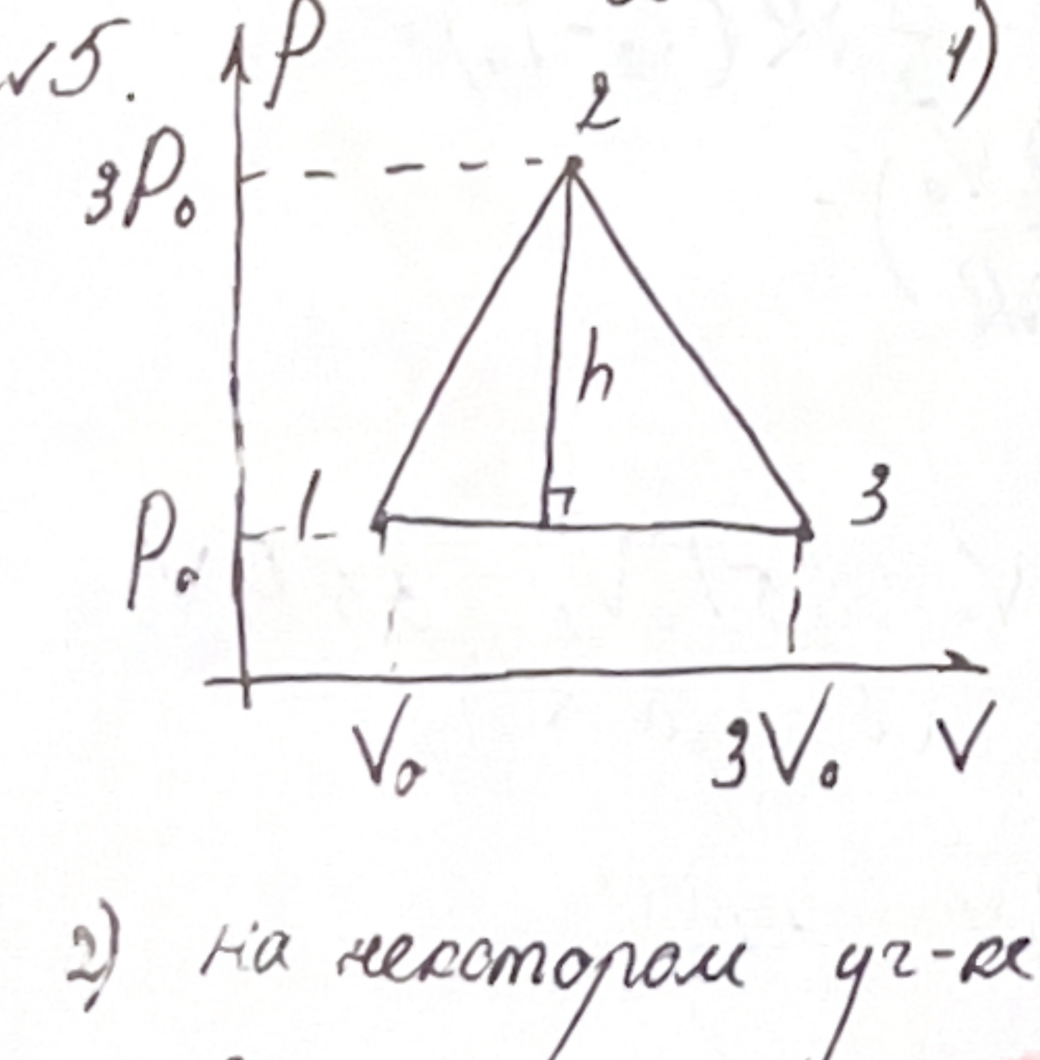
(так, если он находится между γ и ~~β~~ α и движется от Гаврилы, он доедет до α, там развернётся и приедет в β взяв его с собой, а если он движется к Гавриле, то тем более привезёт его в Бетовск) = вероятность того, что точка лежит на отрезке $\alpha\gamma = \frac{S_{\alpha\gamma}}{S_{\alpha\beta}} = \frac{S_{\alpha\gamma}}{100\text{ км}} = \frac{143}{143+222} = \frac{143}{365} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\alpha\gamma} = \frac{143 \cdot 100}{365}(\text{км}) = \frac{143 \cdot 20}{73}(\text{км}) = \frac{2860}{73}(\text{км}) \approx 39(\text{км})$ +

$$\begin{array}{r|l} 2860 & 73 \\ \underline{219} & 39{,}1 \\ 670 & \\ \underline{657} & \\ 130 & \\ \underline{73} & \\ 57 & \end{array}$$

Ответ: $S_{\alpha\gamma} = \frac{2860}{73}$ км ≈ 39 км

Дополнение: вероятность того, что Гаврила приедет в Бетовск равна отношению его кол-ва поездов в Бетовск к общему кол-ву поездов.

№5. 

1) $A_{газа} = S_{\Delta} = \frac{h \cdot (3V_0 - V_0)}{2}$

M 1:5 масштабный коэффициент графика

т.к. $P_2 = 3P_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = const \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{газа} = \frac{(3P_0 - P_0)(3V_0 - V_0)}{2} = \frac{2P_0 \cdot 2V_0}{2} = 2P_0V_0$

2) на некотором уч-ке отрезка 2-3 газ получает тепло по условию $\Rightarrow$
$\Rightarrow Q_{23} > 0$

$Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23}$

Чистовик.

Пусть объём газа в точке 2 равен V_2, тогда по уравнению Менделеева-Клапейрона:

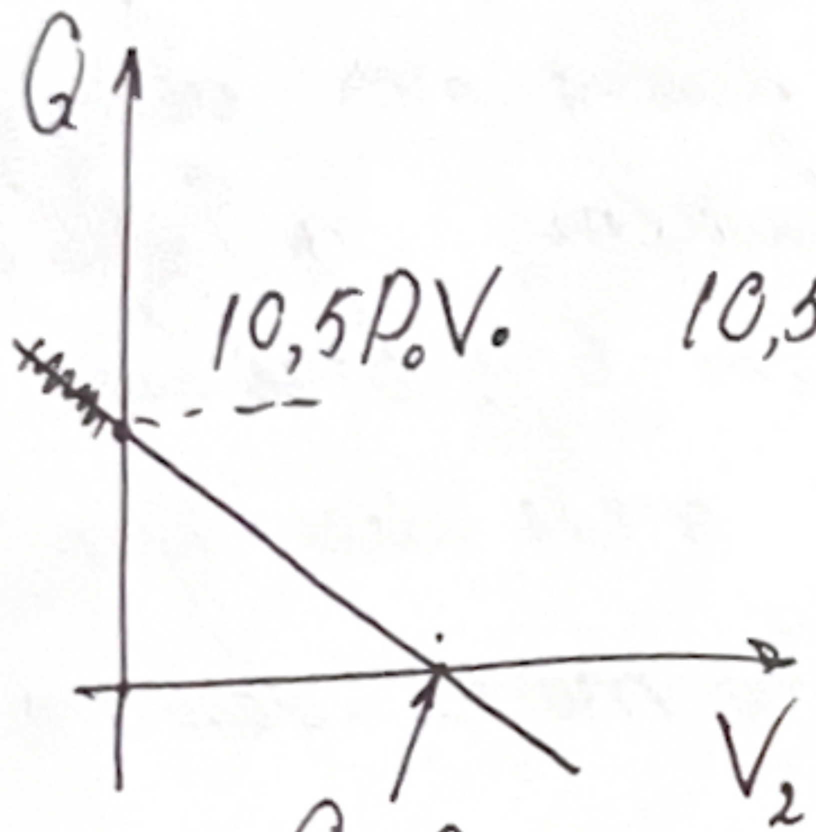
$3P_0 \cdot V_2 = \nu R T_2 \Rightarrow T_2 = \dfrac{3P_0V_2}{\nu R}$; $T_3 = \dfrac{3P_0V_0}{\nu R}$

$\Delta U = \dfrac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) = \dfrac{3}{2}\nu R\left(\dfrac{3P_0V_0}{\nu R} - \dfrac{3P_0V_2}{\nu R}\right) = \dfrac{9}{2}P_0(V_0 - V_2)$

$A = S \cdot M = \dfrac{3P_0 + P_0}{2} \cdot (3V_0 - V_2) = 2P_0(3V_0 - V_2)$

$Q = \Delta U + A = \dfrac{9}{2}P_0(V_0 - V_2) + 2P_0(3V_0 - V_2) =$

$= 4{,}5P_0V_0 - 4{,}5P_0V_2 + 6P_0V_0 - 2P_0V_2 = 10{,}5P_0V_0 - 6{,}5P_0V_2$



$Q > 0$ при $V_2 \in \left[0; \dfrac{21}{13}V_0\right)$ (линейная зависимость)

$10{,}5P_0V_0 - 6{,}5P_0V_2 = 0$

$V_2 = \dfrac{10{,}5}{6{,}5}V_0 = \dfrac{21}{13}V_0$

идея верна, но...

По условию $V_2 \in [V_0; 3V_0] \Rightarrow V_2 \in \left[V_0; \dfrac{21}{13}V_0\right)$

3) $Q_{31} = A_{31} + \Delta U_{31} = P_0(V_0 - 3V_0) + \dfrac{3}{2}\nu R(T_1 - T_3) =$

$= -2P_0V_0 + \dfrac{3}{2}\nu R\left(\dfrac{P_0V_0}{\nu R} - \dfrac{3P_0V_0}{\nu R}\right) = -2P_0V_0 - 3P_0V_0 =$

$= -5P_0V_0 \Rightarrow Q_{31} < 0$

если $Q_{31} < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ мы можем ~~зад~~ не учитывать его при подсчёте к.п.д. (т.к. $\eta = \dfrac{A}{Q_{подвод}}$)

4) $Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = \dfrac{P_0 + 3P_0}{2} \cdot (V_2 - V_0) + \dfrac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) =$

$= 2P_0(V_2 - V_0) + \dfrac{3}{2}\nu R\left(\dfrac{3P_0V_2}{\nu R} - \dfrac{P_0V_0}{\nu R}\right) =$

$= 2P_0V_2 - 2P_0V_0 + \dfrac{3}{2} \cdot 3P_0V_2 - \dfrac{3}{2}P_0V_0 =$

$= 2P_0V_2 - 2P_0V_0 + 4{,}5P_0V_2 - 1{,}5P_0V_0 = 6{,}5P_0V_2 - 3{,}5P_0V_0$ (всегда >0)

$Q_{23} = 10{,}5P_0V_0 - 6{,}5P_0V_2$ (из п. 2)

$Q_{подвод} = 10{,}5P_0V_0 - 6{,}5P_0V_2 + 6{,}5P_0V_2 - 3{,}5P_0V_0 = 7P_0V_0$

В итоге $Q_{подвод}$ не зависит от V_2, а важно нам было только условие $Q_{23} > 0$

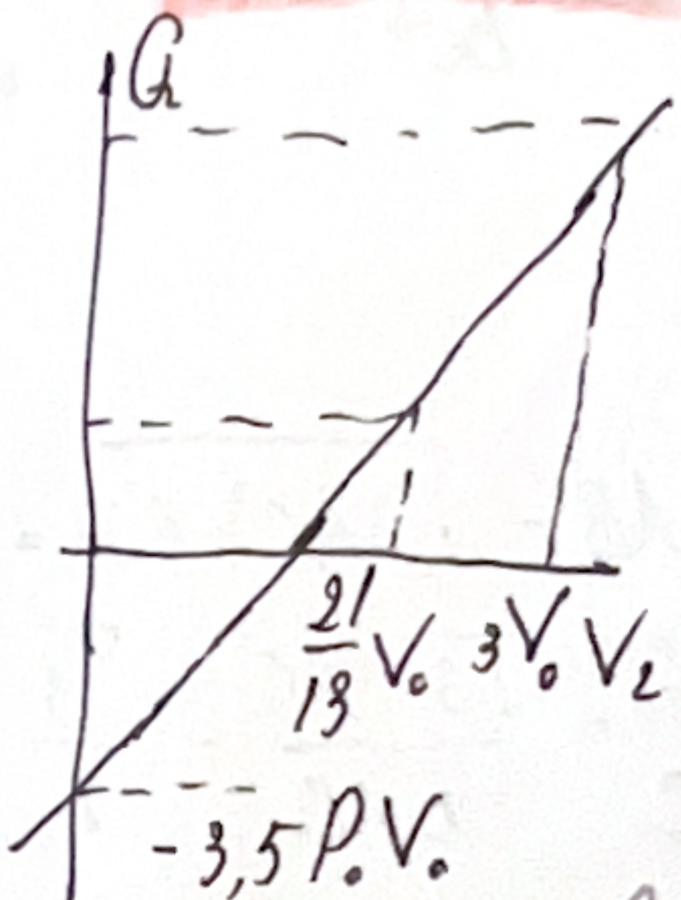
имеет

51-72-97-83 (20.2)

Чистовик.

5) $\eta = \frac{A_{общ}}{Q_{подвод}} = \frac{2P_0V_0}{7P_0V_0} = \frac{2}{7} \cdot 100\%$.

Но если $Q_{23} \leq 0$ (т.е. $V_2 \in [\frac{21}{13}V_0; 3V_0]$)



$Q_{\substack{общ \\ подвод}} = Q_{12} = 6,5P_0V_2 - 3,5P_0V_0$

при $V_2 = \frac{21}{13}V_0$: $Q_{12} =$

$= \frac{21}{13}V_0 \cdot \frac{13}{2}P_0 - 3,5P_0V_0 = 7P_0V_0$

при $V_2 = 3V_0$: $Q_{12} =$

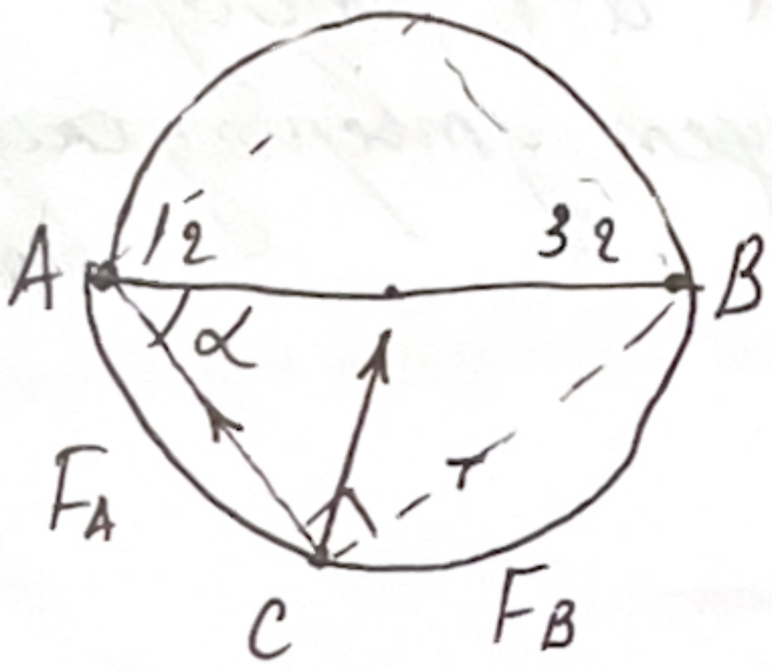
$= \cancel{6,5}\ \frac{13}{2} \cdot 3V_0P_0 - 3,5P_0V_0 = \frac{39}{2}P_0V_0 - 3,5P_0V_0 =$ ответ неверн

$= 19,5P_0V_0 - 3,5P_0V_0 = 16P_0V_0 \Rightarrow \eta \in [\frac{2}{7} \cdot 100\%; \frac{1}{8} \cdot 100\%]$

$\eta = \frac{2P_0V_0}{16P_0V_0} = \frac{1}{8} \cdot 100\%$ не включительно, т.к. иначе Q на всём участке (во всех точках) < 0.

Ответ:
$\eta \in [\frac{2}{7} \cdot 100\%; \frac{1}{8} \cdot 100\%)$

№6.



$F_A = G\frac{m_1m_3}{AC^2}$; $F_B = G \cdot \frac{m_2m_3}{BC^2}$

$F_{общ} = \sqrt{F_A^2 + F_B^2}$, т.к. $\angle C$ в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, т.к. вписанный и опирается на диаметр

$F_A = G \cdot \frac{1г \cdot 2г}{AC^2} = G\frac{2}{AC^2}$ Н; $F_B = G \cdot \frac{6}{BC^2}$ Н

$F_{общ} = \sqrt{G^2\frac{4}{AC^4} + G^2\frac{36}{BC^2}} = G\sqrt{\frac{4}{AC^4} + \frac{36}{BC^4}} = G\sqrt{\frac{4BC^4 + 36AC^4}{AC^4 \cdot BC^4}} \Rightarrow$ минимизируем $F_{общ} \Rightarrow$ минимизируем

$\frac{4BC^4 + 36AC^4}{AC^4 \cdot BC^4} = \cancel{\frac{4BC^4 + 36(AB^2 - BC^2)^2}{(AB^2 - BC^2)^2 \cdot BC^4}}$ $\quad a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$= \frac{4BC^4 + 4AC^4 + 32AC^4}{AC^4 \cdot BC^4} = 4\frac{AC^4 + BC^4}{AC^4 \cdot BC^4} + \frac{32}{BC^4} = \cancel{4\frac{AB^4 - 2AB^2BC^2 + BC^4}{BC^4}}$

Пусть $\cancel{AB}^2_{BC} = 3AC^2$, тогда

$\frac{4 \cdot 9AC^4 + 36AC^4}{9AC^4 \cdot AC^4} = \frac{72AC^4}{9AC^8} = \frac{8}{AC^4}$

~~Сила тяжести всегда направлена в центр окружности (из правила параллелограмма)~~

Чистовик

$\sqrt{\frac{4}{AC^4}+\frac{936}{BC^4}}$ минимально, когда слагаемые равны =>

=> $\frac{4}{AC^4}=\frac{36}{BC^4}$ => $9AC^4=BC^4$ ~~неверно~~

$3AC^2=BC^2$

$BC=\sqrt{3}\,AC$ =>

=> $AB=\sqrt{3AC^2+AC^2}=\sqrt{4AC^2}=2AC$

$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{3}\,AC}{2AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\alpha$ => $\alpha=60^\circ$ => $\breve{BC}=2\alpha=120^\circ$, т.к. α - вписанный

~~$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ =>~~

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq ab$ по неравенству о средних =>

=> $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ => $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ => сумма минимальна и равна $2\sqrt{ab}$ тогда, когда $a=b$, поэтому $\sqrt{a+b}$ минимально, когда $a=b$, отсюда следует утверждение выше

Ответ: $\smile BC=120^\circ$.