0 170735 500004

17-07-35-50
(20.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 232

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов по механике и математическому
наменование олимпиады
моделированию

по механике и математическому моделированию
профиль олимпиады

Варгасова Владимира Валерьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«26» февраля 2023 года

Подпись участника

В. Варг

17-07-35-50 (20.1)

Чистовик

№1 (+)

Лист №1

Т.к. шайба остановилась, можно сделать вывод, что присутствует сила трения, сообщающая шайбе ускорение $a = \frac{-\mu m g}{m} = -\mu g$, где μ - коэф. трения шайбы о поверхность

$a = \frac{0 - v_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{v_1}{\mu g}$, где t_1 - интервал времени от удара до остановки

$L_1 = v_1 t_1 + \frac{a t_1^2}{2} = \frac{v_1^2}{\mu g} - \frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{v_1^2}{2\mu g}$, $v_1^2 = 2L_1 \mu g$

Аналогично $L_2 = \frac{v_2^2}{2\mu g}$, $L_3 = \frac{v_3^2}{2\mu g}$, $v_2^2 = 2L_2\mu g$

т.к. $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, $|\vec{v}_3| = |\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2}$,

т.е. $v_3 = |\vec{v}_3| = \sqrt{2\mu g L_1 + 2\mu g L_2}$

Тогда $L_3 = \frac{v_3^2}{2\mu g} = \frac{\cancel{2\mu g}(L_1 + L_2)}{\cancel{2\mu g}} = L_1 + L_2$

по усл. $L_1 = 12$ м, $L_2 = 5$ м, тогда

$L_3 = 17$ м

Ответ: 17 м

Чистовик

№2 (1)

Лист №2

Пусть Δm - изменение массы скворечника

$\Delta m = V_л \cdot \rho_л$, ~~$V_л$ - S полной поверхности~~

$V_{л.1} = S_{п.п.} \cdot h_л$, где $S_{п.п.}$ - площадь полной поверхности параллелепипеда, $h_л$ - толщина слоя льда, по усл. $h_л = 4см$, $V_{л.1}$ - объём льда на поверхности параллелепипеда

Будем считать параллелепипед прямоугольным, тогда ~~$S_{п.п.} = 2c(a+b)+2ab$, где a~~

$S_{п.п.} = 2(ab + bc + ac)$, где a, b, c - стороны параллелепипеда, которые по условию равны 20см, 20см, 10см

$S_{п.п.} = 2 \cdot 800 = 1600\ см^2$

$V_{л.1} = 4 \cdot 1600 = 6400\ (см^3)$

Также при покрытии льдом по заданному условию ~~на реб~~ возникают ~~коническую~~ цилиндр. поверхностью с рёбрами параллел-ма в виде осей и сферические секторы с центрами в вершинах параллелеп. радиусы секторов и ц-он. пов. равны ~~4см~~ $h_л = 4см$.

~~$V_{л.кон.} =$~~ $V_{л.цил.} = 4 \cdot a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot h_л + 4 \cdot b \cdot \frac{\pi}{2} h_л + 4c \cdot \frac{\pi}{2} h_л = 4\frac{\pi}{2} h_л \cdot (a+b+c)$

$V_{л.цил.} = 2\pi \cdot 4 \cdot 50 = 400\pi$

$V_{л.сф.} = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot h_л^3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{3}\pi h_л^3$

$V_{л.сф} = \frac{256}{3}\pi$

прод. на листе №3

Чистовик №2 (продолжение) Лист №3

~~$V_{льда}$~~ $V_л = V_{л.1} + V_{л.цил} + V_{л.сф}$

$V_л = 6400 + \frac{256\pi}{3} + 400\pi =$

$= 6400 + \frac{1456\pi}{3}$ (см^3)

$V_л \approx 6400 + \frac{1456 \cdot 3,14}{3} =$

$= 6400 + \frac{4571,84}{3} =$

$= 6400 + 1523,94(6) \approx 7923,95$ (см^3)

$1456 \times 3,14 = 5824 + 1456 + 4368 = 4571,84$

$4571,84 : 3 = 1523,94...$

Ответ: $6400 + \frac{1456\pi}{3} \approx 7923,95$ см^3

№3 (+) требовалось найти массу льда

Пусть v_1 - скорость Гаврилы, v_2 - скорость отца, S_1 - расстояние от дома до встречи, t_1 - интервал времени между отъездом отца и встречей, ~~t_2~~ t_2 - ~~время~~ интервала времени между встречей и прибытием Гаврилы в школу, S - расстояние от дома до школы, Δt - интервал времени между ~~$S = v_1(t_2 + t_1 + \Delta t)$~~ отъездами из дома Гаврилы и его отца, тогда

~~$S = v_1(t_2 + t_1 + \Delta t)$~~ $S_1 = (t_1 + \Delta t) v_1$ (1)

$S_1 = v_2 t_1$ (2), $S_1 = v_2 t_2$ (3), $S - S_1 =$ ~~$v_1(t_2$~~ $v_1 t_2$ (4)

Из (3) и (2) ~~$t_1 = t_2$~~ $t_2 = t_1 = \frac{S_1}{v_2}$

Из (1) и (4) $S_1 = S - S_1 + v_1 \Delta t$

(прод. на листе №4)

Чистовик

№3 (прод.)

Лист №4

Имеем:

$$\begin{cases} t_2 = t_1 = \dfrac{S_1}{v_2} \\ 2S_1 = S + v_1\Delta t \\ S - S_1 = v_1 t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{S - S_1}{t_2} \\ t_2 = t_1 = \dfrac{S_1}{v_2} \quad (5) \\ 2S_1 = S + \dfrac{(S-S_1)\Delta t}{t_2} \quad (6) \end{cases}$$

Из (5) и (6):

$$2S_1 = S + \frac{(S-S_1)\Delta t\, v_2}{S_1} \quad \Big| \cdot S_1$$

$$2S_1^2 = S\cdot S_1 + S\Delta t v_2 - S_1\Delta t v_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2S_1^2 + (\Delta t v_2 - S)S_1 - S\Delta t v_2 = 0$$

по усл. $v_2 = 20\,\frac{км}{ч}$, $\Delta t = 0{,}1$ ч, $S = 3$ км

$$2S_1^2 + (2-3)S_1 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2S_1^2 - S_1 - 6 = 0 \Leftrightarrow (S_1 - 2)(2S_1 + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S_1 = 2 \\ S_1 = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$ по усл. $S_1 > 0$, значит, $S_1 = 2$

Ответ: 2 км

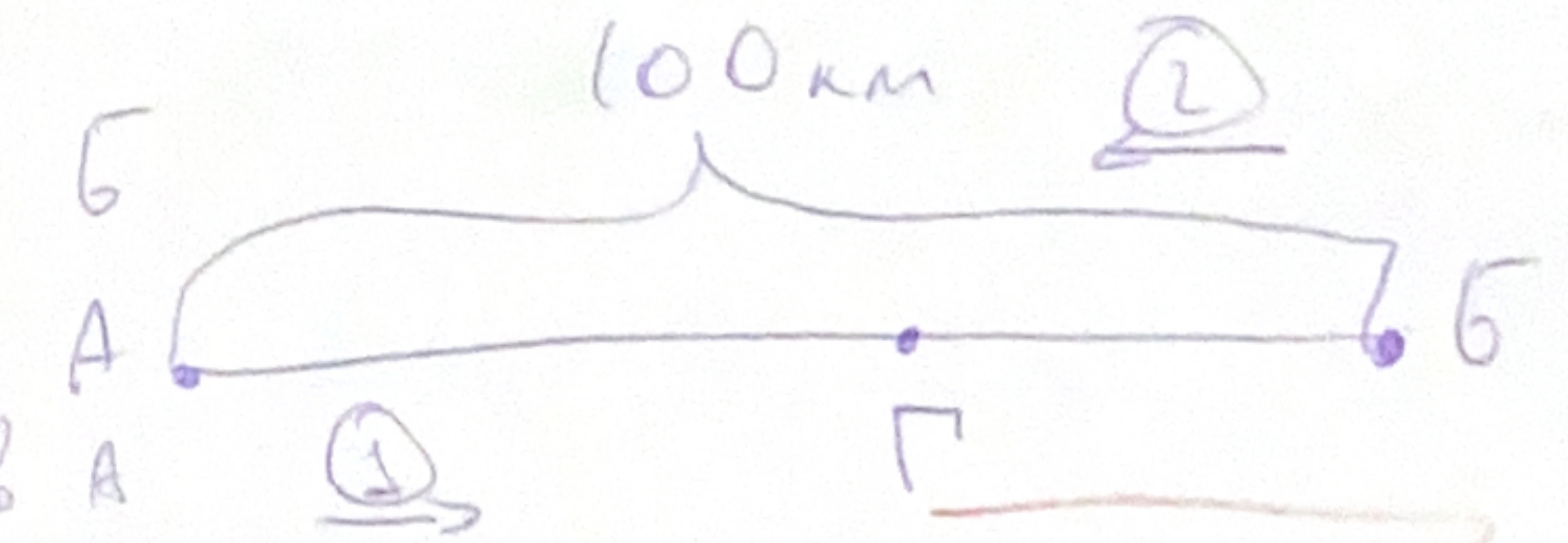
№4:

Событие 1:

поезд едет из А в Б

Событие 2:

поезд едет из Б в А



$P_1 = \frac{222}{365}$, $P_2 = \frac{143}{365}$

(прод. на листе №11)

17-07-35-50 (20.1)

Чистовик

№5 ⊖

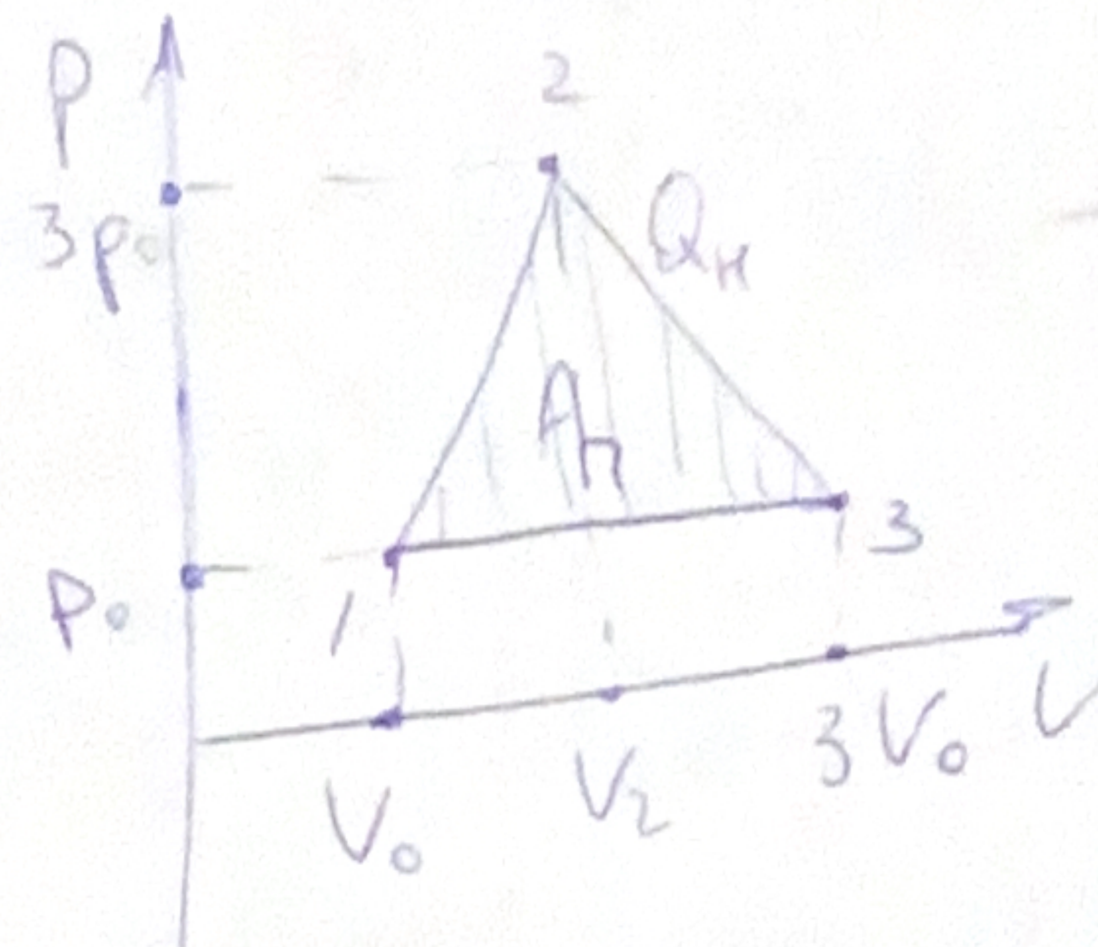
Лист №5

Пусть V_2 - ~~давление~~ объём газа в состоянии 2, где

$i = 3$, $\nu = 1$ моль

$A_n = \frac{1}{2} \cdot (3p_0 - p_0) \cdot (3V_0 - V_0) =$

$= 2p_0V_0$ ~~(Дж)~~



$Q_н = A_{23} + \Delta U$

~~$Q_н = \frac{3}{2} p_0 (3V_0 - V_2) + \frac{3}{2}\nu R (T_3 - T_2) =$~~

~~$= p_0 (3V_0 - V_2) + \frac{3}{2}(3p_0V_0 - 3p_0V_2) =$~~

~~$= 3p_0V_0 - p_0V_2 + \frac{9}{2}p_0V_0 - \frac{9}{2}p_0V_2 =$~~

~~$= 7{,}5p_0V_0 - 5{,}5p_0V_2$~~

~~т.к. $V_0 \leq V_2 \leq 3V_0$,~~

~~$7{,}5p_0V_0 \leq Q_н$~~ ~~$7{,}5p_0V_0 - 5{,}5p_0V_0 \geq Q_н \geq 7{,}5p_0V_0 - 16{,}5p_0V_0$,~~

~~т.е. $2p_0V_0 \geq Q_н \geq -9p_0V_0$, но, т.к.~~

~~$Q_н > 0$ (по усл.): $0 < Q_н \leq 2p_0V_0$~~

~~$\eta = \frac{A_п}{Q_н} \cdot 100\%$, тогда $\eta \geq$~~

~~$\frac{1}{Q_н} \geq \frac{1}{2p_0V_0}$, $\frac{A_п}{Q_н} \geq$~~

прод. на листе №8

Чистовик

Лист №6

~~№6~~

т.к. AB - диаметр

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{F_A}|^2 + |\vec{F_B}|^2}$$, где $\vec{R}$ - равнод. сил $\vec{F_A}$ и $\vec{F_B}$

$$BC^2 = CO^2 + BO^2 - 2\, CO \cdot BO \cdot \cos\angle BOC$$

$$AC^2 = CO^2 + AO^2 + 2\, CO \cdot AO \cdot \cos\angle BOC$$

Пусть $\cos\angle BOC = x$; $|x| \le 1$; $AO = OB = OC = r$ (как радиусы)

$$BC^2 = 2r^2 - 2r^2 x = 2r^2(1-x)$$

$$AC^2 = 2r^2 + 2r^2 x = 2r^2(x+1)$$

$$F_A = G\frac{m_A \cdot m_C}{AC^2} = \frac{G m_A \cdot m_C}{2r^2(x+1)} \qquad F_A = \frac{G}{r^2}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$F_B = G\frac{m_B \cdot m_C}{BC^2} = \frac{G m_B \cdot m_C}{2r^2(1-x)} \qquad F_B = \frac{3G}{r^2}\cdot\frac{1}{1-x}$$

$$|\vec{R}|^2 = \frac{G^2 m_C^2}{r^4}\left(\left(\frac{m_A}{(x+1)}\right)^2 + \left(\frac{m_B}{(1-x)}\right)^2\right)$$

$|\vec{R}|$ - минимальна, если ф-ия

$$f(x) = \left(\frac{m_A}{(x+1)}\right)^2 + \left(\frac{m_B}{(1-x)}\right)^2$$ минимальна

$$D(f) = [-1;1]$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{3}{1-x}\right)^2 = \frac{(1-x)^2 + 9(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1 + 9x^2 + 18x + 9}{(x^2-1)^2} = \frac{10x^2 + 16x + 10}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2}{(x^2-1)^2}(5x^2 + 8x + 5)$$

(~~прод. на листе №7~~)

Чистовик

~~№6 (прод.)~~

Лист №7

Найдём f_{min}

$D(f) = [-1;1]$, $f(x) = \frac{2}{(x^2-1)^2}(5x^2+8x+5)$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{(10x+8) - 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$

$= \frac{2}{(x^2-1)^4} \cdot (10x+8-4x^3+4x) = \frac{-2}{(x^2-1)^4}(4x^3-14x-8) =$

$= \frac{-4}{(x^2-1)^4}(2x^3 - 7x - 4)$

$|\vec{R}|^2 = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^2 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{9}{(1-x)^2}\right)$

$|\vec{R}|$ принимает наим. значение, ~~когда~~ ~~прин.~~ при $\min\limits_{[-1;1]} f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{9}{(1-x)^2}$

$f(x) = \frac{(1-x)^2 + 9(1+x)^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-2x+1+9x^2+18x+9}{(x^2-1)^2} = \frac{10x^2+16x+10}{(x^2-1)^2} =$

$f'(x) = \frac{(20x+16)(x^2-1)^2 - 2(x^2-1) \cdot 2x(10x^2+16x+10)}{(x^2-1)^4} =$

$= \frac{4(x^2-1)}{(x^2-1)^4}\left(5x^3 - 5x + 4x^2 - 4 - 10x^3 - 16x^2 - 10x\right) =$

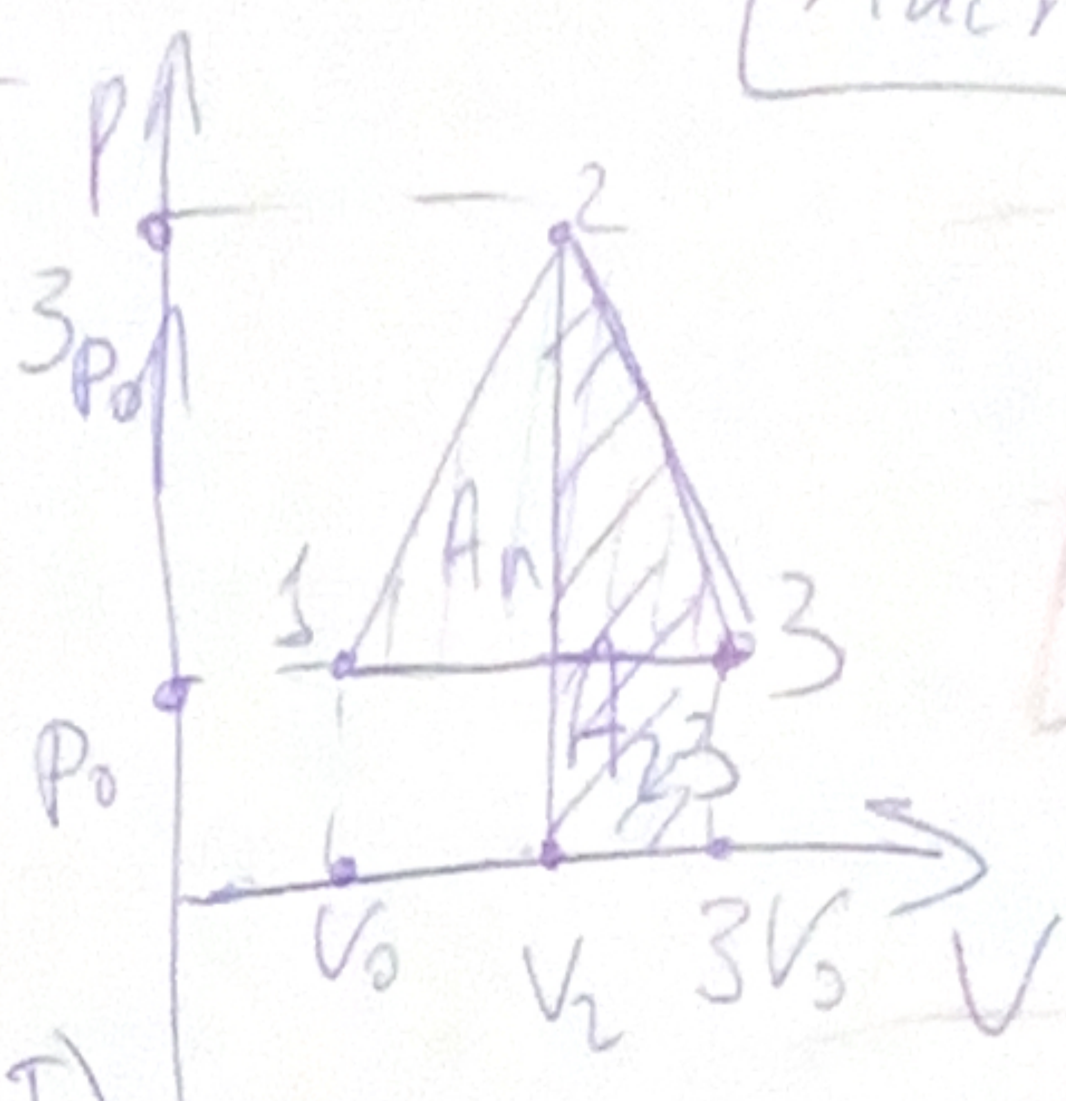
$= \frac{4}{(x^2-1)^3}(-5x^3 - 12x^2 - 15x - 4) =$

$= \frac{-4}{(x-1)^3(x+1)^3}(5x^3+12x^2+15x+4)$

Чистовик

№5

Лист №8



$Q_н = A_{2-3} + \Delta U$

$A_{2-3} = (3V_0 - V_2)\cdot 2p_0$

$Q_н = 6p_0V_0 - 2p_0V_2 + \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) =$

$= 6p_0V_0 - 2p_0V_2 + \frac{9}{2}p_0V_0 - \frac{3}{2}p_0V_2 =$

$= 10{,}5p_0V_0 - 6{,}5p_0V_2$

неверно

$V_2 \in [V_0; 3V_0] \Rightarrow -9p_0V_0 \le Q_н \le 4p_0V_0$

т.к. по усл. $Q_н > 0$, $0 < Q_н \le 4p_0V_0$,

тогда $\cancel{\frac{A_п}{Q_н}}$ т.к. $\eta = \frac{A_п}{Q_н}\cdot 100\%$, а

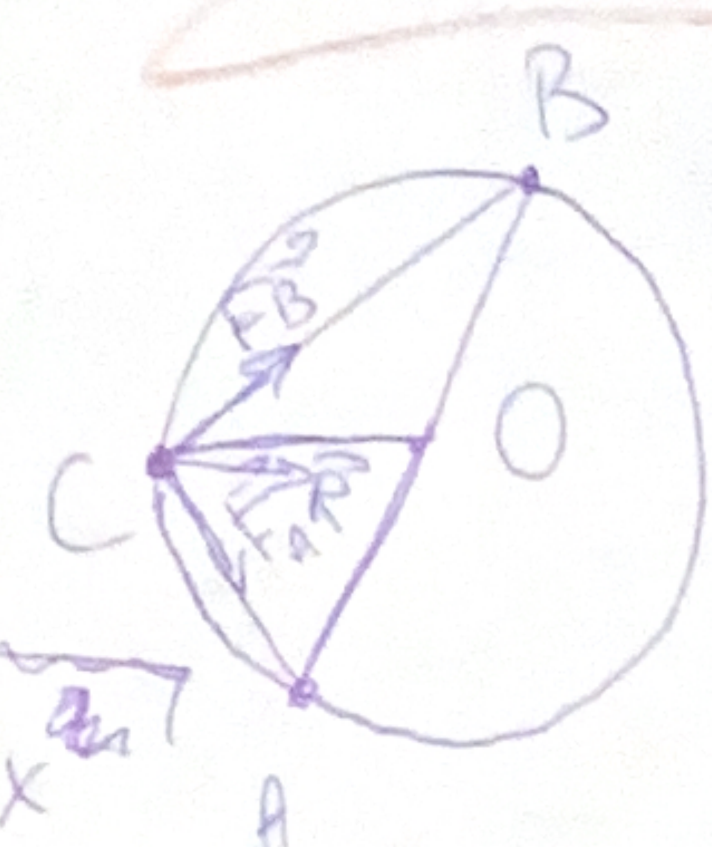
также $\eta < 100\%$ имеем:

$\frac{2p_0V_0}{4p_0V_0}\cdot 100\% \le \eta < 100\%$, т.е. $50\% \le \eta < 100\%$

Ответ: [50%; 100%)

№6

т.к. AB диам., $AC \perp CB$



$|\vec R| = \sqrt{|\vec F_A|^2 + |\vec F_B|^2}$, где $\vec R$ –

векторная сумма сил $\vec F_A$ и $\vec F_B$

Пусть $AC^2 = x$, тогда $CB^2 = \sqrt{d^2 - x^2}$

$F_A = \frac{m_A m_C}{AC^2}\cdot G$, $F_B = G\frac{m_B\cdot m_C}{BC^2}$

$F_A = 2G\cdot\frac{1}{x^2}$ $F_B = 6G\cdot\frac{1}{d^2-x^2}$

(прод. на листе №9)

Чистовик

№6 (прод.)

Лист №9

~~$|\vec{R}|^2 = (2G)^2\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{3}{d^2-x}\right)^2\right) =$~~

~~$= 4G^2\left(\frac{(d^2-x)^2+9x^2}{(d^2-x)^2x^2}\right) = 4G^2\frac{(d^4-2d^2x+10x^2)}{(d^2-x)^2x^2}$~~

~~Пусть $f(x) = \frac{10x^2-2d^2x+d^4}{x^2(x-d^2)^2}$~~

~~тогда $|\vec{R}|$ принимает наим. знач. при $\min\limits_{(0;d^2)} f(x)$~~

~~$f'(x) = (20x-2d^2)x^2(x-d^2)^2-(10x^2-2d^2x+d^4)\cdot$~~

$x = 2r^2 - 2r^2\cos\angle AOC$, ~~$x = 2r^2$~~

$4r^2 - x = 2r^2 + 2r^2\cos\angle AOC$

Пусть $\cos\angle AOC = t$, $|t| \le 1$, тогда

$x = 2r^2(1-t)$

$4r^2 - x = 2r^2(1+t)$, т.е. $d^2 - x = 2r^2(1+t)$

$F_A = \frac{2G}{2r^2(1-t)} = \frac{G}{r^2}\cdot\frac{1}{1-t}$

$F_B = \frac{6G}{2r^2(1+t)} = \frac{3G}{r^2}\cdot\frac{1}{1+t}$

$|\vec{R}|^2 = \left(\frac{G}{r^2}\right)^2\left(\frac{(1+t)^2+9(1-t)^2}{(1-t^2)^2}\right) = \left(\frac{G}{r^2}\right)^2\left(\frac{t^2+2t+1+9t^2-18t+9}{(1-t^2)^2}\right) =$

$= \left(\frac{G}{r^2}\right)^2\left(\frac{10t^2-16t+10}{(1-t^2)^2}\right) = \frac{2G^2}{r^4}\left(\frac{5t^2-8t+5}{(1-t^2)^2}\right)$

$|\vec{R}|$ – наим. при $\min\limits_{(-1;1)} f(t)$, где $f(t) = \frac{5t^2-8t+5}{(1-t^2)^2}$

$f'(t) = \frac{(10t-8)(1-t^2)^2 + 2\cdot(1-t^2)\cdot 2t}{(1-t^2)^4}$

(прод. на листе №10)

Чистовик

№6 (прод.)

Лист №10

$$f'(t) = \frac{2(1-t^2)^2}{(1-t^2)^4}\left(10t+8-10t^3-8t^2+4t\right) =$$

$$= \frac{-2\left(5t^3+4t^2-7t-8\right)}{(1-t^2)^3} = \frac{2\left(5t^3+4t^2-7t-8\right)}{(t-1)^3(t+1)^3}$$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow 5t^3+4t^2-7t-8=0$

~~Возм. рац. корни: $\pm 2; \pm 1; \pm 4; \pm 8; \pm\frac{1}{5}; \pm\frac{2}{5}; \pm\frac{4}{5}; \pm\frac{8}{5}$~~

	5	4	−7	−8	
2	5	14	21	42−8	≠0
−2	5	−6	5	−18	≠0
4	5	24			≠0
−4	5	−16			≠0
$\frac{1}{5}$	5	5	−6	$-8-\frac{6}{5}$	≠0
$-\frac{1}{5}$	5	3	$-7-\frac{3}{5}$		≠0
$-\frac{4}{5}$	5	0	−7	$\frac{28}{5}-8$	

~~$f''(t)=15t^2+8t-7$~~

~~$f''(t)=0 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow 15t^2+8t-7=0 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow 15t^2+15t-7t-7=0 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow (15t-7)(t+1)=0$~~

~~$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{7}{15} \\ t=-1 \end{array}\right.$~~

~~$f'(-1)<0$, $f'(-1)=$~~

~~на $(-\infty;-1)$~~ $f''(t)$: $+$ -1 $-$ $\frac{7}{15}$ $+$ t

~~$f'(t)=\infty$~~

~~$-7+(-1)+0$~~

~~$f'(-1)<0$~~

~~$\Rightarrow$ на $\left[-1;\frac{7}{15}\right]$, $f'(t)<0$~~

~~$f'(t)$~~

Идея верна, но решение не закончено

Чистовик №4(прод.) Лист №11

Пусть $S_Г$ – расстояние между А и Г

Тогда $t_1 = \frac{S_Г}{v_п}$, где t_1 – время, за которое поезд доезжает от А до Г, $v_п$ – скорость поезда

~~В день поезд находится на пути из Г в Г, проходя через А, где n – количество рейсов поезда,~~ $\cancel{n = \frac{v_п \cdot 24}{100} = \frac{24 v_п}{100} = 0{,}24 v_п}$

$\cancel{\tau_1 = 0{,}24 v_п t_1 = 0{,}24 S_Г}$

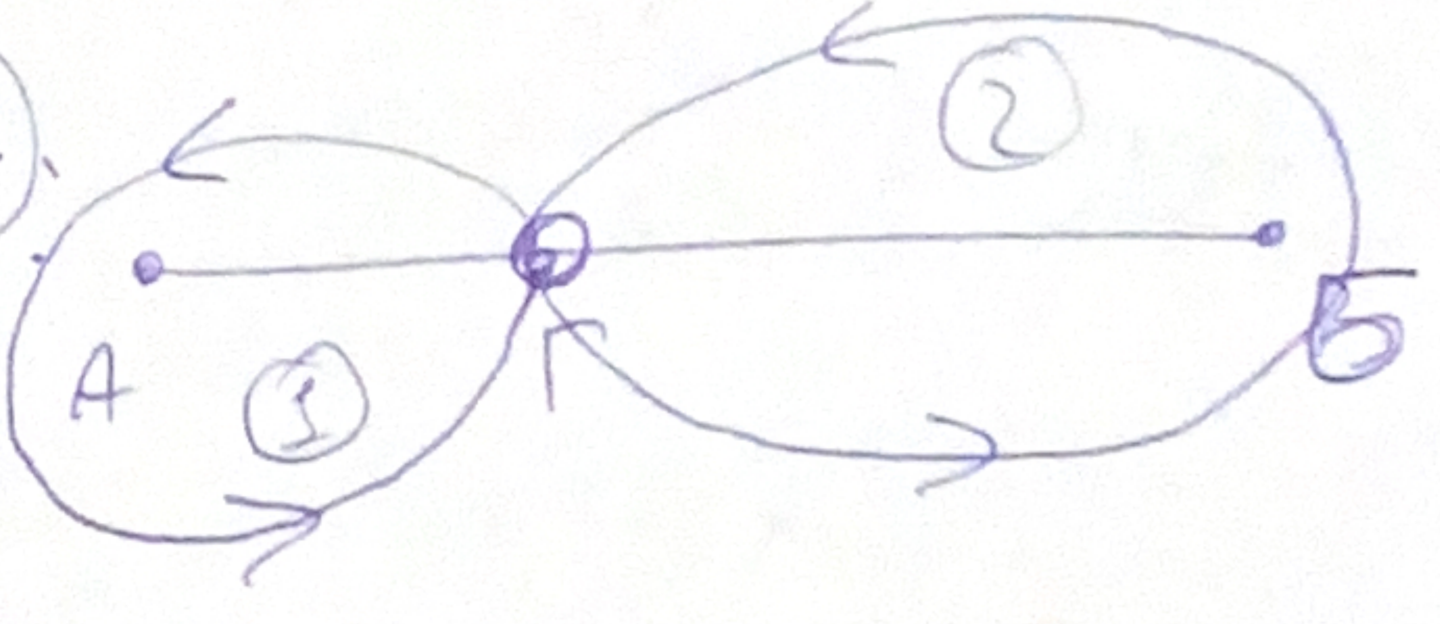
~~А на пути из Г в Г, проходя через В~~

$\cancel{\tau_2 = 2\left(\frac{100}{v_п} - t_1\right) \cdot n = 0{,}24 v_п \left(\frac{100}{v_п} - t_1\right) =}$

$\cancel{= 24 - 0{,}24 v_п t_1}$

~~Когда поезд отъехал от Г и направляется в А~~

~~Рассмотрим маршрут 1.~~



Если подойти к станции Г во время, когда поезд находится на 1, то пассажир попадёт в Б, если подойти к станции Г во время нахожд. поезда на БГ, пассажир попадёт в А. ~~иначе~~

~~Вероятность I-го события~~ $\cancel{P_{1} = \frac{0{,}24 S_Г}{24} = 0{,}01 S_Г}$

~~Вероятность II-го события~~ $\cancel{P_{2} = 1 - P_{1} = \frac{24 - 0{,}24 S_Г}{24} =}$

$\cancel{= 1 - 0{,}01 S_Г = 0{,}99 S_Г}$

Вероятность первого события: $P_{1} = \frac{S_Г}{S}$

Вероятность второго события: $P_{2} = 1 - \frac{S_Г}{S}$

(прод. на листе №12)

Чистовик №4 + Лист №12

~~Время нахожд~~ по усл. вероятность попадания в Б равна $\frac{143}{365}$, т.е $P_{(1)} = \frac{143}{365}$, тогда

$\frac{S_Г}{S} = \frac{143}{365}$, тогда $S_Г = \frac{143 \cdot 100}{365} =$

$= \frac{143 \cdot 20}{73} = \frac{2860}{73} = 39\frac{13}{73}$

$$\begin{array}{r|l} 2860 & 73 \\ -219 & 39 \\ 670 & \\ -657 & \\ 13 & \end{array}$$

Дополнение: время нахождения поезда в пункте Г принебрежимо мало, потому случай, когда поезд находится в пункте Г, в момент времени, при котором пассажир зашёл на станцию не рассматривается.

Ответ: $39\frac{13}{73}$ км