Выход $13^{30} - 13^{35}$

40-89-96-03
(20.1)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 232

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников по механике и математическому моделированию

по

Савчук Дарьи Артемовны 26.02.2023

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«26» февраля 2023 года

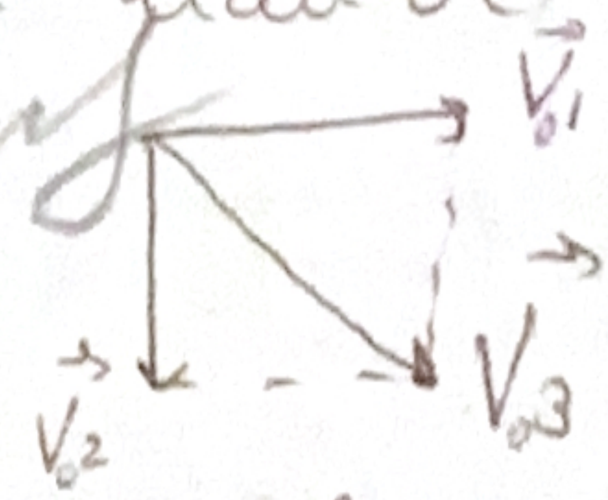
Подпись участника

40-89-96-03
(20.1)

Задача 1 (+)

100 (сто)

Найдём скорость, которую сообщили шайбе в третий раз.



$|\vec{V_{03}}| = \sqrt{|\vec{V_{01}}|^2 + |\vec{V_{02}}|^2}$.

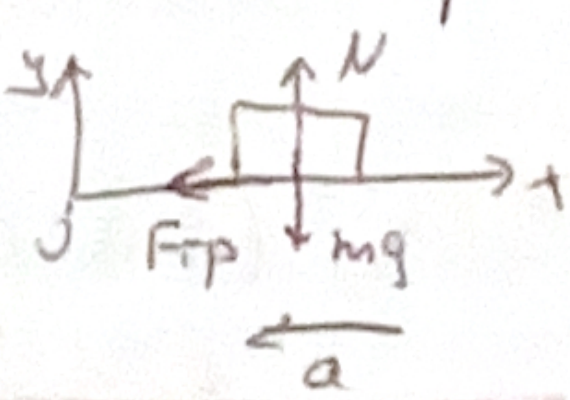
Для этого выразим скорости из законов движения.

$V_к = V_0 - at \Rightarrow t = \frac{V_0}{a}$

$V_к$ - конечная скорость (после остановки $V_к = 0$)

V_0 - начальная скорость

Запишем II з-н Ньютона для шайбы в проекции на ось O_y и O_x.



O_y: $N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

O_x: $-F_{тр} = -ma$

$F_{тр} = \mu N = \mu mg$ $\Big\} \Rightarrow \mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g$

т.е. ускорение не зависит от скорости и одинаково для всех случаев.

I: $x_1(t) = x_0 + V_{01} t_1 - \frac{a t_1^2}{2}$ ($t_0 = 0$, а возьмём >0)

$t_1 = \frac{V_{01}}{a}$ (из доказанного выше)

$x_1(t) = V_{01} \cdot \frac{V_{01}}{a} - \frac{a \cdot V_{01}^2}{2a^2} = \frac{V_{01}^2}{a} - \frac{V_{01}^2}{2a} = \frac{V_{01}^2}{2a} = 12$

II: $x_2(t) = V_{02} \cdot \frac{V_{02}}{a} - \frac{a \cdot V_{02}^2}{2a^2} = \frac{V_{02}^2}{2a} = 5$

Тогда $V_{01}^2 = 24a$ $V_{02}^2 = 10a$

$|\vec{V_{03}}| = \sqrt{V_{01}^2 + V_{02}^2} = \sqrt{34a}$

Подставим в закон движения: (учитывая, что $t_3 = \frac{V_{03}}{a}$)

$x_3(t) = V_{03} \cdot \frac{V_{03}}{a} - \frac{a \cdot V_{03}^2}{2a^2} = \frac{V_{03}^2}{2a} = \frac{34a}{2a} = 17$ (м)

Ответ: 17 (м)

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Задача 3 Пусть x (км) - расстояние до места встречи
V (км/ч) - скорость Гаврилы

(+)

6 мин $= \frac{6}{60}$ часа $= 0,1$ часа

Тогда $t = \frac{0,1 \cdot V}{20 - V}$ - время после выезда отца, за которое он догнал Гаврилу

$(20 - V)$ - общая скорость (Гаврила едет медленнее, раз отец его догнал)

$0,1V$ - расстояние, на которое уехал Гаврила за 6 минут

И $\frac{3-x}{V} = \frac{x}{20}$ - время, за которое отец вернулся, равно времени, за которое Гаврила доехал до школы

$20t = x$ (расстояние до встречи равно скорости отца умножить на время пути)

$$\begin{cases} \frac{2V}{20-V} = x \\ \frac{3-x}{V} = \frac{x}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2V = 20x - Vx & (1) \\ 20(3-x) = Vx & (2) \end{cases}$$

(+) (сложим (1) и (2))

$60 - 20x + 2V = 20x - Vx + Vx$

$2V = 40x - 60$

$V = 20x - 30$

И подставим V в (1) ур-е

$40x - 60 = 20x - 20x^2 + 30x \quad |:10$

$2x^2 - x - 6 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 2 = 1 + 48 = 49$

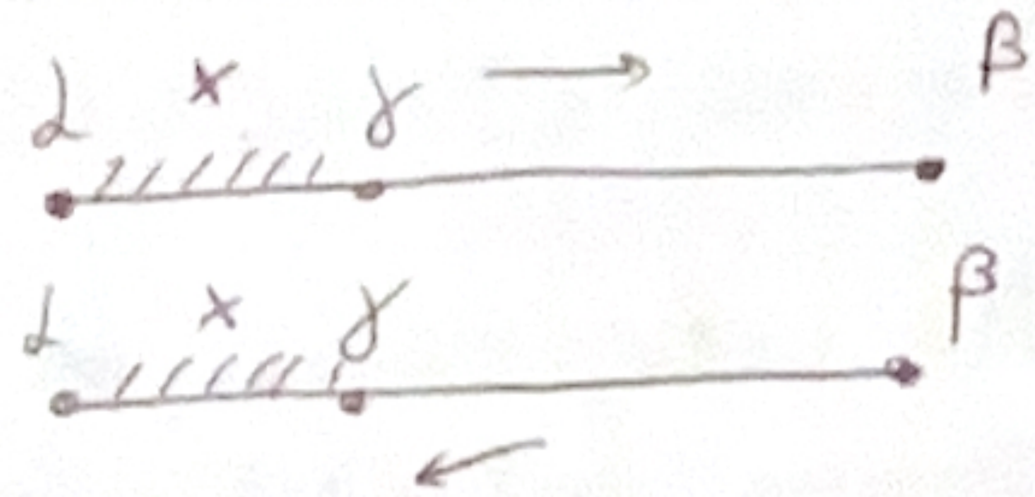
$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$ - не подходит, т.к. x - расстояние

Значит, папа догнал Гаврилу на расстоянии 2 (км)

Ответ: 2 (км)

40-89-96-03 (20.1)

Задача 4 Пусть Альфоград – α
Бетовск – β
Гаммов – γ



Пусть расстояние от α до γ – x (км)

Если Гаврила сядет на поезд, который находится между α и γ (кроме случая, когда поезд стоит в γ и едет в α), то он доедет в город β

(Рассматриваем модель, где поезд ходит челноком от α в β).

В другом случае поезд поедет в α.
(т.к. если поезд между α и γ и идёт в сторону β, то он доедет до γ и увезёт Гаврилу в β. Если же поезд между γ и ~~β~~ α, но едет в α, то он развернётся в α и всё равно увезёт Гаврилу в β).

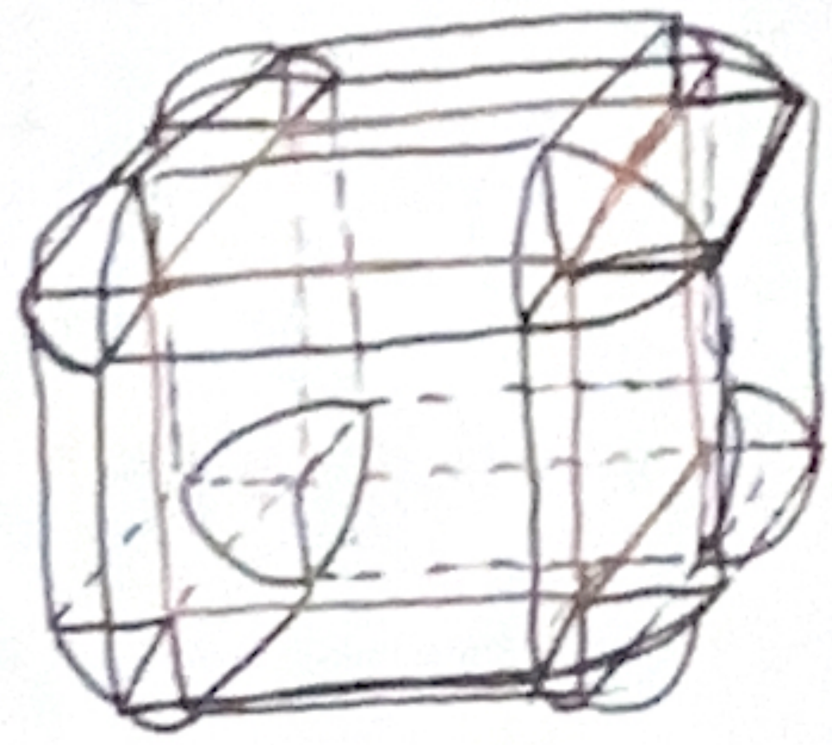
Значит вероятность уехать в ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~: ~~[illegible]~~ город β: $p(\beta) = \frac{x}{100}$ (вер-ть, что поезд попадает в промежуток $\alpha - \gamma$)

Из условия $p(\beta) = \frac{143}{(143+222)} = \frac{143}{365}$

Значит, $\frac{x}{100} = \frac{143}{365} \Rightarrow x = \frac{14300}{365} = \frac{2860}{73} \approx 39,18$ (км)

Ответ: $\approx 39,18$ (км)

Задача 2 +



На скворечник ~~на~~ на каждой грани наросли параллелепипеды льда.
Два с параметрами $20 \times 20 \times 4$
И еще 4 с параметрами $20 \times 10 \times 4$
На рёбрах (как на осях) наросли четверти цилиндра (с радиусом 4). Соответственно, 8 из них длиной 20(см) и 4 длиной 10(см).
На вершинах наросли шаровые ~~сектора~~ части с радиусом 4(см) (8 штук). Так каждая точка будет отстоять от пов-ти скворечника на 4 (см).
(По сторонам это высота наростов в виде параллелепипедов, на вершинах точки на ~~округ~~ шаре~~секторе~~ тоже на 4 (см) и на рёбрах четверти окр-ти с радиусом 4 в составе цилиндра)

Тогда $V_{парал.} = 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 4 + 4 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 4 = 3200 + 3200 = 6400$ (см^3)

$V_{цил} = 4 \cdot \frac{10 \pi 4^2}{4} + 8 \cdot \frac{20 \pi 4^2}{4} = 160\pi + 640\pi = 800\pi$ (см^3)

$V_{шар.} = 8 \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi 4^3}{8} = \frac{256}{3}\pi$

(шаровых ~~секторов~~ частей 8 и они ~~под углом телесным~~ $\frac{\pi}{4}$ ~~45~~ ~~центр, т.е.~~ вместе складываются в шар, т.к. ограничены тремя перпендикулярными плоскостями)

$V_{нароста} = 6400 + 800\pi + \frac{256}{3}\pi = 6400 + \frac{2656}{3}\pi$ (см^3)

Пусть $\pi \approx 3{,}142$, а $\frac{256}{3} \approx 85{,}3$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

40-89-96-03 (20.1)

Тогда $V_{нароста} \approx 6400 + 2513,6 + 268,0126 = 9181,6126$ (см³) ≈ ~~[illegible]~~ $\approx 9181,613$ (см³)

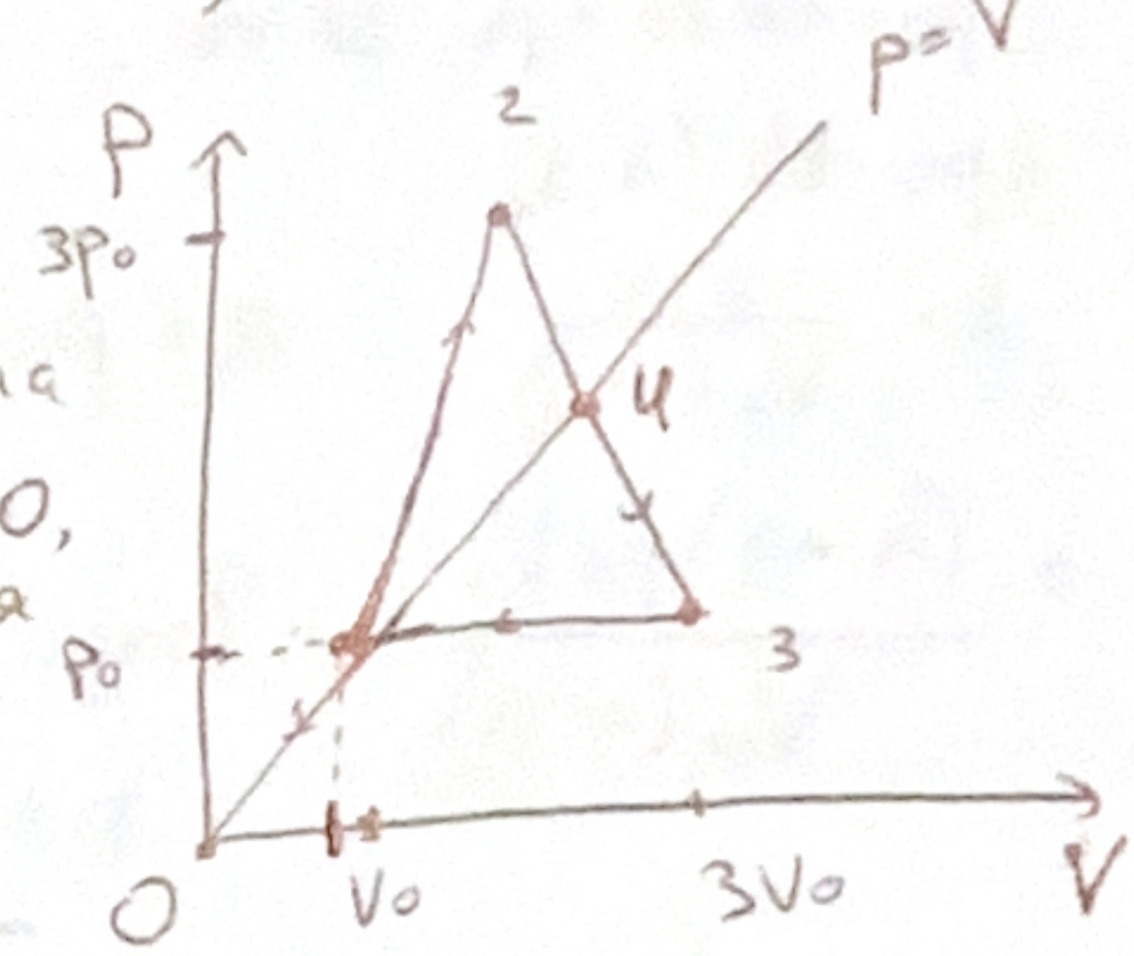
Масса нароста $m = V_н \cdot \rho$

Точная масса: $m = \left(6400 + \frac{2656}{3}\pi\right) \cdot \frac{9}{10} = 5760 + 796,8\pi$ (г)

С точностью до сотых: $m = 9181,613 \cdot 0,9 = 8263,4517$ (г) ≈ $\approx 8263,45$ (г)

Ответ: $(5760 + 796,8\pi)$ (г); $8263,45$ (г)

Задача 5 (+/2)



Для нахождения КПД цикла нужна работа газа и тепло, полученное от нагревателя за весь цикл.

Пусть $V_2 = xV_0$
$x \in [1;3]$

A — площадь фигуры 1-2-3

$A = 2V_0 \cdot 2p_0 \cdot \frac{1}{2} = 2V_0p_0$

$Q_н = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$ — сумма полученного тепла во всех процессах.

$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}$ (по I началу термодинамики)

A_{12} — площадь под прямой 1-2 $\Rightarrow A_{12} = \frac{p_0 + 3p_0}{2}(xV_0 - V_0) = 2p_0V_0(x-1)$

$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{3}{2}(3p_0xV_0 - p_0V_0) = \frac{3}{2}p_0V_0(3x-1)$

$Q_{12} = p_0V_0\left(2x - 2 + \frac{9}{2}x - \frac{3}{2}\right) = p_0V_0\left(\frac{13}{2}x - \frac{7}{2}\right)$ — тепло, полученное от нагр. в процессе 1-2

В процессе 2-3 газ получает тепло только на участке. Значит сначала $A \geq -\Delta U$ (т.к. ΔU отрицательное), а потом $A < -\Delta U$ и газ начинает отдавать тепло

$A = -\Delta U \Rightarrow$ (пусть объём, до которого газ получал тепло будет V_4) это точка, где $p = V$

Нужно найти точку 4 - это пересечение графика ~~2-3~~ и $p=V$

Запишем координаты точек 2 и 3:

$2(3p_0, xV_0)$ $\quad 3(p_0; 3V_0)$

$p=a+kV$ - прямая 2-3 в общем виде $(k<0)$

Тогда $\begin{cases} 3p_0 = k x V_0 + a \\ p_0 = 3kV_0 + a \end{cases}$

$a = p_0 - 3kV_0$

$3p_0 = xkV_0 + p_0 - 3kV_0$

$2p_0 = V_0 k(x-3)$

$k = \frac{2p_0}{V_0(x-3)}$ $\quad a = p_0 - \frac{6p_0V_0}{V_0(x-3)} = \frac{p_0V_0(x-3)-6p_0V_0}{V_0(x-3)} =$

$= \frac{(x-9)p_0V_0}{V_0(x-3)}$ Тогда прямая 2-3:

$$p = \frac{2p_0}{V_0(x-3)}V + \frac{(x-9)p_0V_0}{V_0(x-3)}$$

$Q_{24} = A_{24} + \Delta U_{24} = p\Delta V + \frac{3}{2}\Delta pV) = (a-kV)\Delta V + \frac{3}{2}(-kV)\Delta V = \frac{1}{2}\Delta V(\frac{a}{2} - 5kV)$

Где A_{24} - площадь под этой прямой

~~$p=kV+a$~~ Пусть $k=-k$ где $p=-kV+a$ $\Delta p = -kV$

В процессе 3-1 газ не получает тепло, т.к. это изобарное сжатие $\Rightarrow Q_н = Q_{12} + Q_{24}$

$\eta = \frac{A}{Q_н}$

решение не закончено

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Задача 6 +

Угол $\angle BCA = 90^\circ$, т.к. он опирается на диаметр => угол между векторами сил прямой, т.е.

$$|\vec{F}_{сум}| = \sqrt{F_{AC}^2 + F_{BC}^2}$$

Пусть $m_A = m$, $m_B = 3m$, $m_C = m_0$

$$F_{AC} = G\frac{mm_0}{AC^2}$$

$$F_{BC} = G\frac{3mm_0}{BC^2}$$

Пусть $\alpha = \angle BAC \Rightarrow BC = AB\sin\alpha$, $AC = AB\cos\alpha$

Тогда $|\vec{F}_{сум}| = G\frac{mm_0}{AB^2}\sqrt{\frac{1}{\cos^4\alpha} + \frac{9}{\sin^4\alpha}}$

$G\frac{mm_0}{AB^2} = const = C$, а $\cos^2\alpha = x \in [0;1]$

Тогда $\sin^2\alpha = 1 - x$

Запишем как функцию от x:

$$F(x) = C\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(1-x)^2}}$$

Нужно минимизировать функцию (пусть $9 = z$)

Для этого возьмём производную и найдём её нули.

$$F'(x) = C \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{z}{(1-x)^2}}} \cdot \left(\frac{-2x}{x^4} + \frac{z \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4}\right) = 0$$

$C > 0$; $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{z}{(1-x)^2}}} > 0$; $\frac{1}{2} > 0$

т.е. $\frac{2z}{(1-x)^3} - \frac{2}{x^3} = 0$ (где $z = 9$)

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, т.к. BC – не диаметр (Если же BC и AB совпадают, то $\alpha = 0$, но $F_C = F_{BC}$ не минимальная)

подставим все замены:

$$\frac{18}{\sin^6\alpha} - \frac{2}{\cos^6\alpha} = 0$$

$\sin^6\alpha = 9\cos^6\alpha \,|: \cos^6\alpha$ (Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ и $\alpha \neq 0$)

$\mathrm{tg}^6\alpha = 9$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt[3]{3} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\sqrt[3]{3}$

Тогда дуга $\overset{\frown}{BC} = 2\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt[3]{3}$

Ответ: $2\,\mathrm{arctg}\sqrt[3]{3}$

18

$p = kV + a$

$(kV+a)\Delta V + \frac{3}{2}(kV+a)\Delta V = \Delta V\left(-\frac{9}{2}kV + \frac{9}{2}a\right)$

$A = \frac{3p_0 + p_4}{2}(V_4 - V_2) = \frac{3p_0 + V_4}{2}(V_4 - xV_0)$

$\cancel{\frac{3}{2}(3p_0 - 2(a-kV))\Delta V = \frac{9}{2}p_0}$

$\cancel{\Delta p = 2k\,x\,V_0 + a}$ $\Delta p = (-kV_4 + a) - (-xkV_0 + a) =$
$= k(xV_0 - V_4)$ $Q_{24} = \frac{1}{2}(5a - 8kV)$

$\frac{5}{2}\Delta(pV) = \frac{5}{2}$

$\cancel{V_4} \frac{2p_0}{V_0(x-3)}V + \frac{(x-9)p_0V_0}{V_0(x-3)} = V$

$V_4 = \frac{(9-x)p_0}{(x-3)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2p_0}{V_0(x-3)}} = \frac{(9-x)p_0 \cdot V_0\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(V_0(x-3) - 2p_0)} =$

$= \frac{(9-x)p_0V_0}{V_0(x-3) - 2p_0}$

$A_{24} = \frac{3p_0 + p_4}{2}(V_4 - V_2) =$

$= \left(3p_0 + \frac{(9-x)p_0V_0}{V_0(x-3) - 2p_0}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{(9-x)p_0V_0}{V_0(x-3) - 2p_0} - xV_0\right) =$

$= \frac{3p_0V_0(x-3) - 6p_0^2 + (9-x)p_0V_0}{\frac{1}{2}V_0(x-3) - p_0} \cdot \left(\frac{(9-x)p_0V_0 - xV_0^2(x-3) - 2p_0xV_0}{V_0(x-3) - 2p_0}\right) =$

$=$

$(1-x)^3 = 8x^3 z^2$

$1 - 3x + 3x^2 - x^3 = z^2x^3$

$x^3(z^2+1) - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

$\sin^3\alpha = 9\cos^3\alpha$

$\frac{2z^2(1-x)}{(1-x)^4} - \frac{2x}{x^4} = 0$

$\mathrm{tg}^3\alpha = 9$

$\cancel{\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{\ }$

 черновик

$2860 : 73 = 39{,}1780$

-219, 670, -657, 130, -73, 570, -511, 590

$73 \cdot 9 = 657$

$73 \cdot 7 = 511$; $73 \cdot 8 = 584$

$14300 : 5 = 2860$

$365 : 5 = 73$

$256 : 3 = 85{,}3$

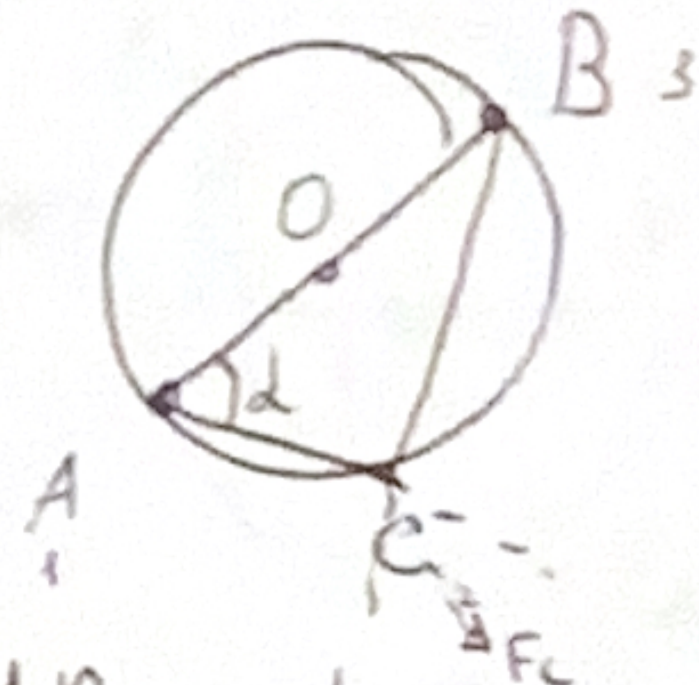
$314 \cdot 8 = 2512$; $251{,}36$

$3142 \cdot 853$: 9426, 15710, 25136; $268{,}0126$

Пусть $A = m$

$B = 3m$

$c = m_0$



$$F_{AC} = G\frac{m m_0}{AC^2}$$

$$F_{BC} = G\frac{3m m_0}{BC^2}$$

$$AC = AB\cdot\cos\alpha$$

$$BC = AB\cdot\sin\alpha$$

$$G\frac{m m_0}{AB^2} = const = C$$

$$F_C = \sqrt{F_{AC}^2 + F_{BC}^2} = \frac{G m m_0}{AB^2}\sqrt{\frac{1}{\cos^4\alpha} + \frac{9}{\sin^4\alpha}} = f(\alpha)$$

$x = \cos^2\alpha$

$\sin^2\alpha = 1 - x$

$2656 \cdot 3 = 7968$

$$\cancel{f'(\alpha) = C\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^4\alpha}+\frac{9}{\sin^4\alpha}}}}$$

$$f(x) = C\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(1-x)^2}}$$ — нужно минимизировать квадрат

$$f'(x) = \cancel{C}\cancel{\tfrac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{9}{1-x}}}\cdot\left(\frac{9}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

>0

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{1-x}\right)' = \frac{-1}{x^2} + \frac{-9(-1)}{(1-x)^2} = \frac{9}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{9}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{9x^2 - (1-x)^2}{(1-x)^2 x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$9x^2 - (1 - 2x + x^2) = 8x^2 + 2x - 1 = 0$$

$D = 4 + 84 = 36$ $\quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{16} = \frac{1}{4};\ -\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(1-x)^2}\right)' = \frac{-2x}{x^4} + \frac{9\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{18 - 18x}{(1-x)^4} - \frac{2x}{x^4} = 0$$

$$\frac{18}{(1-x)^3} - \frac{2}{x^3} = 0$$

$$f'(x) = \cancel{C}\cdot\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{9}{(1-x)^2}}}\cdot\left(\frac{18}{(1-x)^3} - \frac{2}{x^3}\right) = 0$$

>0

$18x^3 - 2(1 - 3x + 3x^2 - x^3) = 0$

$18x^3 - 2 + 6x - 6x^2 + 2x^3 = 0$

$(1-x)^3$

$20x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$

$10x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$\frac{V_{01}^2}{2a}=12$

$\frac{V_{02}^2}{2a}=5$

$V_{01}^2=24a$

$V_{02}^2=10a$

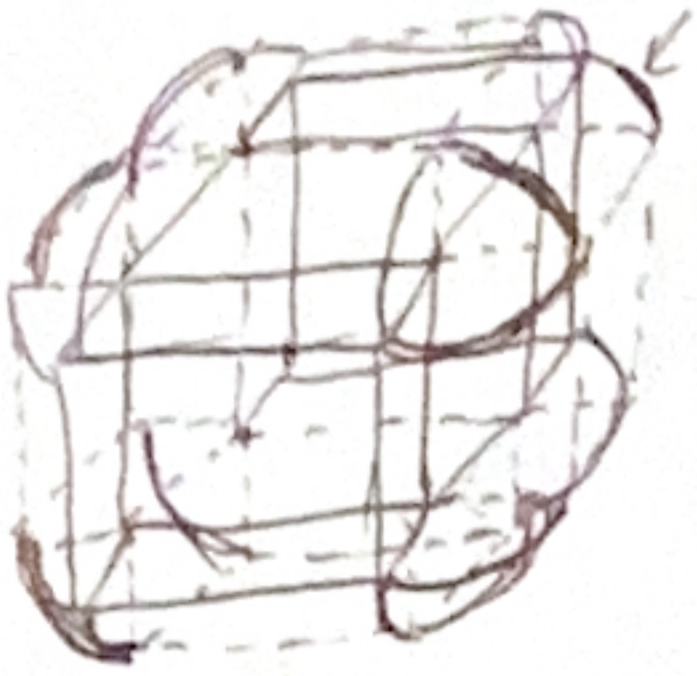
$V_3=\sqrt{24a+10a}=\sqrt{34a}$

$x_3(t)=V_3t-\frac{at^2}{2}=\frac{V_3^2}{2a}=17$

$t_3=\frac{V_3^2}{2a}$ $\frac{34a}{2a}=17$

$t_3=V$

$$\frac{\times\ 640}{9}\\5760$$



а тут дуга 4, так что все ок

Если будут дуги, то отстоять д будет на 4.

Тогда это куски цилиндров их всего 12

Еще параллелепипеды их 6

Тут диагональ

А в углах тогда тоже что-то должно быть.

Это шаровые сектора. их 8.

3142 × 853 = 9426 + 15710 + 25136 = 2680126

2513,6000 + 268,0126 = 2781,6126

2781,6126 + 6400 = 9181,6126

$t=\frac{0{,}1\cdot V}{(V-20)}$ - время до встречи после выезда отуда

$S_1=V\cdot 0{,}1$

6 мин = 0,1 часа

$t=\frac{0{,}1V}{20-V}$

$\frac{2V}{20-V}=x$

$20t=x$

$\frac{3-x}{V}=\frac{x}{20}$

$$\begin{cases}60-20x=Vx\\ \frac{2V}{V-20}=x\end{cases}$$

$2V=Vx-20x$

$Vx=2V+20x$

$60-20x=Vx$

$2V+20x-60+20x=0$

$V=30-20x$

$60-40x=30x-20x^2-20x\ |:10$

$2x^2-5x+6=0$

$2V=Vx-20x$

$60-20x-2V=Vx-Vx+20x$

$40x=60-2V$

$V=30-20x$

$60-20x=30x-20x^2$

$20x^2-30x+60=0\ |:10$

$2x^2-5x+6=0$

$D=25-24=1$

$x_{1,2}=\frac{5\pm1}{4}=1;\frac{3}{2}$

$V=$

$2V=20x-Vx$

$$\begin{cases}Vx=20x-2V\\ Vx=60-20x\end{cases}$$

$20x-2V-60+20x=0$

$V=20x-30$

$40x-60=20x-20x^2+30x$

$2x^2-x-6=0$

$D=1+4\cdot6\cdot2=49$

$x_{1,2}=\frac{1\pm7}{4}=2;-\frac{3}{2}$

918,613 × 0,9 = 826,7517