0 516112 480000

51-61-12-48
(20.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 232

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов

по механике и математическому моделированию

Сметанина Григория Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«26» февраля 2023 года

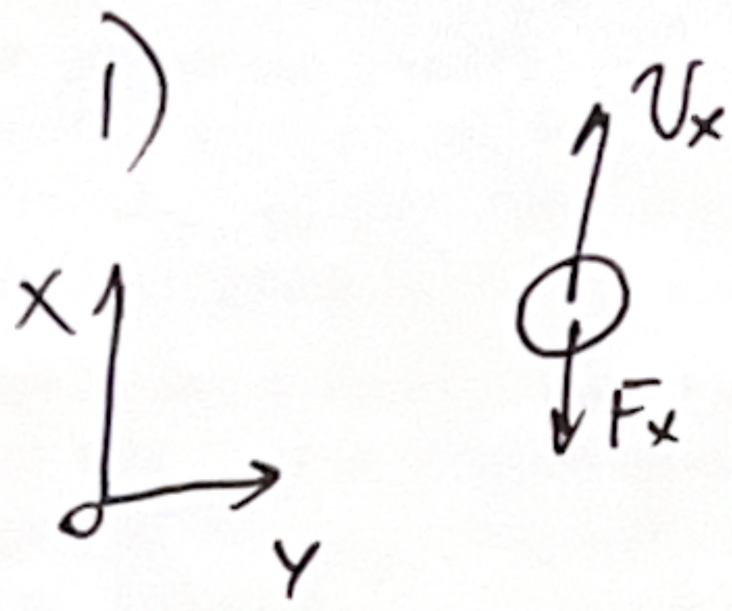
Подпись участника

51-61-12-48 (20.1)

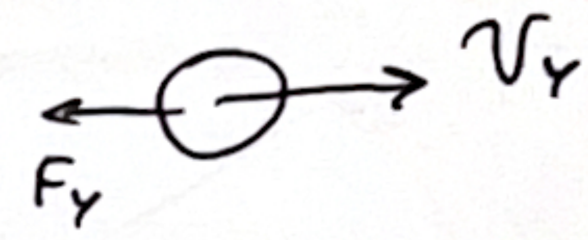
Шахтовская. Черновик

№1.

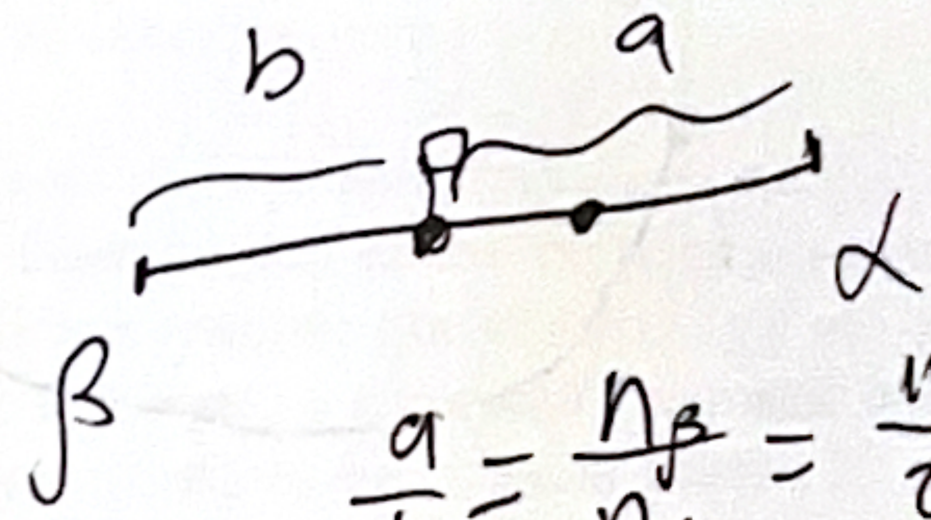
1)



2)



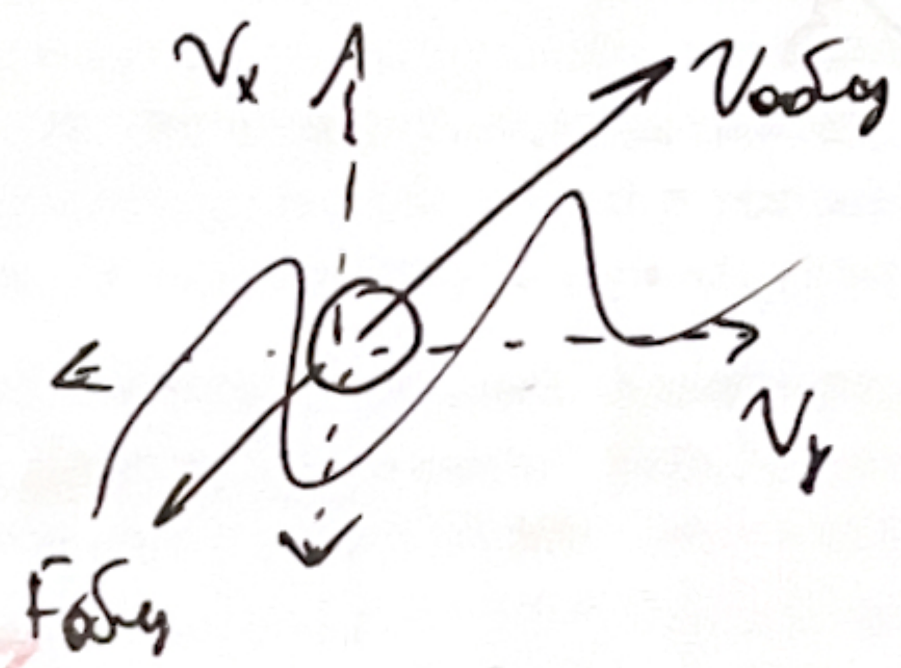
$a+b=100$

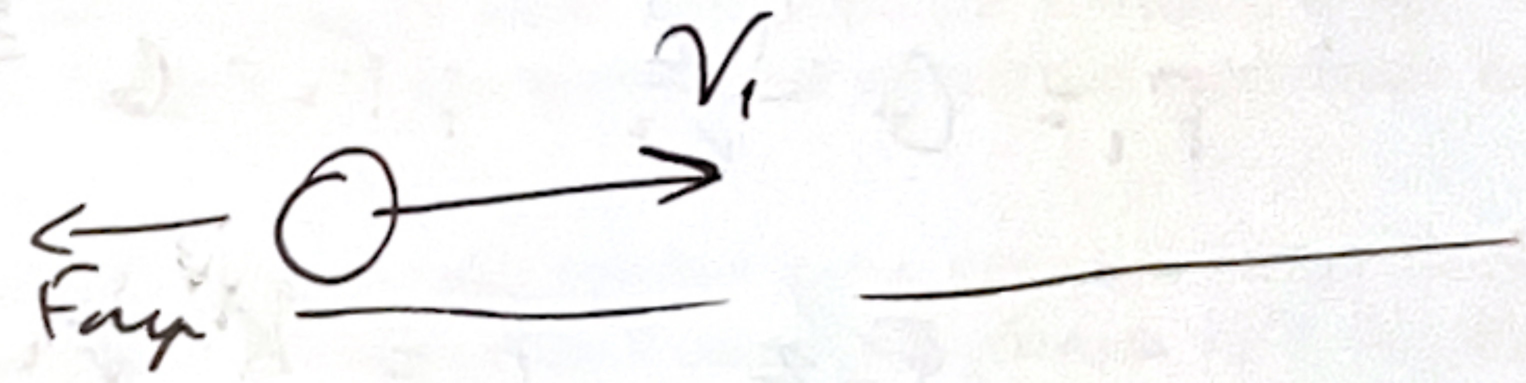


$\frac{a}{b}=\frac{n_\beta}{n_\alpha}=\frac{143}{222}$

$a=\frac{143}{365}$

3)



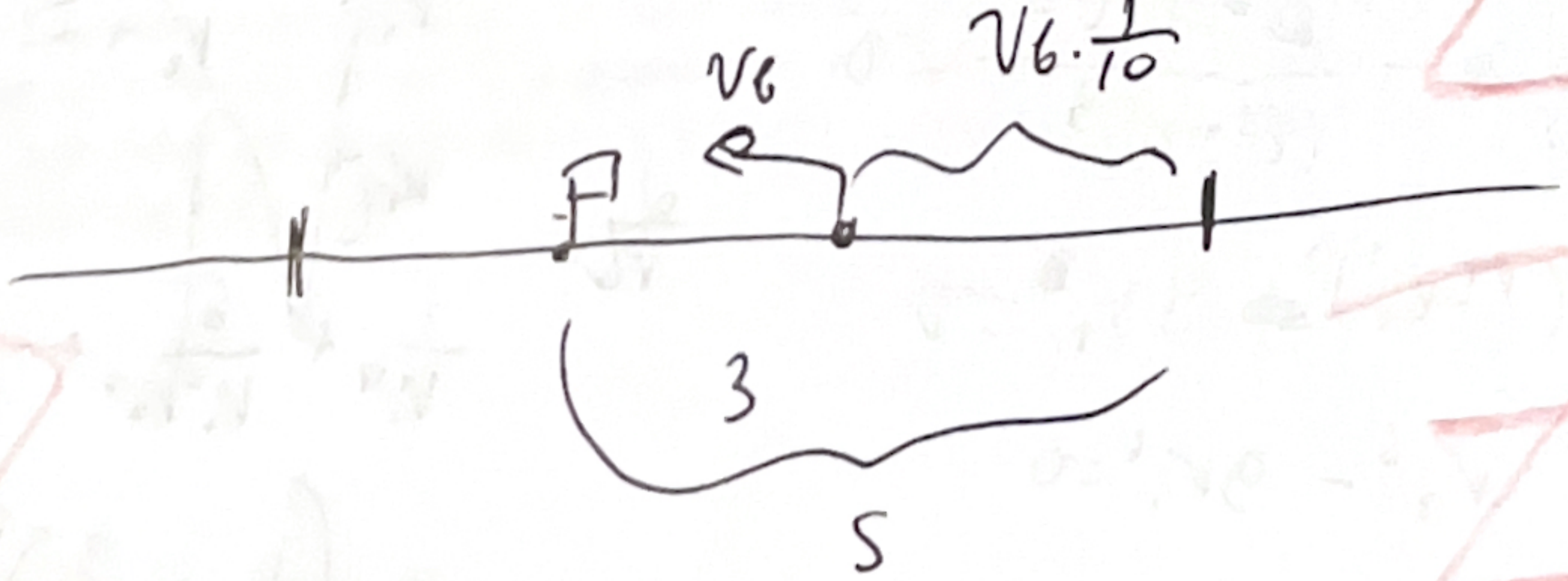


$V_3^2=V_1^2+V_2^2$

$\frac{mV_1^2}{2}=F_{тр}l_1$

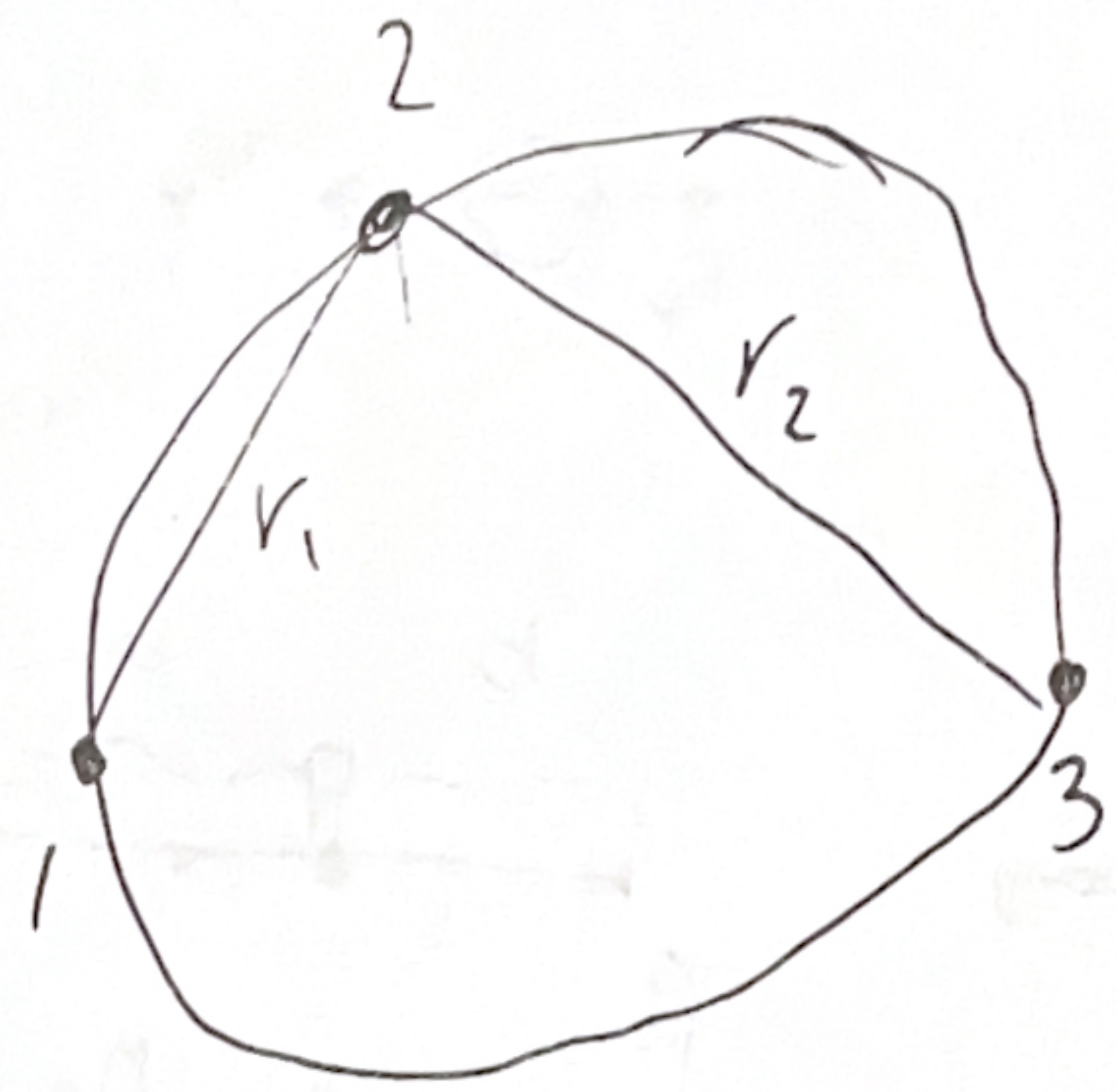
$\frac{mV_2^2}{2}=F_{тр}l_2$

$\frac{m(V_1^2+V_2^2)}{2}=F_{тр}(l_1+l_2)\Rightarrow l_3=17м$



$\frac{S}{20}=\frac{S-V_в\frac{1}{10}}{V_в}$ $\frac{2S}{20}=\frac{3}{V_в}-\frac{1}{10}$

Черновик.



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F_1 = G\cdot\frac{1\cdot 2}{r_1^2} \quad ; F_2 = G\cdot\frac{3\cdot 2}{r_2^2}$$

$$F_1 = k\cdot\frac{1}{r_1^2}$$

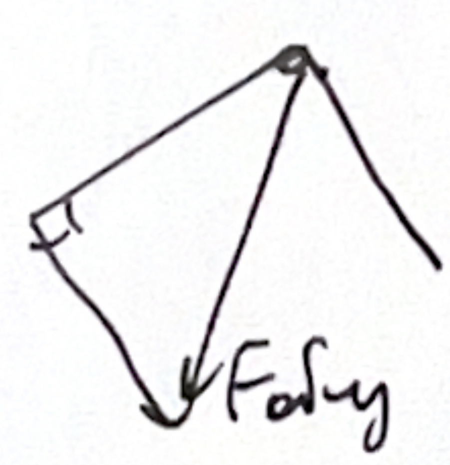
$$F_2 = 3k\cdot\frac{1}{r_2^2}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = l^2$$

$$F_{общ} = \sqrt{\frac{k^2}{r_1^4} + \frac{9k^2}{r_2^4}} =$$

$$= k\sqrt{\frac{1}{r_1^4} + \frac{9}{r_2^4}}$$

$$\left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{9}{(l^2-r_1^2)^2}\right)'$$



$$-\frac{4}{r_1^5} - \frac{2\cdot 9\cdot(-2r_1)}{(l^2-r_1^2)^3} = 0$$

$$(l^2-r_1^2)^3 - 9r_1^6 = 0$$

$$r_2^6 - 9r_1^6 = 0$$

$$\frac{1}{r_1^4} + \frac{9}{r_2^4} \leq \frac{3}{r_1^2 r_2^2}$$

$$\frac{1}{r_1^4} + \frac{6}{r_1^2 r_2^2} + \frac{9}{r_2^4} =$$

$$= \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{3}{r_2^2}\right)^2$$

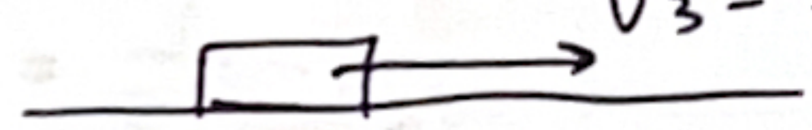
$$r_1^4 = \frac{r_2^4}{9}$$

$$r_1^2 = \frac{r_2^2}{3}$$

51-61-12-48
(20.1)

Чистовик

№1. (+)



$V_3=\sqrt{V_1^2+V_2^2}$

Замедление шайбы происходит вследствие действия силы трения =>
по З-ну сохранения энергии, если в 1-ый раз скорость $= V_1$; во 2-ой V_2:

$$\frac{mV_1^2}{2}=F_{тр}l_1$$

$$\frac{mV_2^2}{2}=F_{тр}l_2$$

если в 3-ий раз скорость $= V_3$, то $V_3^2=V_1^2+V_2^2$ по т. Пифагора

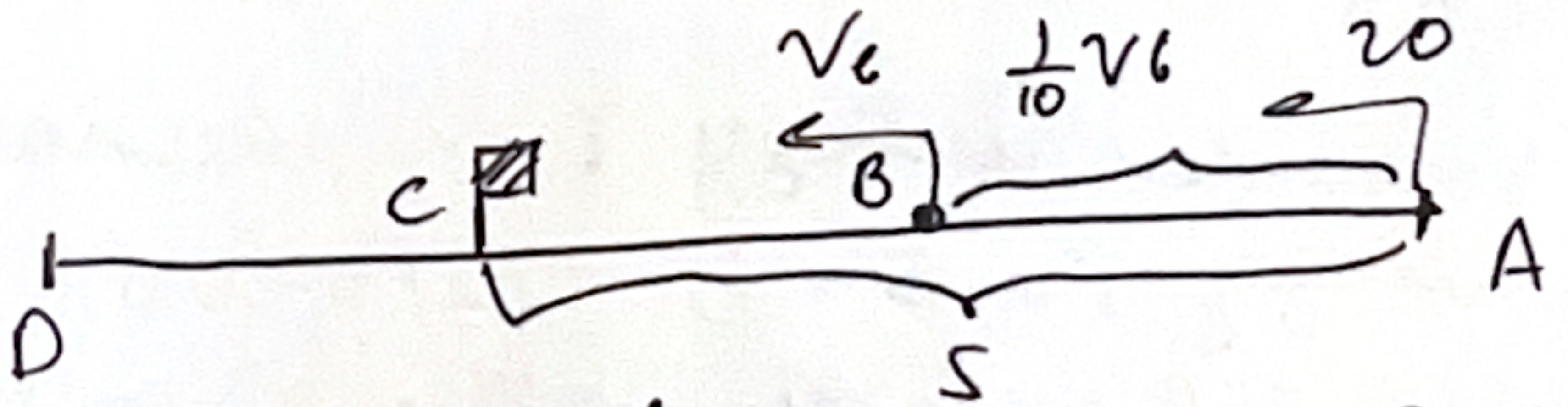
⇓

$$\frac{mV_3^2}{2}=\frac{mV_1^2+mV_2^2}{2}=F_{тр}l_3 \Rightarrow l_3=l_1+l_2= 12+5=17\text{ м}$$

Ответ: 17м.

№3. (+)

Обозначим искомое расстояние за S.; скорость Гаврилы за $V_г$



Пусть дом – это точка A; школа – точка D; местоположение Гаврилы в момент через 6 минут после начала движения – B; $AC = S$.

$AB = V_г \cdot 6\text{ минут} = \frac{1}{10}V_г$, т.к. Гаврила и отец встретились в (.) C:

$$\frac{S-\frac{1}{10}V_г}{V_г}=\frac{S}{20}$$

т.к. отец вернулся в тот же момент, когда Гав. попал в школу

$$\frac{2S}{20}=\frac{3}{V_г}-\frac{1}{10}$$

Чистовик

№3 (продолжение)

$\cancel{\frac{S}{v_b} - \frac{1}{10} =}$

$$\begin{cases} \frac{S}{v_b} - \frac{1}{10} = \frac{S}{20} & \Big| \cdot 20v_b \\ \frac{3}{v_b} - \frac{1}{10} = \frac{2S}{20} & \Big| \cdot 20v_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20S - 2v_b = Sv_b \\ 60 - 2v_b = 2Sv_b \end{cases}$$

$$30 - v_b = Sv_b$$

$$30 - 20S + v_b = 0$$

$$v_b = 20S - 30$$

$$30 - 20S + 30 = 20S^2 - 30S$$

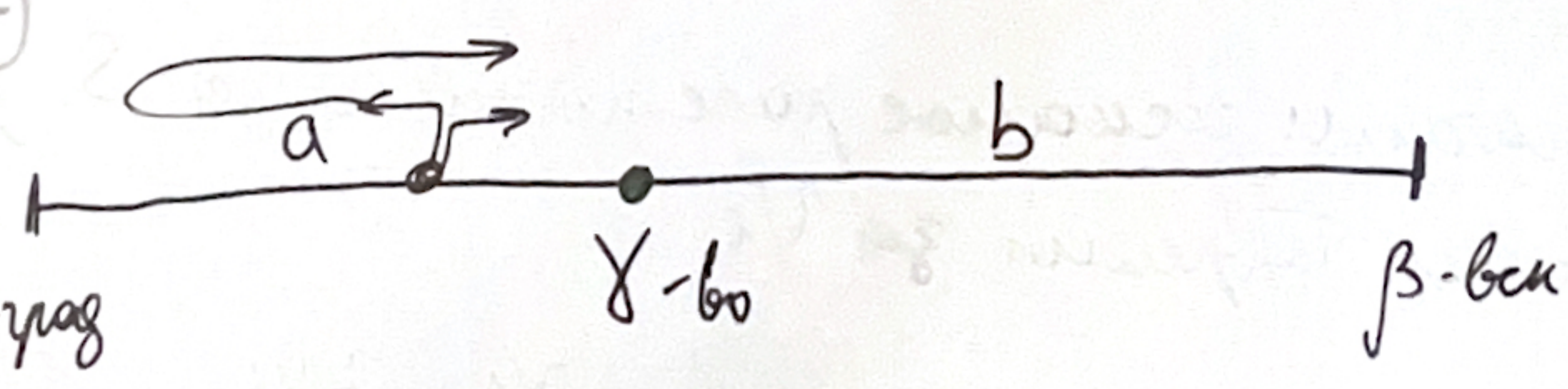
$$2S^2 - S - 6 = 0$$

$$D = 1 + 48 = 49$$

$$S = \frac{1 \pm 7}{4} \Rightarrow \underline{S = 2\text{ км}}$$

Ответ: 2км.

№4. +



Допустим между γ и α расстояние = a; между γ и β — b. (a+b=100)

~~Когда Гаврила~~ В момент когда Гаврила подходит к станции, поезд может оказаться либо на участке α-γ либо на γ-β. При этом в какую бы сторону он не ехал, он ~~поезд~~ повезет Гаврилу в β в первом случае и в α во втором.

$\Rightarrow$ ~~Вр~~ вероятность попасть в β ~~он пропорцио~~ пропорциональна длине αγ = a

51-61-12-48
(20.1)

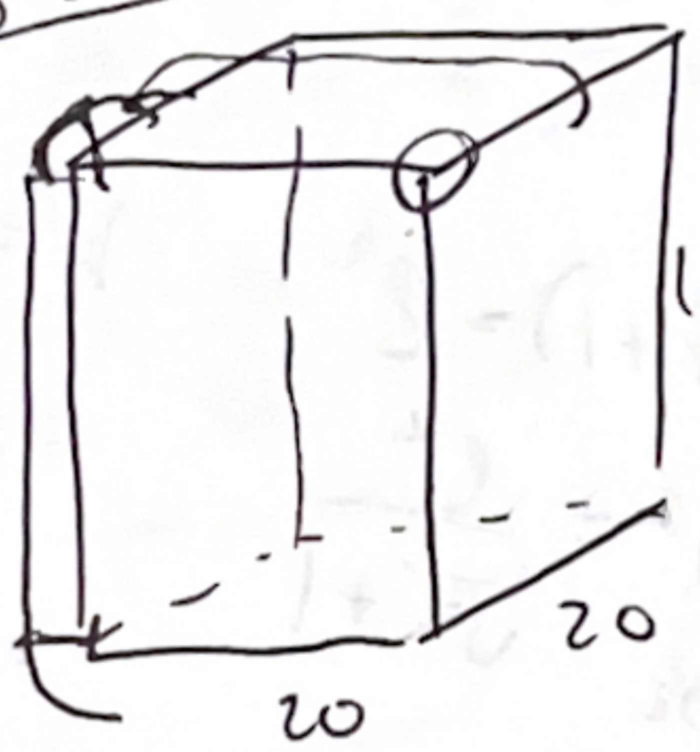
Черновик.

$58 \times 44 = 232 + 232\,0 = 2552$

8352

$4^2 - \frac{1}{4}\pi 4^2 =$

$= 4(4-\pi)$



10

20

20

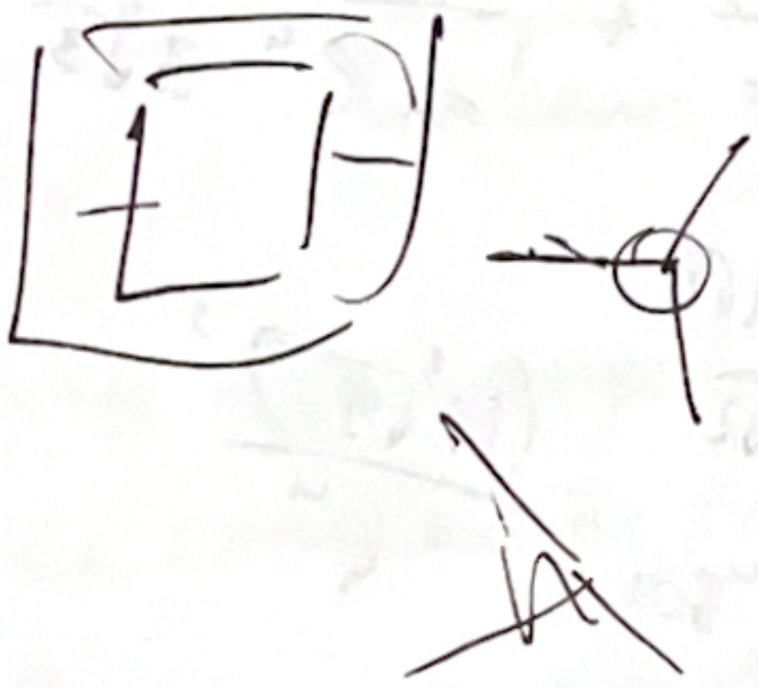
$49 - 25 = 24$

~~186~~

$(28^2 - 20^2) \cdot 10 - 4 \cdot 10 \cdot 4(4-\pi) =$

$= 160(24) - 160(4-\pi) =$

$= 160(20+\pi)$



$\times \begin{array}{r}144 \\ 58\end{array}$

4

$2(28^2 \cdot 4) - 8 \cdot 20 \cdot 4(4-\pi) =$

$=$

$144 \cdot 4 = 42.$

~~$520 + 16 = 536$~~

$560 + 16 = 576\,00$

$\frac{4}{3}\pi 4^3 = \frac{4^4}{3} \cdot \pi$

$4^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{4^4}{3} \cdot \pi = 4^3\left(1 - \frac{1}{6}\pi\right) =$

$= 64\left(1 - \frac{1}{6}\pi\right)$

$-\frac{5}{9} \cdot 3 = \quad P = -\frac{5}{9}V\ldots$

88

$-\frac{5}{9}\Delta V = 3P_0$

$\Delta V = \frac{9}{5} 3P_0$

$\begin{array}{r} \times\ 582{,}12 \\ 144 \\ \hline 232848 \\ 232848 \\ 58212 \\ \hline 83825{,}28 \end{array}$

Черновик

$2860 : 73 = 39$; 219; 670; 657; 13

$2800 + 120 - 73 = 2847$

$a = \frac{26}{3}$

$b^6 = 9a^6$

$\frac{13}{9} b^2 = l^2$

$b = a \cdot \sqrt[3]{3}$

$b = \frac{3}{\sqrt{13}} l$

$a = \frac{2}{\sqrt{13}} l$

$a^2(\sqrt[3]{9} + 1) = l^2$

$b^2 = a^2 \cdot \sqrt[3]{9}$

$a = \frac{1}{2} l$

$b = \frac{\sqrt{3}}{2} l$

$a^2 = \frac{l^2}{\sqrt[3]{9} + 1}$

$\frac{13^2}{16 l^4} + \frac{13^2}{9 l^4} =$

$\frac{25}{144} \cdot 169 \vee 32$

$\frac{(\sqrt[3]{9} + 1)^2}{l^4} + \frac{9(\sqrt[3]{9} + 1)^2}{l^4 \cdot 3\sqrt[3]{3}} =$

$\frac{16}{l^4} + \frac{16}{l^4} = \frac{32}{l^4}$

$\frac{5}{12} \cdot 13 \vee 4\sqrt{2}$

$65 \vee 48\sqrt{2}$

$4225 \vee 4608$

$= \frac{(1 + \sqrt[3]{9})^3}{l^4}$

32

48×48

$g =$

$(2 \cdot \sqrt[3]{9})^3$

$1 + 3\sqrt[3]{9} + 9\sqrt[3]{3} + 9 \vee 32$

$3\sqrt[3]{9} + 9\sqrt[3]{3} \vee 22$

$\frac{b^2}{\sqrt[3]{9}} + b^2 = l$

$b = \frac{l\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9} + 1}$

~~$27 \cdot 9 + 3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \sqrt[3]{9}$~~

$B = C - A$

$\frac{1}{A^2} + \frac{9}{B^2}$

48×48: 384, 192, 2304

4608

$\left(\frac{1}{A^2} + \frac{9}{(C-A)^2}\right)' = -\frac{2}{A^3} + \frac{9 \cdot 2}{(C-A)^3} = 0$

$9A^3 - B^3 = 0$

A

$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$

$ab \leq \frac{l^2}{2}$

$3{,}14 \times 58$: 2512, 1570, 18212

182,12

$\frac{1}{a^4} + \frac{9}{b^4} \geq \frac{6}{a^2 b^2} \geq \frac{12}{l^4}$

Чистовик.

№4 (продолжение)

аналогично вероятность попасть в α пропорциональна b. Если N_α и N_β число поездок в α и в β соот., то

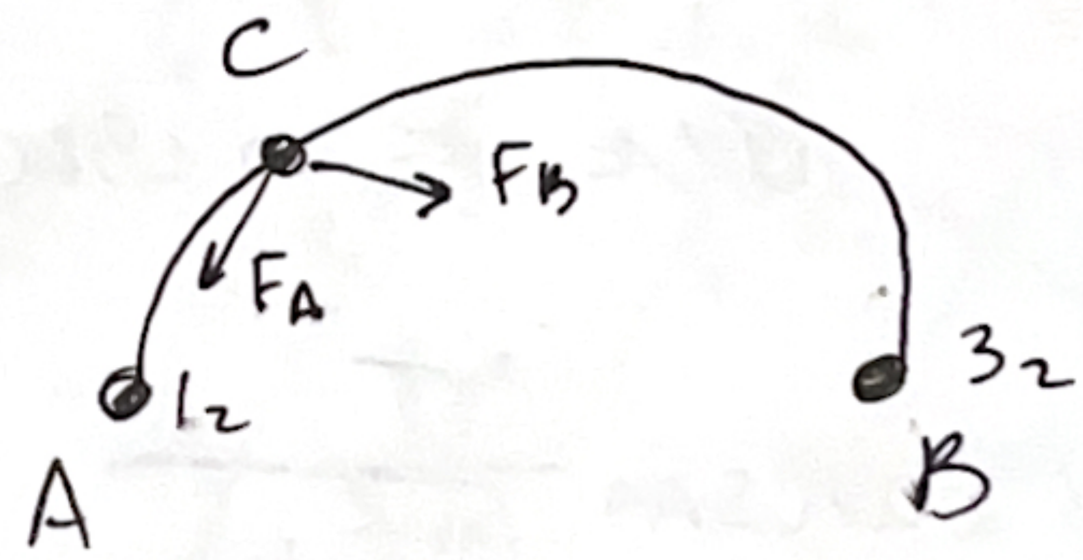
$$\frac{N_\alpha}{N_\beta} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{N_b}{N_a+N_b}$$

$$a = 100 \cdot \frac{143}{365} = \frac{20\cdot 143}{73} = \frac{2860}{73} \text{ км}$$

$$a = 39\frac{13}{73} \text{ км}$$

Ответ: $39\frac{13}{73}$ км.

№6. Силы взаимодействия для точек — гравитационные если со стороны (.) A действует F_A, а со стороны (.) B — F_B, то общая сила $F_{общ} = \sqrt{F_A^2+F_B^2}$



Пусть $AB = l$; $AC = a$; $BC = b$. По т. Пифагора

$a^2+b^2 = l^2 = const$.

$$F_A = G\cdot\frac{1г\cdot 2г}{a^2} \quad F_B = G\cdot\frac{3г\cdot 2г}{b^2} \Rightarrow$$

$$F_A = k\cdot\frac{1}{a^2};\ F_B = k\cdot\frac{3}{b^2};\ k = G\cdot 1г\cdot 2г$$

$$\sqrt{\left(k\cdot\frac{1}{a^2}\right)^2+\left(k\cdot\frac{3}{b^2}\right)^2} \to \min \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{9}{b^4}} \to \min \Rightarrow$$

$$f(a) = \frac{1}{a^4}+\frac{9}{(l^2-a^2)^2} \to \min \quad f'(a) = -\frac{4}{a^5} - \frac{2\cdot 9\cdot(-2a)}{(l^2-a^2)^3} = 0$$

$$36a^6 - 4b^6 = 0 \quad a^* = \frac{b}{\sqrt[3]{3}}$$

$f'(a)$: $-$ a^* $+$ → a

Чистовик.

~~Отдать~~ Пусть $a = \frac{1}{2}\ell$; $b = \frac{\sqrt{3}}{\ell}$, тогда

$f(\frac{1}{2}\ell) = \frac{16}{\ell^4} + \frac{16}{\ell^4} = \frac{32}{\ell^4}$

Пусть $a = \frac{2}{\sqrt{13}}\ell$; $b = \frac{3}{\sqrt{13}}\ell$, тогда

$f(\frac{2}{\sqrt{13}}\ell) = \frac{169}{16\ell^4} + \frac{9 \cdot 169}{81\ell^4} = 169 \cdot (\frac{1}{16} + \frac{1}{9}) \frac{1}{\ell^4} =$

$= \frac{169 \cdot 25}{144} \cdot \frac{1}{\ell^4}$

$f(\frac{1}{2}\ell) \vee f(\frac{2}{\sqrt{13}}\ell)$

$32 \vee \frac{169 \cdot 25}{144}$

$4608 \vee 4225$

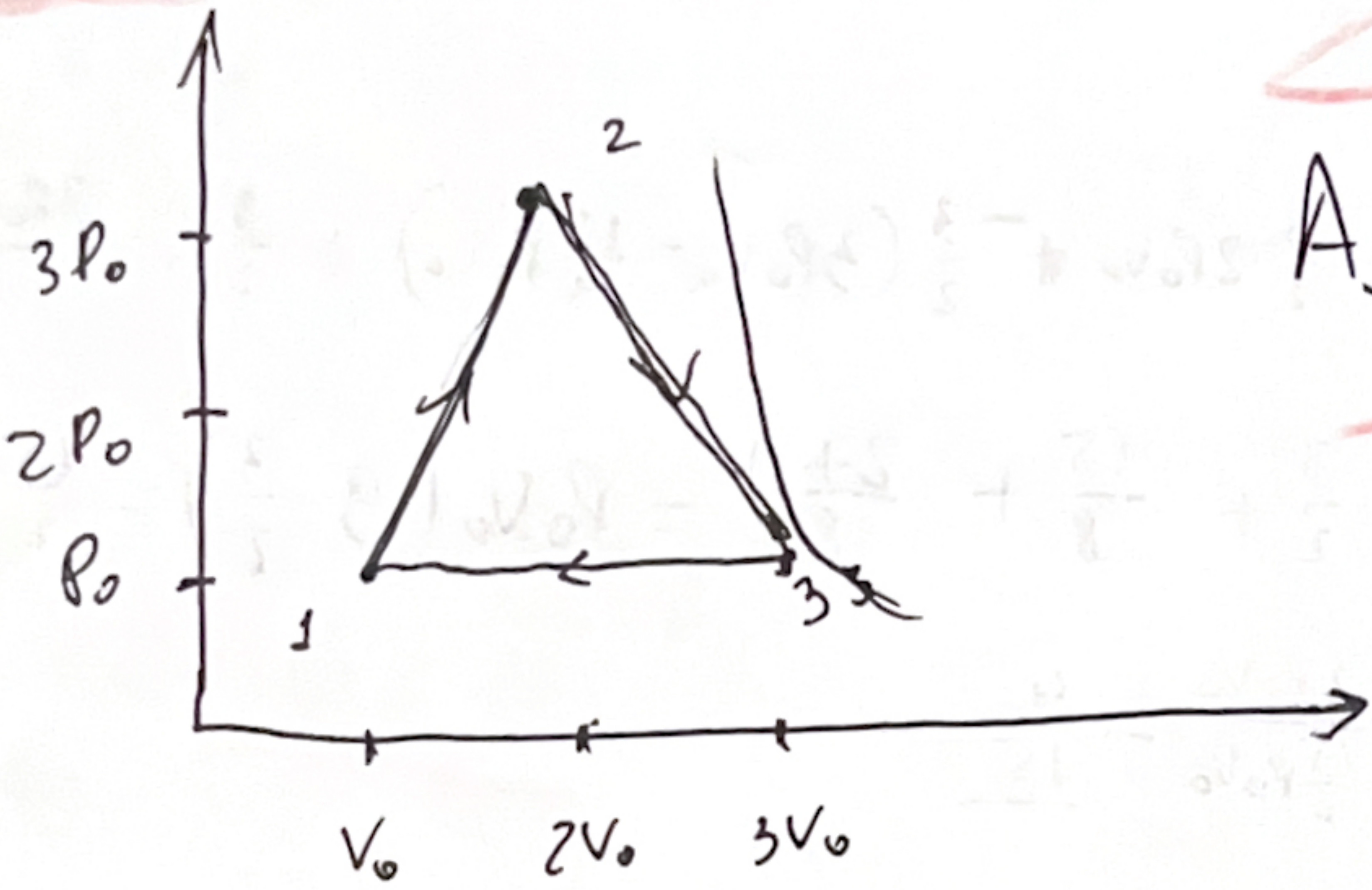
$>$ $\Rightarrow a = \frac{1}{2}\ell$ - не минимум.

$a = \frac{b}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow a = \ell \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{9}+1}} \Rightarrow b = \ell \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{\sqrt[3]{9}+1}}$

~~Ответ~~ $\breve{BC} = 2\angle BAC = 2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{\sqrt[3]{9}+1}}$

Ответ: $2\arcsin \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{\sqrt[3]{9}+1}}$

Чистовик.



$A_{цикла} = \frac{1}{2} 2V_0 \cdot 2P_0 = 2P_0V_0$

$PV^{\frac{5}{3}}$ – const – уравнение адиабаты

~~в (.) 3: адиабата через (.) 3:~~

$$PV^{\frac{5}{3}} = P_0 \cdot V_0^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}}$$

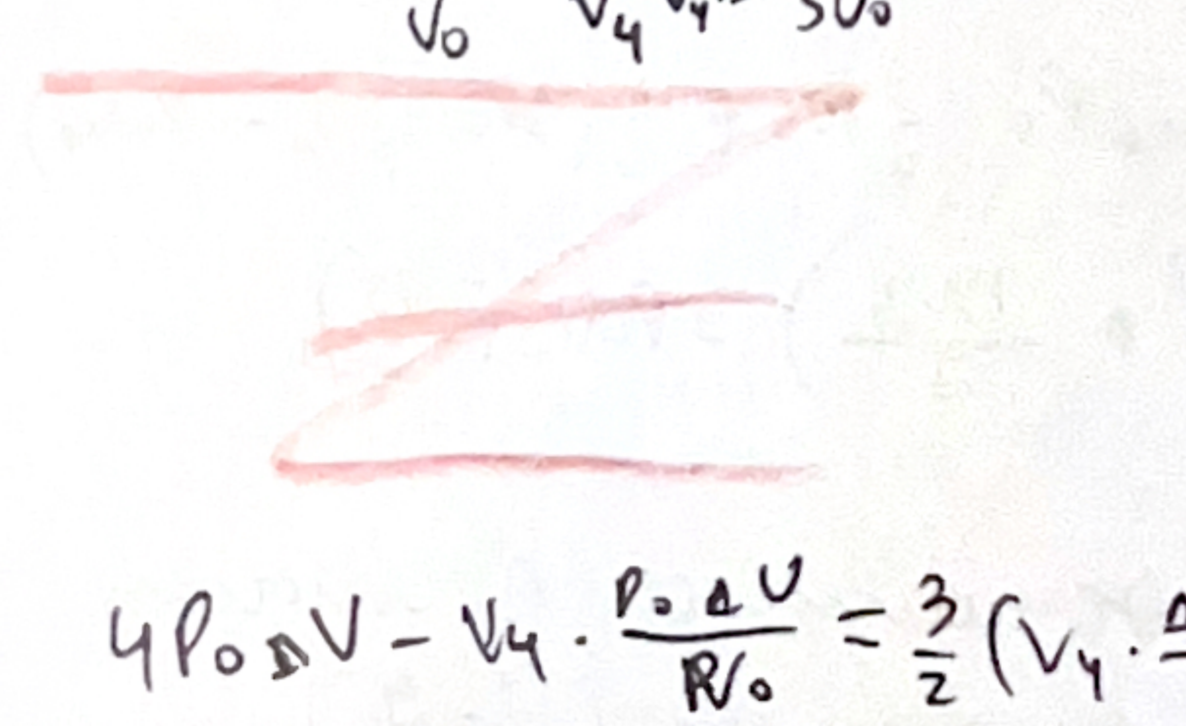
$$P = V^{-\frac{5}{3}} \cdot P_0 \cdot V_0^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}}$$

$$P'(V) = V^{-\frac{8}{3}} \cdot -\frac{5}{3} P_0 \cdot V_0^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}}$$

$$P'(3V_0) = (3V_0)^{-\frac{8}{3}} \cdot -\frac{5}{3} \cdot P_0 \cdot V_0^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}P_0}{3V_0} \Rightarrow \text{наклон } -\frac{5}{9}$$

~~max максимальный по модулю наклон при котором в процессе 2–3 газ получает тепло.~~

∃ 2: $(V_0; 3P_0)$. Тогда 2 → 3:



$$P = 4P_0 - V \cdot \frac{P_0}{V_0}$$

в (.) 4:

$$P_4 = 4P_0 - V_4 \cdot \frac{P_0}{V_0}$$

при небольшом сдвиге на ΔV $Q = 0 \Rightarrow$

$$A_г = -\Delta U$$

$$P_4 \Delta V = \frac{3}{2}\left(P_4V_4 - (P_4 - \Delta P)(V_4 + \Delta V)\right)$$

$$4P_0\Delta V - V_4 \cdot \frac{P_0 \Delta V}{V_0} = \frac{3}{2}\left(V_4 \Delta P - P_4 \Delta V\right)$$

$$4P_0\Delta V - V_4 \cdot \frac{P_0 \Delta V}{V_0} = \frac{3}{2}\left(V_4 \cdot \frac{\Delta V \cdot P_0}{V_0} - 4P_0\Delta V + V_4\frac{\Delta V P_0}{V_0}\right)$$

$$4V_0 - V_4 = \frac{3}{2}(V_4 - 4V_0 + V_4) \qquad 10V_0 = 4V_4 \qquad V_4 = 2{,}5V_0$$

Чистовик

(·)4: $(\frac{5}{2}V_0; \frac{3}{2}p_0)$

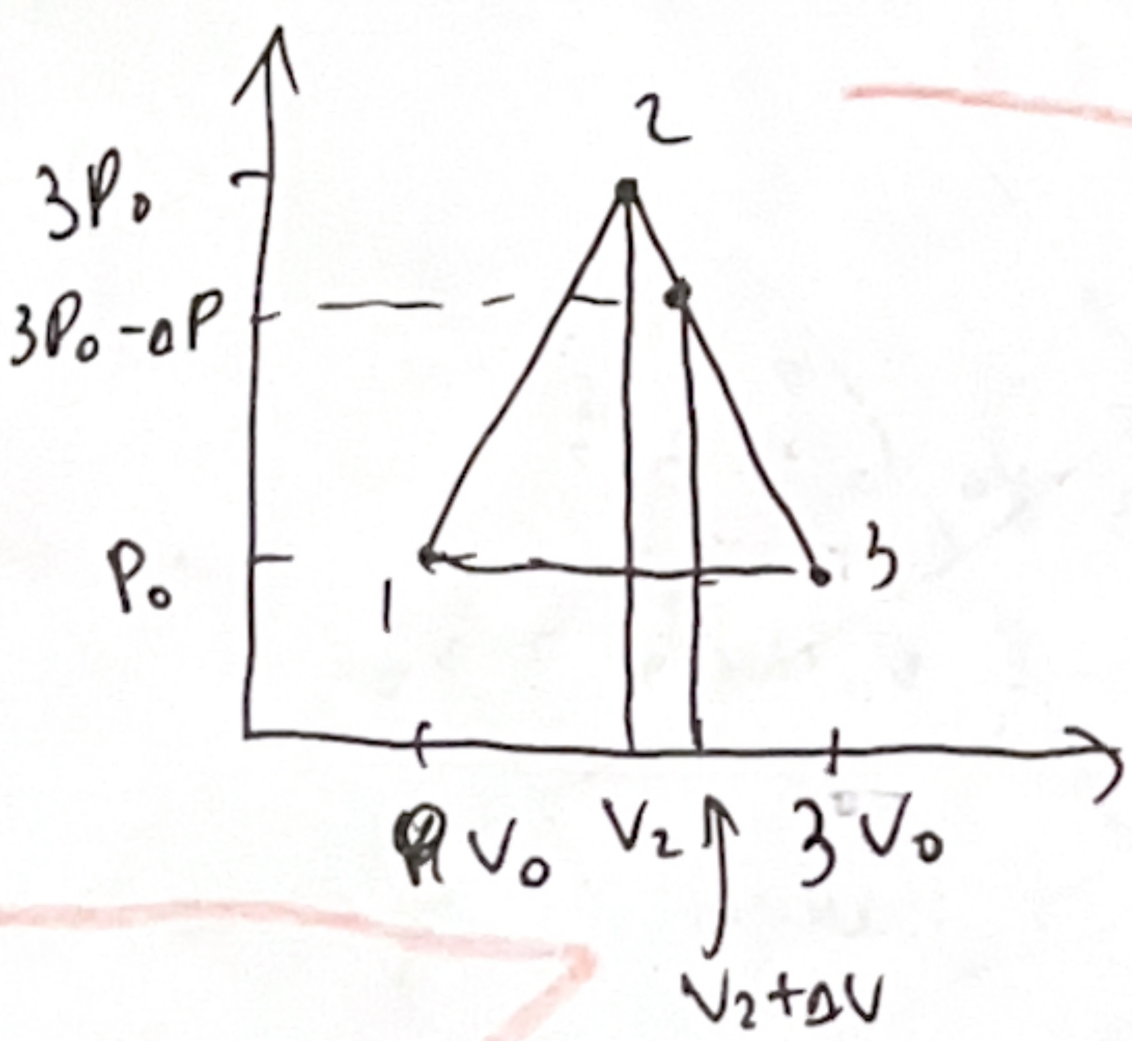
$\cancel{\eta = \frac{A}{Q_+}} =$

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{24} = \frac{3}{2}\cdot 2p_0V_0 - \frac{3}{2}\left(3p_0V_0 - \frac{15}{4}p_0V_0\right) + \frac{3}{2}V_0\cdot\frac{3p_0+\frac{3}{2}p_0}{2} =$$

$$= p_0V_0\left(-\frac{3}{2} + \frac{45}{8} + \frac{27}{8}\right) = p_0V_0\left(9 - \frac{3}{2}\right) = \frac{15}{2}p_0V_0$$

$$\eta_{max} = \frac{A}{Q_+} = \frac{2p_0V_0}{\frac{15}{2}p_0V_0} = \frac{4}{15}$$

(·)2: $Q_2 = 0$, т.е. в (·)2 газ бы проходил бесконечно адиабат. процесс.



2-3: $p = kV + b$

$$3p_0 = kV_2 + b$$

$$p_0 = k3V_0 + b$$

$$k = -\frac{2p_0}{3V_0 - V_2}$$

$$b = p_0 + \frac{6p_0V_0}{3V_0 - V_2} = \frac{9p_0V_0 - p_0V_2}{3V_0 - V_2}$$

$$A = -\Delta U$$

$$\Delta V\cdot 3p_0 = \frac{3}{2}\left(3p_0V_2 - (3p_0 - \Delta p)(V_2 + \Delta V)\right)$$

$$p_0\Delta V = \frac{1}{2}\left(\Delta p\cdot V_2 - 3p_0\cdot\Delta V\right)$$

$$2p_0\Delta V = V_2\cdot\frac{\Delta V\cdot 2p_0}{3V_0 - V_2} - 3p_0\cdot\Delta V$$

$$2 = \frac{2V_2}{3V_0 - V_2} - 3 \qquad 2V_2 = 15V_0 - 5V_2$$

$$V_2 = \frac{15}{7}V_0$$

$$Q_+ = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = 2p_0\cdot\frac{8}{7}V_0 + \frac{3}{2}\left(3p_0\cdot\frac{15}{7}V_0 - p_0V_0\right) =$$

$$= p_0V_0\left(\frac{16}{7} + \frac{19\cdot 3}{7}\right) = p_0V_0\left(\frac{73}{7}\right)$$

$$\eta_{min} = \frac{A}{Q_+} = \frac{2p_0V_0}{p_0V_0\cdot\frac{73}{7}} = \frac{14}{73}$$

; остальные η лежат в пределах от $[\frac{14}{73}; \frac{4}{15}]$

Ответ: $\eta \in [\frac{14}{73}; \frac{4}{15}]$.

+/2 ответ верен (но $\frac{14}{73}$ не надо включать), но рассмотрены не все случаи

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!