0 313983 560004

31-39-83-56
(15.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Космонавтике
профиль олимпиады

Прохорова Павла Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«17» февраля 2024 года

Подпись участника

Прох

31-39-83-56 (15.1)

95 (ДЕВЯНОСТО ПЯТЬ) (Савук)

Садовед (Садовничая)

Чистовик

1 $X = 10000a + 2024$ $\quad a \in [1000, 9999]$. $\Updownarrow$ $X - \min$, $a - \min$

X – восьмизначный, оканчивается на 2024

~~X mod 17 ≡~~

$X \vdots 17$

$\text{mod } 17: \quad X \equiv 10000a + 2024 \equiv 4a + 1 \equiv 0 \pmod{17}$

$4 \cdot 4 + 1 = 17$

$a \equiv (-1) \cdot 4^{-1} \pmod{17}$

$4 \cdot 13 = 52 \equiv 1 \pmod{17}$

$\underline{a \equiv -13 \equiv 4 \pmod{17}}$

$4^{-1} \equiv 13 \pmod{17}$

$1000 \equiv 14 \pmod{17}$

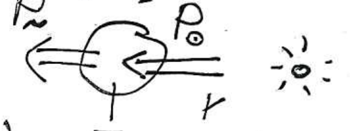
$\Downarrow$ Наименьшее число в интервале $[1000, 9999]$, дающее $\underset{17}{\equiv} 4$, это 1007. $(\underset{\vdots 17}{1000 + 3} + 4)$

$a_{min} = 1007$.

$X = 10072024 = 17 \cdot 592472$.

Ответ верн.

3 Диаметр Солнца $\approx \frac{1}{111}$ а.е.; $\quad \frac{0{,}39 \text{ а.е.}}{\frac{1}{111} \text{ а.е.}} = 43{,}3$ – достаточно большое, чтобы пренебречь тригонометрией. Поэтому: Интенсивность ~~изл.~~ (мощность/площадь) излучения Солнца обратно пропорциональна квадрату расстояния до него. ~~Тогда~~ Считаем, что спутник излучает как абсолютно чёрное тело, то есть его мощность тепловых потерь излучением пропорциональна четвёртой степени температуры.



$P_{\sim} \overset{=}{\leftrightarrow} P_{\odot}$ равновесие

$P_{\odot} \sim r^{-2}$

$P_{\sim} \sim T^4$

~~k≈~~ $P_{\odot} = k_1 r^{-2}$

$\underline{P_{\sim} = k_2 T^4}$

1) марс:

$r_1 = r_{марс}$:

$P_{\sim m1} = P_{\odot m1}$

$k_1 r_{m1}^{-2} = k_2 T_{m1}^4$

$\frac{k_1}{k_2} = \frac{T_1^4}{r_1^{-2}}$

2) меркурий

$r_2 = r_{мерк}$

$k_1 r_2^{-2} = k_2 T_2^4$

$T_1 = 243{,}15\,K$

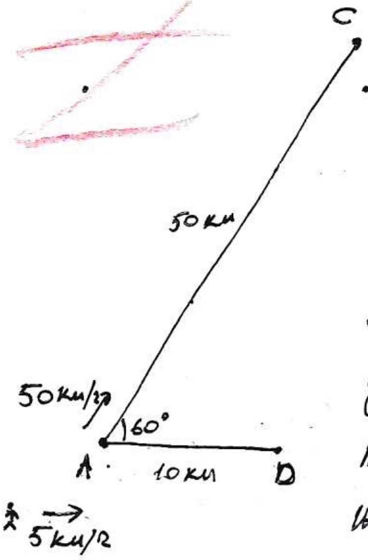
$r_1 = 1{,}52$ а.е.

$r_2 = 0{,}39$ а.е.

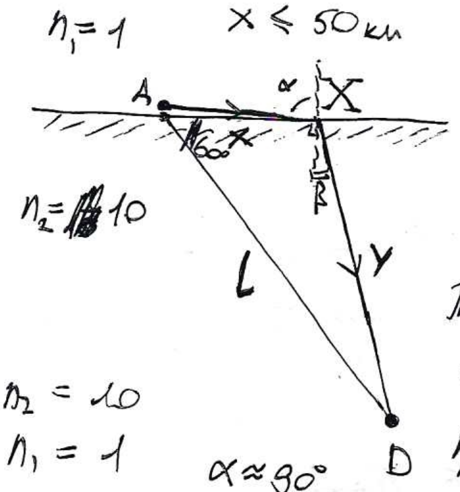
$T_2 = \sqrt[4]{\frac{k_1}{k_2} r_2^{-2}} = T_1 \sqrt[4]{\frac{r_1^2}{r_2^2}} = T_1 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = 480{,}0\,K = 206{,}9\,°C$

Ответ: $207\,°C$. Ответ верный

2 Алексей сначала некоторое расстояние x (возможно, 0) едет на машине, а потом идёт в сторону D (прямолинейно, не останавливаясь:).



Он пытается попасть из A в D за кратчайшее время. Тогда задачу можно представить в виде ~~оптического~~ движения света в оптической среде, так как свет всегда идёт быстрейшим ~~кратчайшим~~ путём (~~какая~~ Закон Френеля, если не путаю название)



Вне дороги Алексей движется в 10 раз медленнее, это можно представить в виде среды с показателем преломления $n_2 = 10$. Тогда, если AXD – кратчайший (по t) маршрут, то выполняется закон преломления (З. Снеллиуса):

$n_2 = 10$

$n_1 = 1$

$\sin\alpha \approx 1$ $\quad \alpha \approx 90°$

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$
$$1 = 10 \sin\beta$$
$$\sin\beta = 0{,}1 \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - 0{,}1^2} = \sqrt{0{,}99}$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}99}} = \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Т. Синусов $\triangle AXD$:

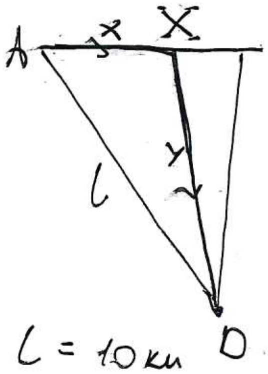
$$\frac{AD}{\underset{\angle AXD}{\sin(90°+\beta)}} = \frac{AX}{\underset{\angle ADX}{\sin(30°-\beta)}} = \frac{XD}{\sin 60°}$$

$$x = \frac{\sin(30°-\beta)}{\underset{\cos\beta}{\sin(90°+\beta)}} L = \frac{\frac{1}{2}\cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta}{\cos\beta} L = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\beta\right) L =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{33}}\right) L \approx 0{,}413 L = 4{,}13 \text{ км} \quad \left(\text{точное знач: } 4{,}1296 \text{ км}\right)$$

верно. верный ответ

31-39-83-56 (15.1)



$l = 10$ км

$$y = \frac{\sin 60^\circ}{\underbrace{\sin(90^\circ+\beta)}_{\cos\beta}}\, l = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{0{,}99}}\, l = \frac{5}{\sqrt{33}}\, l \approx 0{,}870\, l$$

$$t = \frac{\overset{x}{AX}}{v_{авто}} + \frac{\overset{y}{XD}}{v_{пеший}} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{33}}\right)\cdot 10 км}{50 км/ч} + \frac{\frac{5}{\sqrt{33}}\cdot 10 км}{5 км/ч} =$$

$$= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10\sqrt{33}} + \frac{10}{\sqrt{33}}\right) ч = 1{,}8234\ ч = 1 ч\ 49{,}4\ мин$$

⊛

Ответ: успеет, если проедет 1,13 км на машине, а далее пойдёт к электричке, успеет за 1ч 49,4 мин.

ещё 36 секунд в запасе есть!

$$\cancel{t = \frac{AX}{v_{авто}} + \frac{XD}{v_{пеший}} = \frac{x}{50} + \frac{y}{5} = 1{,}8234\ ч =}$$

0,0826 1,7408

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{10\sqrt{33}} + \frac{10}{\sqrt{33}} = \frac{1}{10} + \frac{99}{10\sqrt{33}} = 0{,}1 + 0{,}3\sqrt{33}$$ ⊛

верн ответ

4 | py 3.12   можно и python 3.10 .

```
def kaperkar(x):
    return int
    digits = list(str(x))
    digits.sort(reverse=True)   # вначале большие
    x_max = int(''.join(di
```

```
def kaperkar(x):
    digits
    x_str = f'{x:0>4}'  # добавление нулей в начало если
                        # x<1000, т.е. 13 -> '0013'.
    digits = list(map(int, x_str))  # массив цифр, включая
                                    # начальные нули, если есть
    digits.sort()   # теперь отсортированы по возрастанию
    y_str = ''.join(map(str, digits))   # строка наподобие '0577'
    return int(y_str[::-1]) - int(y_str)

if __name__ == '__main__':
    print(len(set(map(kaperkar, range(1000, 10000)))))
```

Черновик с комментариями

Чистовик

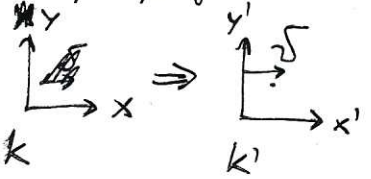
```
def kaperkar(x):
    x_str = f'{x:0>4}'
    digits = list(map(int, x_str))
    digits.sort()
    y_str = ''.join(map(str, digits))
    return int(y_str[::-1]) - int(y_str)

                                   # опционально :)
                                   from typing import Iterable
def kapercount(numbers: Iterable[int]):
    return len(set(map(kaperkar, numbers)))

if __name__ == '__main__':
    print(kapercount(range(1000, 10000)))
```

$\boxed{6}$ Релятивистские преобразования: $\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

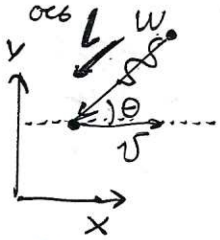
Преобразования Максвелла.



$$x' = (x - vt)\gamma$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \left(t - \frac{xv}{c^2}\right)\gamma$$

$\boxed{\text{Черновик}}$

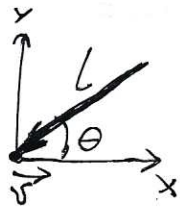
Если в С.О. k ~~приходит волна~~ регистрируется свет частотой ω, приходящий под углом θ, то как он ~~она~~ будет выглядеть в k': (эффект Доплера).



~~$\omega(x) =$~~

$$u(l) = u_0 \sin(\omega t - kl + \varphi_0)$$

$$k\lambda = 2\pi$$
$$c\frac{2\pi}{\omega} = \lambda$$
$$\omega = kc$$



Проекция оси x на l:

$$\Delta l = -\Delta x \cos\theta$$

$$u(x) = u_0 \sin(\omega t + kx\cos\theta + \varphi_1)$$

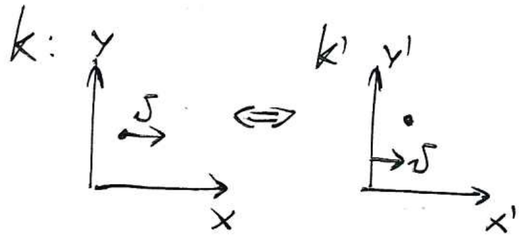
Переходим в k':

$$x' = (x - vt)\gamma \rightarrow x = \frac{x'}{\gamma} + vt$$
$$t' = \left(t - \frac{xv}{c^2}\right)\gamma \rightarrow t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{xv}{c^2}$$

$$u(x') = u_0 \sin\left(\omega\left(\frac{t'}{\gamma} + \frac{xv}{c^2}\right) + k\cos\theta.\right.$$

6 | Рассмотрим две системы отсчёта: покоящийся k отн. Земли ($v_0 \ll c$) и корабль ($v = \frac{c}{2}$) – k'. $\boxed{\text{чистовик}}$

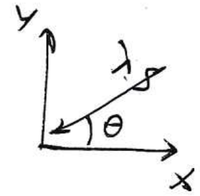
Преобразования Максвелла между ними: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$



$k' \Longleftrightarrow k$

$$x' = (x - vt)\gamma \qquad x = (x' + vt')\gamma$$
$$y' = y \qquad y = y'$$
$$t' = \left(t - \frac{xv}{c^2}\right)\gamma \qquad t = \left(t + \frac{x'v}{c^2}\right)\gamma$$

Пусть свет от звезды имеет длину волны λ и приходит со стороны угла θ отн. оси X.



$$u(x,y,t) = u_0 \sin(\omega t + \underbrace{kx\cos\theta + ky\sin\theta}_{-kl,\ l\text{ – проекция }(x,y)\text{ на ось света }\theta} + \varphi_0)$$

$$kc = \omega, \quad \lambda = c\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$$

Тогда в k':

$$u(x',y',t') = u_0 \sin\left(\omega\left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right)\gamma + k(x'+vt')\gamma\cos\theta + ky'\sin\theta + \varphi_0\right) =$$
$$= u_0 \sin\left((\omega\gamma + kv\gamma\cos\theta)t' + \left(\frac{\omega v}{c^2}\gamma + k\gamma\cos\theta\right)x' + ky'\sin\theta + \varphi_0\right) =$$
$$= u_0 \sin(\omega' t + k'x'\cos\theta' + k'y'\sin\theta' + \varphi_0).$$

$$k'c = \omega', \quad \lambda' = c\frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{k'}$$

$$\omega' = \omega\gamma + kv\gamma\cos\theta = \omega\gamma + \omega\frac{v}{c}\cos\theta\cdot\gamma = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right)\gamma$$

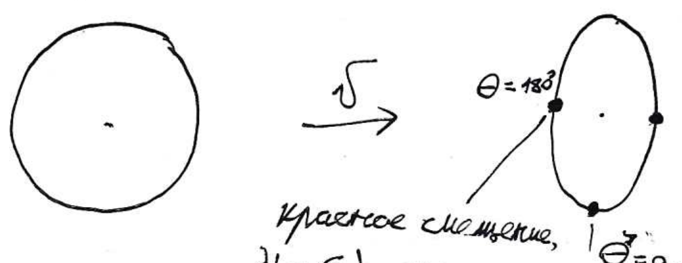
$$\lambda' = \frac{2\pi}{\omega'} = \lambda\frac{1/\gamma}{1+\frac{v}{c}\cos\theta} = \lambda\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}\cos\theta}$$ – релятивистский эффект Доплера.

Длина волны света в направлении θ изменяется в $\dfrac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}\cos\theta}$ раз, при $v = \frac{1}{2}c$ это: $\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{2}\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\cos\theta}$ раз, а видимое с корабля пространство сожмётся в $\frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ раз вдоль оси x'.

Верно

Чистовик

Звездное небо $k \Rightarrow k'$:



$\theta'=0$ $\lambda' = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda$

синее смещение, красные звёзды станут синими, 700 нм → 404 нм.

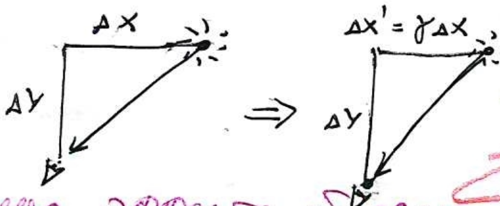
красное смещение, $\lambda' = \sqrt{3}\lambda$, синее станет красным 404 нм → 700 нм

$\theta'=90$ ~~красное~~ синее смещение, $\lambda' = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$, 700 нм → 606 нм

Наблюдаемые эффекты:

1) вселенную будто сплющит вдоль оси x' в $\frac{\sqrt{3}}{2}$ раз,

~~хотя, если ориентирова~~



Нет вывода формул эффекта аберрации (только ф-ли Лоренца)

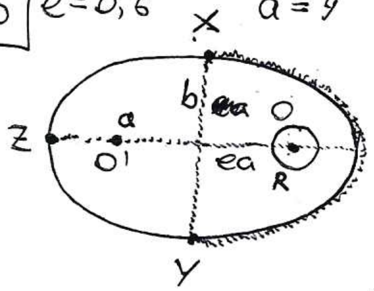
2) сильный Доплеровский эффект – ~~небо~~ небо перед кораблём покраснеет так, что синие звёзды станут красными, а красные вообще перестанут быть видны, этот эффект постепенно переходит в противоположный с противоположной стороны.

Также звёзды спереди станут ярче (в $\sqrt{3}$ раз?), а сзади - тусклее. (Если яркость считать по энергии фотонов - их энергия обратно пропорц. длине волны, т.е. яркость пропорциональна коэф-ту синего смещения).

За счёт сжатия пр-ва впереди эффект яркости усиливается.

Чистовик

5) $e = 0{,}6 \quad a = 4$



$OX + O'X = OZ + O'Z = 2a$

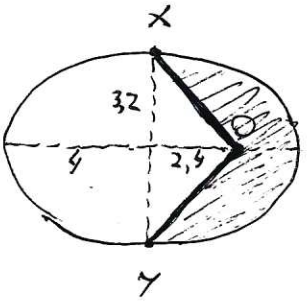
$OX = O'X = a = 4$ (коэфф-т R_3 везде опущен, $R_3 := 1$).

$b = \sqrt{1-e^2}\,a = 0{,}8a = 3{,}2$

На высоте 3 над поверхностью $\Leftrightarrow$ на расстоянии 4 от центра. верно

Спутник находится в нужной зоне доступа, когда он пролетает в выделенной половине эллипса. (когда расстояние до O меньше 4, $OX = 4$).

Согласно II-му закону Кеплера (II я не помню, но на всякий случай вывел этот закон на черновике ⊛). За одинаковые промежутки времени прямая объект—центр гравитации заметает одинаковую площадь, $\frac{dS}{dt} = const$. Тогда отношение времён = отношению площадей. $dS = k\,dt$
$\Delta S = k\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$.



Отношение $\frac{\Delta t}{T}$ времени на связи к времени одного оборота по орбите равно $\frac{\Delta S}{S}$, ΔS - площадь XOY, S - площадь всего эллипса.

$S = \pi ab = \pi \cdot 4 \cdot 3{,}2 =$

$\Delta S = \frac{1}{2}S - \underbrace{3{,}2 \cdot 2{,}4}_{S_{\Delta XOY}} =$

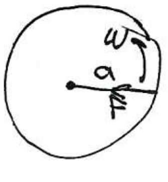
$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta S}{S} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3{,}2 \cdot 2{,}4}{\pi \cdot 4 \cdot 3{,}2}\right) = 0{,}3090174$

верный ответ

Ответ: 0,309 часть всего времени.

Вычислим t. Согласно ещё одному закону Кеплера (ну не помню я номер, слишком сложно запомнить 1, 2 и 3 в каком порядке использовать, извините). Период орбиты зависит только от большой полуоси, и у круговой орбиты радиуса a такой же период:

~~$\Delta S = k\Delta t$~~ ~~$S = kt$~~ ~~$\pi a b$~~



$$m(\omega^2 a) = G\frac{mM}{a^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \qquad v = \omega a = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

$\boxed{\text{Черновик}}$

Чтобы не вспоминать GM, вспомним $g = G\frac{M}{R_З^2} = 9{,}81$ м/с².

Наконец: $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{4^3\cdot R_З^3}{g\cdot R_З^2}} = 16\pi\sqrt{R_З/g} =$

$= 16\pi\sqrt{6{,}4\cdot 10^6\,\text{м}/9{,}81\,\text{м/с}^2} = 40600$ с $= 11$ ч 16 мин 40 с

почему так красиво?

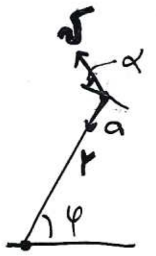
$\Delta t = 0{,}309014\tau = 12546$ с $\approx$ 3 ч 29 мин

Ответ: ~~3 ч 29 мин.~~

Стоп, по полученной формуле МКС делает оборот за 1,5 часа вместо 45 минут, где-то я ошибся. К тому же в условии не надо вычислять время. Значит, черновик.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик ⊛

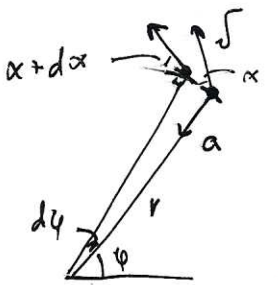


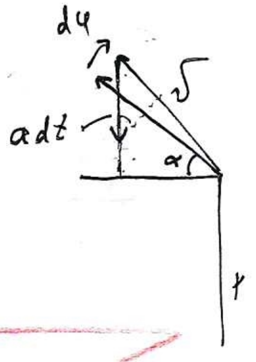
$a = G\frac{M}{r^2}$ $\qquad \dot v = -a\sin\alpha$

$\dot\varphi = \frac{v\cos\alpha}{r}$ $\qquad \dot\alpha = \dot\varphi - \frac{a}{v}\cos\alpha$

$\dot r = v\sin\alpha$

$\frac{v^2}{2} = G\frac{M}{r} + C \quad \Big| \frac{d}{dt}$





~~$v^2 = 2G\frac{M}{r} + C$~~

$v\dot v = -G\frac{M}{r^2}\dot r$

$\frac{\dot r}{\sin\alpha}\cdot \overset{G\frac{M}{r}}{a}\sin\alpha \overset{v}{=} G\frac{M}{r^2}\dot r$

$vr\cos\alpha = const$

$a = \frac{GM}{r^2}$

$\dot r = v\sin\alpha$

$\dot v = -a\sin\alpha$

$\dot\alpha = \frac{v}{r}\cos\alpha - \frac{a}{v}\cos\alpha = \left(\frac{\dot r}{r} - \frac{\dot v}{v}\right)\mathrm{ctg}\,\alpha$

II-й закон Кеплера

$\boxed{vr\cos\alpha \overset{?}{=} const} \quad \Big| \frac{d}{dt}$

$-(vr)\sin\alpha\cdot\dot\alpha + (v\dot r + r\dot v)\cos\alpha = 0$

$(v\dot r + r\dot v)\cos\alpha \overset{?}{=} vr\sin\alpha\cdot\left(\frac{v}{r}\cos\alpha - \frac{a}{v}\cos\alpha\right)$

$v\dot r + r\dot v \overset{\checkmark}{=} \sin\alpha\left(v^2 - ar\right)$

$v^2\sin\alpha - ar\sin\alpha$

31-39-83-56
(15:1)

Черновик

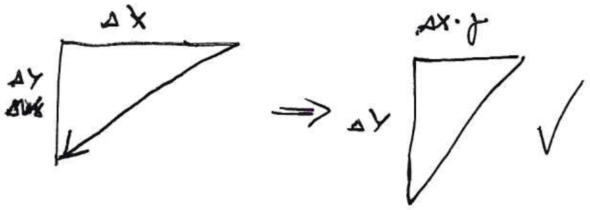
$$\left(\frac{\omega v}{c^2} + k\cos\theta\right)\gamma = k'\cos\theta' \qquad k\sin\theta = k'\sin\theta'$$

$$k\left(\frac{v}{c}+\cos\theta\right)\gamma = k'\cos\theta' \qquad k'\sin\theta' = k\sin\theta$$

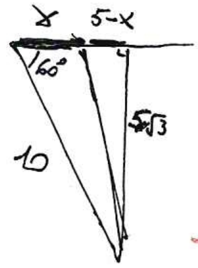
$$k' = k\sqrt{\left(\frac{v}{c}+\cos\theta\right)^2\gamma^2 + \sin^2\theta} =$$

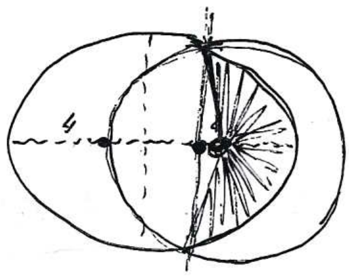
$$\cancel{\frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c}\cos\theta + \cos^2\theta} \qquad \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 + \frac{1}{\frac{c^2}{v^2}-1}$$

$$tg\,\theta' = \frac{\sin\theta}{\left(\frac{v}{c}+\cos\theta\right)\gamma} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sin\theta}{\frac{v}{c}+\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c}\cdot\frac{1}{\cos\theta}+1}\,tg\,\theta$$



$$\frac{x}{50} + \frac{\sqrt{25+(5-x)^2}}{5}$$



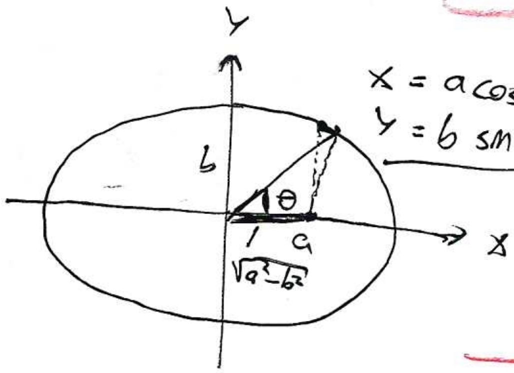


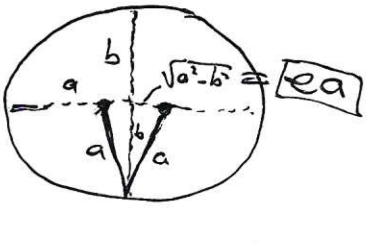
$e = 0{,}6$

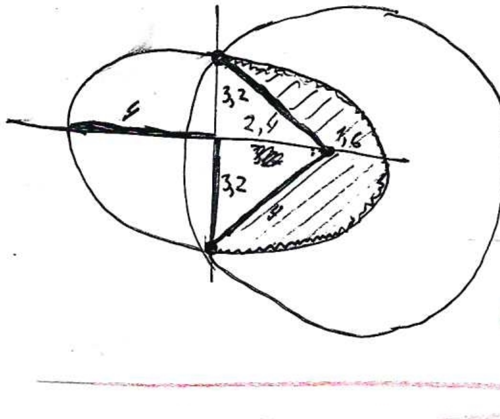
$\sqrt{1-e^2} = 0{,}8$

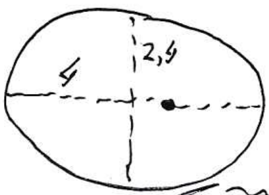
$x = a\cos\theta$

$y = b\sin\theta$







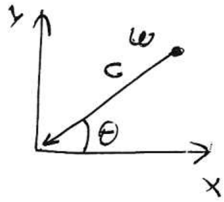


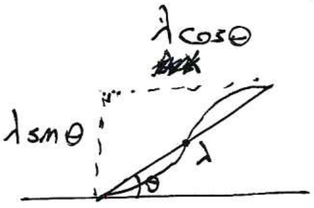
б) черновик

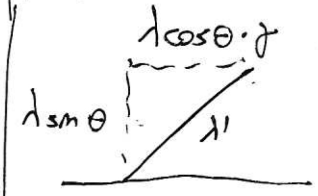
$k \,|\, k'$:

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

~~Чистовик~~ Черновик







$$\lambda' = \sqrt{\lambda^2\sin^2\theta + \lambda^2\cos^2\theta\cdot\gamma^2 + \cancel{\ldots}} = \lambda\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}$$

$\cancel{\dfrac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \dfrac{1}{\frac{v^2}{c^2}-1}}$

$\omega' = \omega\gamma$ (т.к. $t^* = \gamma$)

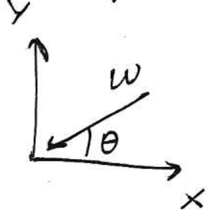
$$\sqrt{\sin^2 + \cos^2\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1+\cos^2\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$kc = \omega$

$k = \dfrac{\omega}{c}$

$k\lambda = 2\pi \quad |:2\pi$

$c\dfrac{2\pi}{\omega} = \lambda$



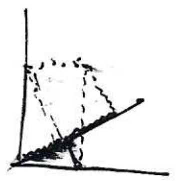
$$u(x,y,t) = u_0\sin(\omega t + kx\cos\theta + ky\sin\theta + \varphi_0)$$

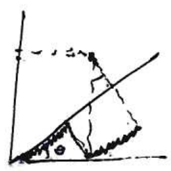
В k': $y' = y$

$x' = (x - vt)\gamma$

$t' = \left(t - \dfrac{xv}{c^2}\right)\gamma$

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$





$$t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{xv}{c^2} = \frac{t'}{\gamma} + \left(\frac{x'}{\gamma} + vt\right)\frac{v}{c^2}$$

$-l = x\cos\theta + y\sin\theta$

$t\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right) = \dfrac{t'}{\gamma} + \dfrac{x'v}{\gamma c^2}$ $\quad t = \left(t' + \dfrac{x'v}{c^2}\right)\gamma$

$$\cancel{u(x',y',t) = u_0\sin\left(\omega\left(\frac{t'}{\gamma} + \frac{xv}{c^2}\right) + k\cos\theta\cdot\left(\frac{x'}{\gamma} + vt\right) + ky'\sin\theta + \varphi_0\right)}$$

$\cancel{\dfrac{\omega\gamma t}{\gamma}}$

$t = \left(t' + \dfrac{x'v}{c^2}\right)\gamma \qquad x = (x' + vt')\gamma$

$$u(x',y',t') = u_0\sin\left(\omega\left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right)\gamma + k\cos\theta(x' + vt')\gamma + ky'\sin\theta + \varphi_0\right)$$

$$u_0\sin\left(t'\underbrace{(\omega\gamma + k\cos\theta\, v\gamma)}_{\omega'}\right)$$

$$\omega' = \omega\gamma + k\cos\theta\, v\gamma = \gamma\left(\omega + \frac{\omega}{c}v\cos\theta\right) = \omega\cdot\frac{1+\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$