0 955288 200003

95-52-88-20
(40.52)

Дешифр

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „ЛОМОНОСОВ"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

АКИНШИНА АРСЕНИЯ АНДРЕЕВИЧА
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

95 - 52 - 88 - 20.

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
8	12	4	12	12	12	0	0	60

60 (шестьдесят)

№1 Чистовик

2 вр 4 защ 7 нап 3 унив

Нужно выбрать 1 вр, 2 защ, 3 нап.

Разберём 4 случая:

1) Не выбрано ни одного универсала:

~~Тогда кол-во сп. выбрать 2 защ и 3 нап 4·7 = 28 сп~~

~~2) Выбран 1 универсал:~~

~~$\underbrace{5\cdot7}_{\text{универсал как защ}} + \underbrace{4\cdot8}_{\text{унив. как нап}} = 35+32 = 67$~~

~~Если он выбран~~

Тогда кол-во сп. выбрать 2 защ и 3 нап = ~~4·7~~

$= C_4^2 \cdot C_7^3 = \frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{6} = 6\cdot35 = 210$

2) Выбран 1 универсал:

2.1) Если как защ, то осталось выбрать 1 защ. и 3 нап:

$C_4^1\cdot C_7^3 = 4\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{6} = 140$

2.2) Если как нап., то $C_4^2\cdot C_7^2 = \frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{7\cdot6}{2} = 6\cdot21 = 186$

~~Итого, $C_4^1\cdot C_7^3 + C_4^2\cdot C_7^2$~~

3) Выбрано 2 универсала:

$\underbrace{C_7^3}_{\text{2 защ}} + \underbrace{C_4^1\cdot C_7^2}_{\text{нап + защ}} + \underbrace{C_4^2\cdot C_7^1}_{\text{2 нап}} = \frac{7\cdot6\cdot5}{6} + 4\cdot\frac{7\cdot6}{2} + \frac{4\cdot3}{2}\cdot7 =$

$= 35+84+42 = 84+77 = 161$

4) Выбрано 3 универсала:

$\underbrace{C_7^2}_{\text{2 защ + 1 нап}} + \underbrace{C_4^1\cdot C_7^1}_{\text{1 защ + 2 нап}} + \underbrace{C_4^2}_{\text{3 нап}} = \frac{7\cdot6}{2} + 4\cdot7 + \frac{4\cdot3}{2} =$

$= 21+28+6 = 55$

$216 + 186 = 402$

см прод

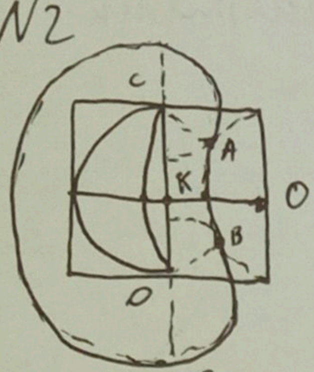
~~Итого, 210+140+186+161+55 = 350+186+216 = 350+402 = 752~~

~~Ответ: 752~~

Т.к. ещё нужно выбрать 1 вр из 2, то Ответ: 752·2 = 1504.

Чистовик

№2



Вся закраш. обл. слева от оси ординат содержится в полукруге с центром (0;0) и рад $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

~~$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$~~ Также все точки внутри правых полукругов с центрами (0;1), (0;-1) и рад $\frac{\sqrt{2}}{2}$ закр. Рассмотрим окр. с центром (1;0) и рад $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Она кас. этих полукругов в т. A и B. Тогда ~~пересечение~~ разность секторов OAB и OCD (O, A, C и O, B, D кол-рн, т.к. лежат на диаг. квадратов) тоже закрашена. Тогда

$$S = \underbrace{\frac{1}{2}\pi\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}_{\text{левый полукруг}} + \underbrace{2\cdot\frac{3\pi}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}_{\text{сумма правых полукругов, т.к. } \angle KCA = 45^\circ} + \underbrace{\frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2 - \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}_{\text{разность секторов}}$$

$$-\underbrace{\left(\underbrace{\frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2}_{\text{сектор}} - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1}_{S(OCD)}\right)}_{\text{сегмент KCD, посч. 2 раза}} = \frac{1}{2}\pi\left(1+\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right) + \frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$+1 = \pi\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\right)+1 =$$

$$= \cancel{\pi\left(\frac{7}{4}+\sqrt{2}\right)+1}$$

~~Ответ: $\pi\left(\frac{7}{4}+\sqrt{2}\right)+1$.~~ Ответ: $\pi\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1$

95-52-88-20
(40.52)

№3 Чистовик

$$\begin{cases}(x-1)(y+2)\,|y-x-10| = (x-4)\,|(x-1)(y+2)| & (1)\\ \sqrt{y-x+8} = y-5 & (2)\end{cases}$$

Из ОДЗ: $\begin{cases} y \geq 5 \\ y \geq x-8 \end{cases}$

1) Если $x=1$, то (1) верно, а (2):

$\sqrt{y+7} = y-5$; $\begin{cases} y+7 = y^2-10y+25 \\ y-5 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-11y+18=0 \\ y \geq 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2; 9 \\ y \geq 5 \end{cases}$ $y=9$

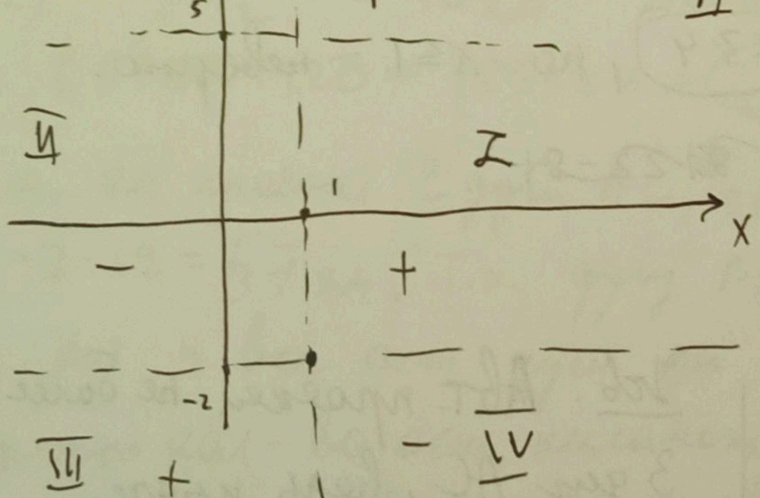
$(1; 9)$

2) Если $y=-2$, то $\sqrt{6-x} = -7$ – невозм.

3) ~~$y-x+8 = y^2-10y+25$; $x = -y^2+11y-17$~~

~~Если~~

Т.к. $y \geq 5$, то рассм. только I и II



Теперь $x \neq 1$ и $y \neq -2$.

I) $|y-x-10| = (x-4)$

$\begin{cases} y-x-10 = x-4 \\ y-x-10 \geq 0 \end{cases}$

$y = 2x+6$.

$\sqrt{x+14} = 2x+1$

$x+14 = 4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-13=0$

$D = 9+4\cdot13\cdot4 = 217$

$x = \frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$

Т.к. $x \geq 1$, то $x = \frac{-3+\sqrt{217}}{8}$; $y = \frac{-3+\sqrt{217}}{4}+6 \geq 5$.

ОДЗ: $\frac{-3+\sqrt{217}}{4}+6 \geq \frac{-3+\sqrt{217}}{8}-8$ – верно

II $\begin{cases} -y+x+10 = x-4 \\ y-x+10 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=14 \\ y \leq x-10 \end{cases}$

$\sqrt{14-x+8} = 14-5$; $22-x=81$; $x = 22-81 = -61$

Не выполняется $14 \leq -61-10 \Rightarrow$ такого решения нет.

Ответ: $(1; 9)$,

Черновик

$$\begin{cases} y-x-10=x-4 \\ y-x-10\geqslant 0 \end{cases} \quad y=2x+6 \quad y\geqslant x+10$$

$\sqrt{x+14}=2x+1$; $x+14=4x^2+4x+1$;

$4x^2+3x-13=0$; $D=9+4\cdot13\cdot4=9+208=217$.

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{217}}{8}=\dfrac{-3+\sqrt{217}}{8}$, т.к. $x\geqslant 1$.

$y=\dfrac{-3+\sqrt{217}}{4}+6$; Проверка

$\dfrac{-3+\sqrt{217}}{4}+6\geqslant\dfrac{-3+\sqrt{217}}{8}+10$

$\dfrac{-3+\sqrt{217}}{8}\geqslant 4$; $\sqrt{217}\geqslant 35$ – неверно.

II $\begin{cases} -y+x+10=x-4 \\ y-x-10\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=14 \\ x\geqslant 4 \end{cases}$, но $x\leq 1$ – неверно.

~~$\sqrt{22-x}=9$; $x=22-81$~~

Ответ: $(1;9)$.

N4

$\breve{AB}=13$ км, $t_{AB}=5$ мин

$\breve{BC}=27$ км, $t_{BC}=13$ мин

$t_{\breve{AC}}=19$ мин

$t_{общ}=60+35=95$ мин

$S_{км}$ – ?

Утв. Авт. проехал не более 3 дуг AC, ведь иначе они либо проехал 4 дуги за $4\cdot19=76$, оказавшись в A, по AC он ездить не может, т.к. в время будет $\geqslant 76+19=95$ мин $\Rightarrow$

Он должен проехать по AB и BC. Только по AB он ездить не может, ведь $19\not\vdots 5$, а если он поехал по BC, то потратил $\geqslant 76+2(5+13)>95$.

5 дуг AB авт. не может. проехать, т.к. $19\cdot5=95$, но он не в точке A.

№4 (прод) Чистовик

Если он проехал 3 дуги AC, то ему осталось ехать

$95-3\cdot 19=38$ мин. Значит, дуг BC он проехал не более двух, значит, дугами AB он проехал или 38, или $38-13=25$, или $38-26=12$ — подходит только 25. Тогда подходит такой маршрут: $A\to B\to A\to B\to A\to B\to C\to A\to C\to A$, который он проедет за $\underbrace{5\cdot 5}_{AB}+\underbrace{13}_{BC}+\underbrace{3\cdot 19}_{AC}=95$ мин.

Посчитаем длину $\overline{AC}$. Если $\overline{AB}=13$ км, $\overline{BC}=27$ км, то

~~$AC=\frac{13}{\pi}+\frac{27}{\pi}=\frac{40}{\pi}\Rightarrow$~~

$\pi\frac{AB}{2}=13$, $\pi\frac{BC}{2}=27 \Rightarrow AC=2\left(\frac{27}{\pi}+\frac{13}{\pi}\right)=\frac{80}{\pi}$ и

$\overline{AC}=\frac{\pi\cdot AC}{2}=40$ км. Значит, $S=5\cdot 13+1\cdot 27+3\cdot 40=$

$=65+27+120=185+27=212$ км.

$95-38=57$

Если он проехал 2 дуги AC, то ему осталось ехать $95-2\cdot 19=57$ км. Т.к. дугу AC он прошёл чётн. число раз, то и все ост. дуги он прошёл чётн. число раз $\Rightarrow$ ~~должно~~ кол-во ост. километров должно $\vdots\, 2$ — Пр-ие!

Если он проехал 1 дугу AC, то ему осталось ехать $95-19=76$ км, т.е нужно решить ур-ие $13a+5b=76$ в цел. неотр. числах

~~$a=0$ $76\not\vdots\,5$~~
~~$a=1$ $63\not\vdots\,5$~~
~~$a=2$ $76-26=80\vdots\,5$~~

~~Ответ: 212 км.~~

~~Т.к. $a+b$ — чётно, то~~ ~~$a+b+1$ — чётно, т.к. это кол-во проеханных дуг — Пр-ие!~~

$a=0$ $76\not\vdots\,5$
$a=1$ $63\not\vdots\,5$
$a=2$ $76-26=50\,\vdots\,5$
$a=3$ $76-39=37\not\vdots\,5$
$a=4$ $76-4\cdot 13=24\not\vdots\,5$
$a=5$ $76-5\cdot 13=11\not\vdots\,5$

Разберём вариант $a=2$, $b=10$.

Если он прошёл дуги AB и BC чётн число раз, то он мог только вернуться в A, но ему нужно проехать дугу AC — Пр-ие!

Ответ: 212 км.

№5 Черновик

$$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$$

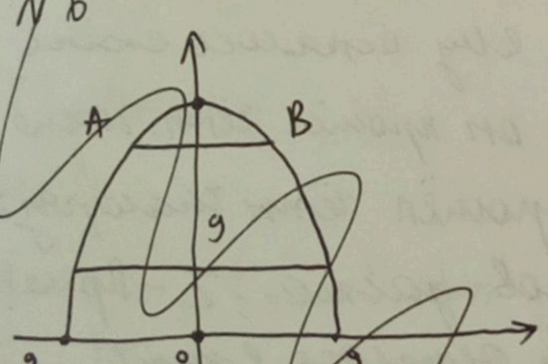
$$\cancel{\frac{\frac{x+2}{x-2}+2}{\frac{x+2}{x-2}-2}=\frac{\frac{x+2+2x-4}{x-2}}{\frac{x+2-2x+4}{x-2}}=\frac{3x+2}{6-x}}$$

$$\frac{\frac{2}{x-2}+2}{\frac{2}{x-2}-2}=\frac{\frac{2+2x-4}{x-2}}{\frac{2-2x+4}{x-2}}=\frac{2x-2}{6-2x}=\frac{x-1}{3-x}$$

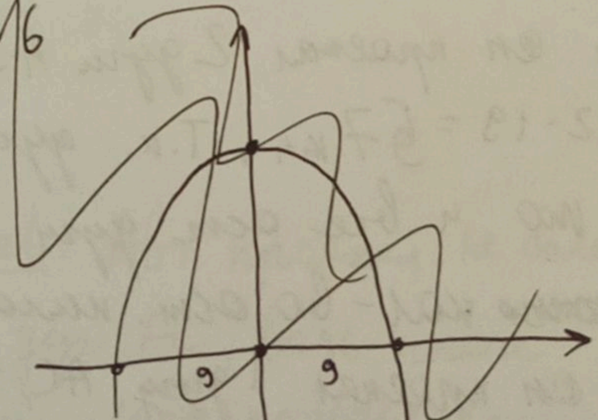
$$\frac{2}{\frac{2}{x-2}-2}=\frac{2}{\frac{2-2x+4}{x-2}}=\frac{2x-4}{6-2x}=\frac{x-2}{3-x}$$

$$\frac{\frac{2}{x-2}-1}{3-\frac{2}{x-2}}=\frac{\frac{2-x+2}{x-2}}{\frac{3x-6-2}{x-2}}=$$

№6



№6



$$m(10^k-1)=m$$

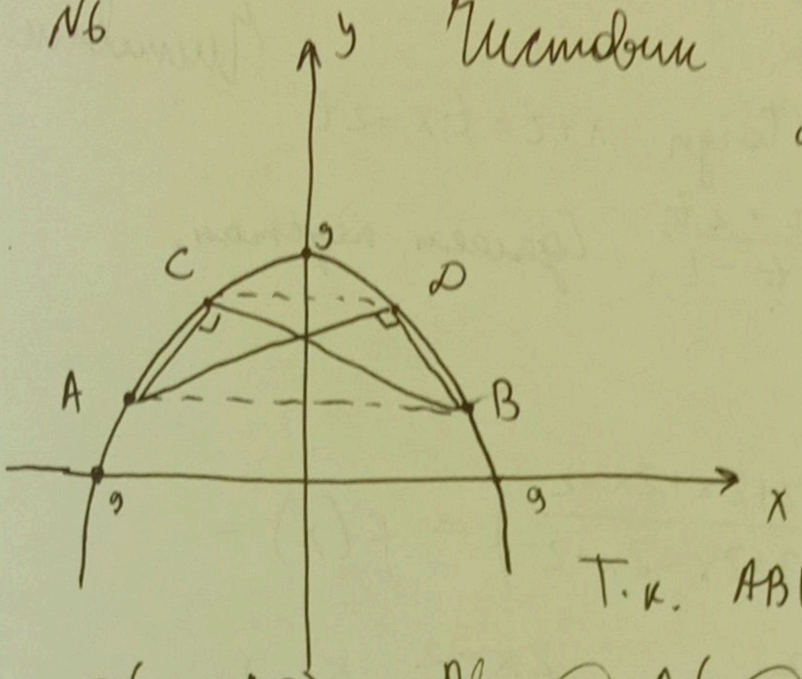
$$10^{89}+8$$

$$\cancel{\frac{\frac{2}{x}+2}{\frac{2}{x}-2}=\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\frac{x+2}{2x-4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{x-2}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x+2-x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}.$$

$$13\cdot a+5b=76$$

№6 Чистовик



Найдём ур-ие пар-лы:

$a = 9$ и

$9 - bx^2 = k(x-9)(x+9)$

$9 - bx^2 = kx^2 - 81k$

$-81k = 9;\ k = -\frac{1}{9} \Rightarrow b = \frac{1}{9}.$

$\boxed{y = 9 - \frac{1}{9}x^2}$

Т.к. $AB \parallel CD$, то достаточно найти $\rho(C, AB)$. ~~Пусть $A(a;\ 9-\frac{1}{9}a^2)$, $B(\ldots)$, $C(\ldots)$.~~

~~Тогда $\overline{CA}\{a-c;\ \frac{1}{9}c^2-\frac{1}{9}a^2\}$, $\overline{CB}\{b-c;\ \frac{1}{9}c^2-\frac{1}{9}b^2\}$.~~

~~Тогда т.к. $\angle ACB = 90°$, то $\overline{CA}\cdot\overline{CB} = 0 \Rightarrow$~~

~~$(a-c)(b-c) + \frac{1}{81}(c-a)(a+c)(c-b)(b+c) = 0;\ \mid :(a-c)(b-c)$~~

~~$1 + \frac{1}{81}(a+c)(b+c) = 0;$~~

~~$(a+c)(b+c) = -81.$~~

Пусть $A(a;\ 9 - \frac{1}{9}a^2)$. Тогда т.к. $AB \parallel Ox$, и вся констр. сим. отн-о Oy, то $B(-a;\ 9-\frac{1}{9}a^2)$. $C(c;\ 9-\frac{1}{9}c^2)$. Тогда $\overline{CA}\{a-c;\ \frac{1}{9}c^2 - \frac{1}{9}a^2\}$, $\overline{CB}\{-a-c;\ \frac{1}{9}c^2 - \frac{1}{9}a^2\}$. Т.к. $\angle ACB = 90°$, то $\overline{CA}\cdot\overline{CB} = 0 \Rightarrow$

$-(a^2-c^2) + \frac{1}{81}(c^2-a^2)^2 = 0;\ \mid :(c^2-a^2)$

$1 + \frac{1}{81}(c^2-a^2) = 0;\ c^2 - a^2 = -81.$

$\rho(C, AB) = 9 - \frac{1}{9}c^2 - (9 - \frac{1}{9}a^2) = \frac{1}{9}(a^2-c^2) = \frac{1}{9}\cdot 81 = 9.$

Ответ: 9.

№5 Чистовик

~~2~~ Пусть $\frac{x+2}{x-2} = t$. Тогда $x+2 = tx - 2t$

$(t-1)x = 2+2t$; $x = \frac{2+2t}{t-1}$. Сделаем подстан.

$x \mapsto \frac{2+2x}{x-1}$

$$f\left(\frac{\frac{2+2x}{x-1}+2}{\frac{2+2x}{x-1}-2}\right) = f\left(\frac{2+2x+2x-2}{2+2x-2x+2}\right) = f(x) =$$

$$= \frac{2}{\frac{2+2x}{x-1}-2} = \frac{2x-2}{2+2x-2x+2} = \frac{2x-2}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

...

$g(x) = \underbrace{f(\dots f}_{12}(x)\dots) = \frac{1}{2^{12}} x + C$, где C – св. член.

$g'(x) = \frac{1}{2^{12}}$. Ответ: 2^{-12}.

2

~~№4 (прод)~~

~~Докажем, что кол-во путей прохода дуг под 3 чётная~~

~~можно представить нам~~

$\begin{array}{r} 387 \\ \cdot\ 3 \\ \hline 1161 \end{array}$ $\begin{array}{r} 487 \\ \cdot\ 3 \\ \hline 1461 \end{array}$

№7 (прод)

О универс. можно выбрать 1 сп, $1 \to 3$ сп, $2 \to C_3^2 = 3$ сп, $3 \to 1$ сп $\Rightarrow$ Итого, $210 + 3(140+186) + 3(161) + 55 =$

$= 210 + 3 \cdot 326 + 3 \cdot 161 + 55 = 265 + 3 \cdot 487 =$

~~$= 265 + 1161 = 1426$. Т.к. ещё можно выбрать 2 вратарей, то ответ: $2 \cdot 1426 = 2852$.~~

$= 1461 + 265 = 1726$. Т.к. можно ещё выбрать 2 вр., то Ответ: $2 \cdot 1726 = 3452$.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ