0 676341 050006

67-63-41-05
(38.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Алексеева Ильи Романовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

 75 семьдесят пять

67-63-41-05 (38.6)

Задача 1. Чистовик

Дано:

$m, n \in \mathbb{Z}; m \neq n$

$\left(\frac{1}{m}-2\right); \left(\frac{1}{n}-2\right)$ - корни $f(x) = x^2+ax+b$; $(a, b \in \mathbb{Z})$

$a+b=?$

1) По т. Виета: $a = -\left(\left(\frac{1}{m}-2\right)+\left(\frac{1}{n}-2\right)\right)$; $b = \left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right)$

2) $a+b = -\frac{1}{m} - \frac{1}{n} + 4 + 4 + \frac{1}{mn} - \frac{2}{n} - \frac{2}{m} = -3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) + 8 + \frac{1}{mn} =$

$= -3\left(\frac{m+n}{mn}\right) + 8 + \frac{1}{mn} = 8 + \frac{1-3m-3n}{mn}$

3) т.к. $a \in \mathbb{Z}$: $-\left(\left(\frac{1}{m}-2\right)+\frac{1}{n}-2\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{m+n}{mn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} m+n \vdots mn \\ m, n \neq 0 \end{cases}$

4) $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$: $\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{mn} - 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{mn} - 2\left(\frac{n+m}{mn}\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{mn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} mn = 1 \\ mn = -1 \end{array}\right. \Rightarrow$

(п. 3: $\frac{n+m}{mn} \in \mathbb{Z}$)

т.к. $m, n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases} \\ \begin{cases} n=-1 \\ m=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow (п. 2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b = 8 + \frac{1-6}{1} = 3 \\ a+b = 8 + \frac{1+6}{1} = 15 \\ a+b = 8 + \frac{1}{-1} = 7 \end{array}\right.$

$a+b = 7$

Ответ: $\{3; 15; 7\}$

Стр 1.

Задача 3. $a, b, c > 0$: Чистовик

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a} + \frac{2(a-2b^2+2b}{2b} + \frac{2ab-2c^2+2c}{2c} =$$

$$= -(a+b+c)+3 + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = \cancel{\frac{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}{abc}} \cancel{+}$$

$\cancel{+3-(a+b+c)}$ Заметим, что по нер-ву Коши:

$$\cancel{a+b+c}\ \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^2 b^2 a^2}{abc}} = 3\sqrt[3]{abc}$$

~~С другой стороны~~: $\cancel{a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow -(a+b+c) \leq}$

~~(по нер-ву Коши)~~

$$\cancel{\leq -3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - (a+b+c) \leq 0}$$

$$\boxed{\text{Док., что } \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c}$$

$\Updownarrow$

$$\cancel{\left(\frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{a^2c^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{c^2} + 2c^2 + 2a^2 + 2b^2\right) \leq a^2+b^2+c^2 + 2(ab+cb+ac)}$$

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ac}{b}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c}\right)^2 + a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+cb+ac)$$

$\Updownarrow$

$$(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2 \geq abc(a+b+c)$$

Пусть $x = bc$; $y = ac$; $z = ab$

Нер-во примет вид: $x^2+y^2+z^2 \geq \cancel{xyz}$ $xy+xz+yz$

$\Updownarrow$

$$2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2xz+2yz$$

$\Updownarrow$

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$$

$\geq 0 \quad \geq 0 \quad \geq 0$

Значит: $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - (a+b+c) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(a+b+c)+3 + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 3$$

Ответ: 3

Значение 3 очевидно достигается при $a=b=c=1$

67-63-41-05 (38.6)

Задача 5. Черновик

Дано: $\triangle ABC$

$M, N \in AC$

$\angle ABM = 15°$

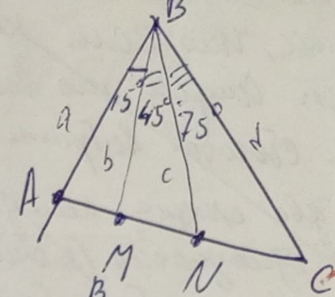
$\angle MBN = 45°$

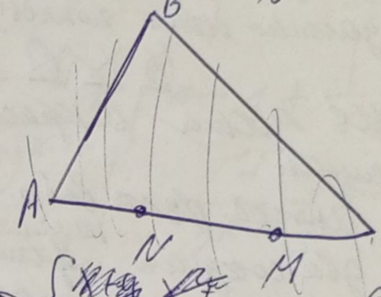
$\angle NBC = 75°$

$S_{ABM} + S_{NBC} = 5$

$S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$

$S_{ABC} - ?$





~~I) Пусть $S_{ABM} = x$~~

~~$S_{NBC} = y$~~

~~Тогда: $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5-y \\ (5-y)y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5-y \\ -y^2+5y=3 \end{cases} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \begin{cases} x=5-y \\ y^2-5y+3=0 \end{cases}$ $D=25-12=13$ $\Rightarrow \begin{cases} x=5-y \\ y=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases}$~~

~~1) $S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \frac{\sin\angle ABC}{2}$. Пусть $AB = a$; $BM = b$; $BN = c$~~

~~$BC = d$; тогда: $S_{ABC} = ad \cdot \frac{\sin(135°)}{2} = ad \cdot \frac{\sin 45°}{2} = \frac{ad}{2\sqrt{2}}$~~

~~2) по усл: $ab \cdot \frac{\sin 15°}{2} + cd \cdot \frac{\sin 75°}{2} = 5$; $\frac{ab \cdot cd}{4} \cdot \sin 15° \cdot \cos 75° = 3 \Rightarrow bc = \frac{\sin 45° \cdot \cos 15° \cdot 3 \cdot 4}{ad \cdot \sin 15° \cdot \cos 15°} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow S_{BMN} = bc \cdot \frac{\sin 45°}{2} = \frac{6}{\sqrt{2} \cdot ad \cdot \sin 45° \cdot \cos 15°}$~~

II) Пусть $S_{ABM} = x$; $S_{NBC} = y$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5-y \\ (5-y)y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2=25 \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2xy+y^2=13 \\ xy=? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y) = \pm\sqrt{13} \end{cases}$$

Задача 4: Посмотрим сколько способов рассадить девочек, точнее сколько способов выбрать места для девочек: Заметим, что если не найдется два соседних пустых стула, то все девочки сидят через одну, т.е. 2 способа выбрать для них места. Если же такие два стула найдутся, то рассадка девочек задаётся однозначно (точнее места с девочками) т.к. между ними должно быть хотя бы 1 стул.

O X O O O O O O O O

Покрасим чётные места в красный цвет, а нечётные в синий. Посмотрим, скольк. способ. выбр. места для не занятых дев. девочек: если нет два соседних стула, то 2 способа, если есть то: (X – стул без дев. | O – дев.)

1) X X O _ O _ O _ O _ O (невозм.)
2) O X X O _ O _ O _ O (невозм.
3) _ O X X O _ O _ O _ O
4) O _ O X X O _ O _ O (невозм.)
5) O _ O _ X X O _ O _
6) O _ O _ O X X O _ O (невозм.)
7) _ O _ O _ O X X O _
8) O _ O _ O _ O X X O
9) _ O _ O _ O _ O X X (невозм.)

т.е всего способов выбрать места для дев – 6 т.о. ст. их рассадить $6\cdot5!$

Тогда способов рассадить всех: $6\cdot5!\cdot A_5^4 =$

$= 6\cdot5!\cdot5! = 6\cdot120\cdot120 = 6\cdot14400 =$

$= 86400$

Ответ: 86400 способов.

$120\times120 = 144$, $144\times6 = 864$

Чистовик. стр4.

67-63-41-05 (38.6)

Задача 6: Посмотрим сколько будет воды в кувшине через k заливок: Чистовик.

$$\left(\left(\left(\left(\frac{7}{2}+5\right)\cdot\frac{1}{2}+5\right)\cdot\frac{1}{2}+5\right)\cdot\frac{1}{2}\ldots\ldots\right)\cdot\frac{1}{2}+5 = \left(\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+5\right)\cdot\frac{1}{2} =$$

5 – прибавили k-1 раз.

$$= \frac{7}{2^{k-1}}+\frac{5}{2^{k-2}}+\frac{5}{2^{k-3}}+\ldots+\frac{5}{2^0} =$$

$$= \frac{7}{2^{k-1}}+5\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-2}}\right) =$$

$$= \frac{7}{2^{k-1}}+5\,\frac{(2^{-1})^{k-1}-1}{2^{-1}-1} = \frac{7}{2^{k-1}}+5\cdot\frac{(2^{-1})^{k-1}-1}{-\frac{1}{2}} =$$

Т сумма геом. пр.

$$= \frac{7}{2^{k-1}}+5\cdot\frac{1-2^{1-k}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{2^{k-1}}+10-10\cdot2^{1-k} =$$

$$= 2^{1-k}(7-10)+10 = -3\cdot(2^{1-k})+10$$

Заметим, что чем больше k, тем ближе объем к 10, но 10 никогда не достигнется, т.к. $-3\cdot(2^{1-k})<0$. Пункт а: Ответ: 10 литров.

б): $-3\cdot2^{1-k}+10 \geq 9{,}99 \Rightarrow 3\cdot2^{1-k} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow 300\cdot2^{1-k} \leq 1 \Rightarrow 2^{1-k} \leq \frac{1}{300} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{300} \Rightarrow 2^{k-1} \geq 300$

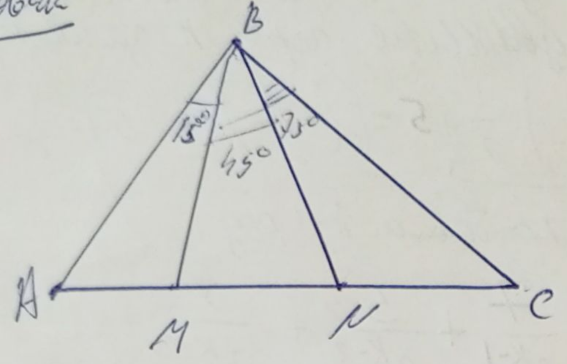
Значит т.к. $k-1\in\mathbb{Z}$, $2^{k-1} = 512 = 2^9 \Rightarrow$

$\Rightarrow k-1 = 9 \Rightarrow k = 10$ ~~Ответ: на 10 день~~

Значит произошло 10 заливок. Но номер текущего дня совпад. с номером заливки

Ответ: на 10 день. стр.5

Задача 5. Черновик



Дано: $\triangle ABC$
$M, N \in AC$
$\angle ABM = 15^\circ$
$\angle MBN = 45^\circ$
$\angle NBC = 75^\circ$
$S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$
$S_{ABM} + S_{NBC} = 5$
Найти: S_{ABC}

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow \sin 30^\circ = 2 \cdot \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{2} = 2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{4} = \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ$

2) Пусть ~~S ABM~~: $AB = a$; $BM = b$; $BN = c$; $BC = d$:
$S_{ABM} \cdot S_{BNC} = abcd \cdot \frac{\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ}{4} = abcd \cdot \frac{1}{16} \Rightarrow$ п.1.
$\Rightarrow abcd \cdot \frac{1}{16} = 3 \Rightarrow abcd = 48 \Rightarrow bc = \frac{48}{ad}$

3) $S_{ABM} + S_{NBC} = 5 \Rightarrow \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{2} \cdot ab + \sin 75^\circ \cdot cd \cdot \frac{1}{2} = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin 15^\circ \cdot ab + \sin 75^\circ \cdot cd = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin 15^\circ \cdot a \cdot \frac{48}{adc} + \sin 75^\circ \cdot cd = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin 15^\circ \cdot \frac{48}{dc} + \cos 15^\circ \cdot cd = 10 \Rightarrow \cancel{\sin 15^\circ} +$

4)

Черновик: ~~$11m + 7n \equiv 0 \ (17)$~~

Чистовик

№7 Заметим, что всего проехал 85 мин
85 : 17, значит по дугам AB и BC он
проехал количество минут кратное 17
Пусть k дуг BC и m дуг AB

$k \cdot 11 + m \cdot 7 \equiv 0 \ (17)$ 1) $k \cdot 11 + m \cdot 7 = 0$ – невозм.
Расм. случаи: 2) $k \cdot 11 + m \cdot 7 = 17$ – невозможно
3) $k \cdot 11 + m \cdot 7 = 34$ – невозм. (т.к. $7m = 34$; $7m = 23$; $7m = 12$; $7m = 1$)

4) $k \cdot 11 + m \cdot 7 = 51$ – ~~$7m = 51$, $7m = 40$, $7m = 29$, $7m = 18$, $7m = 7$~~ [$7m = 51$; $7m = 40$; $7m = 29$; $7m = 18$; $7m = 7$
① $\begin{cases} k = 4 \\ m = 1 \end{cases}$

5) $k \cdot 11 + m \cdot 7 = 68$ – [$7m = 57$; $7m = 46$; $7m = 35$; $7m = 24$; $7m = 13$; $7m = 2$
② $\begin{cases} k = 3 \\ m = 5 \end{cases}$

6) $k \cdot 11 + m \cdot 7 = 85$ [$m \cdot 7 = 85$; $7m = 74$; $7m = 63$; $7m = 52$; $7m = 41$; $7m = 30$; $7m = 19$; $7m = 8$
③ $\begin{cases} m = 9 \\ k = 2 \end{cases}$

~~Возможные вар ②~~ ~~Заметим, что кол-во дуг AC пройденных автомобилем должно быть нечётно, т.к.~~ Заметим, что $k = 0$ – ~~...~~ и неч. кол-во пройденных дуг AC – невозможно, т.е. нов. вар ① и вар ③ : Док-во:

Значит есть три варианта: ①; ②; ③
~~AB~~ Длина дуги AC: Из подобия $BC = \frac{5}{3} AB \Rightarrow AC = \frac{8}{3} AB \Rightarrow$
$\Rightarrow$ дуга $AC = \frac{8}{3} \cdot$ дуга $AB = 40$
③ вар: $S = 50 + 135 = 185$
① вариант: $S = 100 + 15 + 40 \cdot 2 = 195$
② вариант: $S = 75 + 75 + 40 = 190$

Стр. 6

№ 7 (продолж.) Чистовик

Если кол-во протухших дуг AC – чётно, то Ответ: {180; 190; 195

№ 3 Нельзя попадать в то число которое даёт в сумме с тобой – семь

Заметим, что первое очко ≤ 4

Разберём случаи:

Первое очко: 1 → 5 → 6

1 → 4 → 5; 4 → 6

1 → 3 → 5; 3 → 6

1 → 2 → 3; 2 → 4; 2 → 6

8 вар

Первое очко 2 → 3 → 5; 3 → 6

2 → 4 → 5; 4 → 6

2 → 6 → ✗

4 вар.

Первое 3 → 5 → 6 . 1 вар

3 → 6 → ×

Первое 4 → 5 → 6 . 1 вар.

14 вар.

Ответ: 14 послед.

Стр. 7.