0 032288 080009

03-22-88-08

(40.35)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ДЕШИФР

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Андриянова Фёдора Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	0	0	12	12	12	12	0	52

 Черновик

~~52 (пятьдесят два)~~

56 (пятьдесят шесть)

ДЕШИФР

03-22-88-08 (40.35)

$3\cdot5\cdot6+3\cdot5\cdot6+3\cdot3\cdot6+\cancel{3\cdot5\cdot3}+3\cdot2\cdot6+3\cdot5\cdot2+3\cdot3\cdot2+3\cdot2\cdot1=$

$=180+54+45+36+30+18+6=$

$=134+81+54=275+54=269$

№2

№3

$(xy-3+3x-y)|y-x-9|=(x-4)|xy-3+3x-y|$

$$\begin{cases} (xy-3+3x-y)|y-x-9|=(x-4)|xy-3+3x-y| \\ \sqrt{y-x+9}=y-4 \end{cases}$$

$x(y+3)-(y+3)=(y+3)(x-1)$

$\sqrt{y-x+9}\geq 0$ $y\geq 4$ $x<1$

$y-x+9\geq 0$ $y\geq x-9$ или $x>1$

$x=y+9$

$(x-1)|y-x-9|=(x-4)||x-1|$

$|y-x-9|=x-4$ $x>$

1 час 25 минут 250 85 минут

68-72 83 71-85

$\pi R+\pi r=$

68- 70

50 14

68 ~~91~~ 70 68-72

22

~~70~~ 85

$17+17=34=$

24+24

71+14

35

$10\cdot 4=160+30=190$

34-

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{x-1}$

~~17+17+17+~~

18+18+18+14+14

 ДЕШИФР

№5

$t=\frac{x+1}{x-1}$

$f(t)=\frac{t}{x+1}$

$f(t)=\frac{1}{x-1}$

$t\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$

$t=\cancel{\frac{2}{x-1}}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$

$f(t)=\frac{t-1}{2}$

$f(f(t))=\frac{\frac{t-1}{2}-1}{2}=\frac{t-3}{4}=>$

$f(f(f(t)))=\frac{\frac{t-3}{4}-1}{2}=\frac{t-7}{8}$

...

$\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{10}=\frac{t-2^{10}+1}{2^{10}}=$

$=t\cdot 2^{-10}-1+2^{-10}$

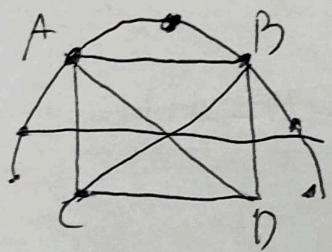
2^{-10}

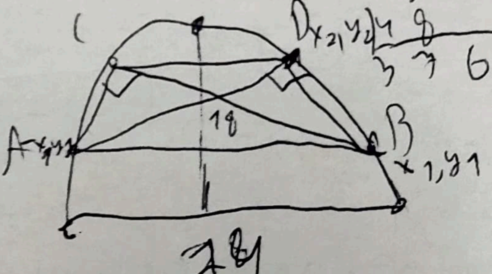
№6

$y=18-\frac{x^2}{96}$

$x^2=18\cdot 96-96y$

$\frac{x\,2\,4}{96}$ $2^3\cdot 3$ $2^5\cdot 3$





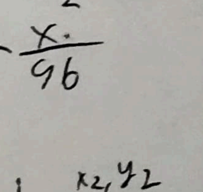
$\frac{48}{376}$ $2^5\cdot 3$ $\frac{1}{96}$

$b\cdot 24^2=18$

$18-\frac{x^2}{96}$

$\overline{DB}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$

$DA=(-x_1-x_2,y_1-y_2)$



$\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y^2}\cdot(\cos(\beta-\alpha))=$

$=\ldots\ldots\cos\beta\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\sin\alpha=$

$=\sqrt{x_2^2\ldots}\;\;x_2\cdot x_1+$

03-22-88-08 (40.35)

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)^2 = x_1^2-x_2^2+(y_1-y_2)^2 =$

$= \frac{y_1-y_2}{96b} + (y_1-y_2)^2 = (y_1-y_2)(y_1-y_2+\frac{1}{96})=0$

$y_2 = y_1+\frac{1}{b}$

$y_1-y_2=\frac{1}{96}$ 96

$y = a-bx^2,$ $bx^2 = a-y$

$x^2=\frac{a}{b}-\frac{y}{b}$

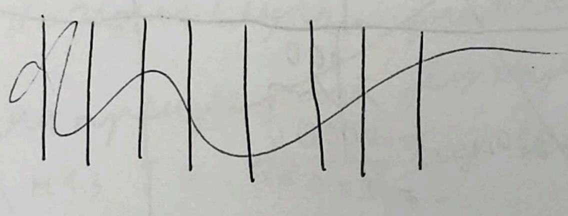
$x_1^2-x_2^2+(y_1-y_2)^2 = \frac{a}{b}-\frac{y_1}{b}-\frac{a}{b}+\frac{y_2}{b}+(y_1-y_2)^2 =$

$= -\frac{(y_1-y_2)}{b}+(y_1-y_2)^2 = (y_1-y_2)(y_1-y_2-\frac{1}{b})$

$b\cdot 24^2 = 18$

$b=\frac{18}{24^2}$ $\frac{1}{b}=\frac{24^2}{18}=\frac{2^6\cdot 3^2}{3^2\cdot 2}=2^5=32$

S(m)



0 3

0

6·

0 0
0 1
0 2
0 3
1 0
1 1
1 2
2 0
2 1
3 0

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Черновик

Дешифр

№1

~~Рассмотрим 8 случаев когда-то универсал был выбран I- ~~на~~ лучшим.~~

~~I - никем, II - толь~~

Рассмотрим ~~4~~ в случаях, когда кто-то из универсалов был выбран лучшим:

~~I - никем, ~~II - только вратарём~~, II только защитником, IV, только нападающим, ~~III~~ V - только вратарём и защитником, VI - только вратарём и нападающим~~

I - только защитником, II - только нападающим, III - и нападающим и защитником, IV - никем

Построю таблицу

№ случая	количество ~~претендентов на лучшего~~ претендентов на лучшего вратаря	защитника	нападающего	количество способов выбрать

100

$a_1 a_2 a_n \dots a_n 100000$

-99999

0 21

12345 $(10^n-1)\cdot m=$

10001 $10^n \cdot m-1$ ~~10^9~~7

$a_1 a_2$

9 ~~5~~ 2 34 ~~6~~ 1 45 90 135

270 9900 a 12345 0 000

9 12344

$\underbrace{12344\ 0\ 000}$

345

40 5 0

9990 . 99099 480+240 999

99990 98 720 9990

9 99990000 99999109 89

10000a-1 7560·3= 29999 7

4680 99999 0

9989

Z

№1

Построю таблицу ~~выбранн~~ случаев выбора игроков

Кол-во универсалов среди защитников	Кол-во универсалов среди ~~нападающих~~ нападающих	Кол-во вариантов выбрать 2 защитника	Кол-во вариантов выбрать 3-х нападающих
0	0	$C_3^0 \cdot C_5^2$	$C_3^0 \cdot C_6^3$
0	1	$C_2^0 \cdot C_5^2$	$C_3^1 \cdot C_6^2$
0	2	$C_1^0 \cdot C_5^2$	$C_3^2 \cdot C_6^1$
0	3	$C_0^0 \cdot C_5^2$	$C_3^3 \cdot C_6^0$
1	0	$C_3^1 \cdot C_5^1$	$C_3^0 \cdot C_6^3$
1	1	$C_2^1 \cdot C_5^1$	$C_3^1 \cdot C_6^2$
1	2	$C_1^1 \cdot C_5^1$	$C_3^2 \cdot C_6^1$
2	0	$C_3^2 \cdot C_5^0$	$C_3^0 \cdot C_6^3$
2	1	$C_2^2 \cdot C_5^0$	$C_3^1 \cdot C_6^2$

т.к. каждый случай уникален, ответом будет сумма произведений двух правых столбцов умноженная на 3 т.к. нужно еще выбрать 1-го из 3-х вратарей

т.е.

$$3\left(C_5^2 \cdot C_6^3 + C_3^0 \cdot C_3^0 + C_2^0 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 + C_1^0 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_6^1 + C_0^0 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 \cdot C_6^0 + C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^0 \cdot C_6^3 + C_2^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 + C_1^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot C_6^1 + C_3^2 \cdot C_5^0 \cdot C_3^0 \cdot C_6^3 + C_2^2 \cdot C_5^0 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2\right) = 3\left(C_6^1\left(C_3^2 \cdot C_5^2 + C_3^2 \cdot C_5^1\right) + C_6^2\left(C_5^2 \cdot C_3^1 + C_5^1 \cdot C_3^1 + C_3^1\right) + C_6^3\left(C_5^2 + C_5^1 \cdot C_3^1 + C_3^2\right) + C_5^2\right) =$$

$$= 3\left(6\left(3 \cdot 10 + 3 \cdot 5\right) + 15\left(10 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 3\right) + 20\left(10 + 5 \cdot 3 + 3\right) + 10\right) = 3\left(6 \cdot 45 + 15 \cdot 48 + 20 \cdot 28 + 10\right) =$$

$$= 3\left(270 + 720 + 560 + 10\right) = 4680$$

Ответ: 4680

№5

Пусть $t = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, тогда $\frac{t-1}{2} = \frac{1}{x-1}$, $t \neq 1$

рассмотрим $f(t)$

$$f(t) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1} = \frac{t-1}{2}$$

~~тогда~~ $\cancel{f(f(t)) = \frac{\frac{t-1}{2}-1}{2} = \frac{t-3}{4}}$

$\cancel{f(f(f(t))) = \frac{\frac{t-3}{4}-1}{4} = t-}$

Докажу, что $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n} = \frac{t-2^n+1}{2^n}$

при помощи метода мат. индукции

база: $f(t) = \frac{t-1}{2}$, $f(f(t)) = \frac{\frac{t-1}{2}-1}{2} = \frac{t-3}{4}$

шаг: $f(\underbrace{f(f\ldots f(x)))}_{n-1}) = \frac{\frac{x-2^{n-1}+1}{2^{n-1}}-1}{2} =$

$$= \frac{\frac{x-2^{n-1}+1-2^{n-1}}{2^{n-1}}}{2} = \frac{x-2^n+1}{2^n} \text{ ч.т.д.}$$

Значит

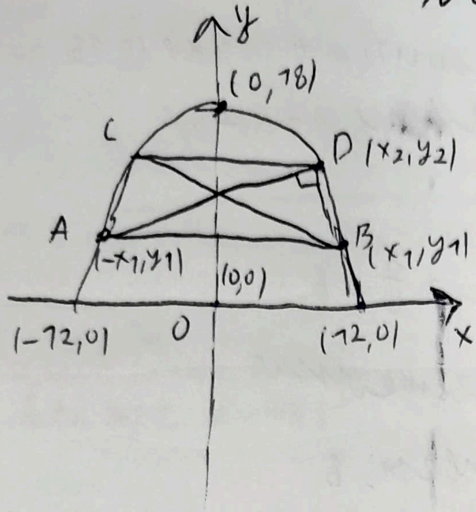
$$g(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{10} = \frac{x-2^{10}+1}{2^{10}} = x \cdot 2^{-10} - 1 + 2^{-10}$$

т.е. эта $g(x)$ – прямая, тангенс угла которой равен коэффиценту при x, т.е. 2^{-10}

Ответ: 2^{-10}

докажем у вершины

№6



Рассмотрим систему координат: ~~ось~~ ось Ox совпадает с полом, ось OY проходит через вершину параболы

~~Пусть~~ из условия координаты вершины пар. (0, 18)

парабола пересекает ось Ox в точках (12,0), (−12,0)

Пусть ~~B~~ координаты т. B – это (x_1, y_1), тогда координаты т. A это $(-x_1, y_1)$ т.к. AB∥Ox, парабола симетричная

А координаты т. D это (x_2, y_2)

т.к. $\angle ADB = 90°$, скалярное произведение векторов ~~DA~~ DA

$DA(-x_1-x_2, y_1-y_2)$ и $DB(x_1-x_2, y_1-y_2)$

Т.е.

$0 = (-x_1-x_2)(x_1-x_2)+(y_1-y_2)(y_1-y_2) = x_2^2-x_1^2+(y_1-y_2)^2$

т.к. все эти точки находятся на параболе,

т.е. $y = a - bx^2$ $\quad x^2 = \frac{a}{b} - \frac{y}{b}$, ~~$x_1^2 = \frac{a}{b} - y_1$~~

$\Downarrow$

$x_1^2 = \frac{a}{b} - \frac{y_1}{b}$, $x_2^2 = \frac{a}{b} - \frac{y_2}{b}$

$0 = x_2^2 - x_1^2 + (y_1-y_2)^2 = \frac{a}{b} - \frac{y_2}{b} - \frac{a}{b} + \frac{y_1}{b} + (y_1-y_2)^2 =$

$= \frac{(y_1-y_2)}{b} + (y_1-y_2)^2 = (y_1-y_2)(y_1-y_2+\frac{1}{b})$

т.к. $y_1 \neq y_2$, $y_1 - y_2 \neq 0$

$y_1 - y_2 + \frac{1}{b} = 0$

$y_2 - y_1 = \frac{1}{b}$

Найду b

т.к. вершина параболы находится в точке (0,18), a=18

возьму точку (12,0) и подставлю в $y = a - bx^2$

$$0 = 18 - b\cdot 12^2$$

$$b = \frac{18}{144} = \frac{1}{8} = 7 \qquad y_2 - y_1 = \frac{1}{b} = 8$$

$y_2 - y_1$ и есть искомое расстояние

Ответ: 8

~~Это ответ~~ №7

Наибольшее ~~число~~ 100-значное число это

$n = 10^{100} - 1$,

Докажу, что оно подходит.

Рассмотрю $1 \le m \le n$, $m \in N$, $m \not\vdots 10$

$nm = (10^{100} - 1)m = m\cdot 10^{100} - m$

т.е. если число m k значное, a_i это i-я цифра слева.

nm это $\overline{a_1 a_2 \ldots a_k \underbrace{00\ldots0000}_{100\text{ раз}}} - \overline{a_{k-2} a_{k-1} a_k}$ =

$= \overline{a_1 a_2 \ldots (a_k - 1) \underbrace{99\ldots99}_{99\text{ раз}}(10)} - \overline{a_{k-2} a_{k-1} a_k}$

$mn = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} (a_k - 1) \underbrace{99\ldots9}_{100-k} (9-a_1)(9-a_2)\ldots(9-a_{k-1})(10-a_k)}$

Тогда $S(mn) = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + (a_k - 1) + 9\cdot(100-k) +$

$+ (9-k_1) + (9-k_2) + \ldots$

Тогда $nm = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k \underbrace{00\ldots0}_{100}} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k}$

Т.к. $k \leq 100$

$nm = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}(a_k - 1)\underbrace{99\ldots9}_{100-k}(9-a_1)(9-a_2)\ldots(9-a_{k-1})(10-a_k)}$

А $S(nm) = a_1 + a_2 + \ldots a_{k-1} + (a_k - 1) + 9\cdot(100-k) + (9-a_1) +$

$+ (9-a_2) + \ldots + (9-a_{k-1}) + (9 - a_k + 1) =$

$= 9\cdot 100 = S(n)$ $\quad S(mn) = S(n)$

Значит для любого $m \not\vdots 10$ ~~удовлетворяет условию.~~

Если $m \vdots 10^k$, $\frac{m}{10^k} \not\vdots 10$, $k \in \mathbb{N}$

$S(\frac{m}{10^k} n) = S(n)$, а т.к. $S(x) = S(x \cdot 10^k)$, $x \in \mathbb{Z}$

$S(mn) = S(n)$ ч.т.д.

Ответ: $n = \underbrace{99\ldots9}_{100}$

№4

~~Длина~~ пусть ~~R - р~~ r_1 - радиус окр. с дугой AB, r_2 - с дугой BC, R - с дугой AB, за AC, BC, AB буду обозначать длины дуг

$AC = \pi R = \pi(r_1 + r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 = AB + BC = 40$ км

и ~~минимальн~~ скорости на трассах это $\frac{15}{7}$ км/мин, $\frac{25}{11}$ км/мин, $\frac{40}{17}$ км/мин.

За 85 минут он проехал минимум: $\min(\frac{15}{7}\cdot 85, \frac{25}{11}\cdot 85, \frac{40}{17}\cdot 85)$ ~~км/мин)~~ км$= 182\frac{1}{7}$ км, а максимум: $\max\left|\frac{15}{7}\cdot 85, \frac{25}{11}\cdot 85, \frac{40}{17}\cdot 85\right|$ км $= 200$

т.к. длина каждой дуги 5, и для того чтобы вернутся в A ему надо проехать $x\cdot \overset{AC}{40} + y(AB+BC)$ $+ y(AB+BC) + Z\cdot AB + P\cdot BC$, где $x, y, Z, P \in \mathbb{Z}$, Z и P чётные,

$= 40x + 40y + Z\cdot\overline{15} + P\cdot\overline{25}$, что является числом делящимся на 10,

значит он мог проехать либо 190, либо 200 км.

~~Пример на 200км: он всё время едет по~~

Если он едет 200км, он должен всё время ехать по дуге AC, то есть $\frac{200км}{40км} = 5$ раз, после чего он окажется в точке C $\Rightarrow$ он не мог проехать 200км.

Пример на 190: $A \to B \to C \to B \to A \to B \to C \to A \to B \to A$

Ответ: 190км

№3

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y)\,|y - x - 9| = (x-4)\,|xy - 3 + 3x - y| \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4 \end{cases}$$

ОДЗ: $y - 4 \geq 0$, $y \geq 4$

$y - x + 9 \geq 0$

$$\begin{cases} (x-1)(y+3)\,|y - x - 9| = (x-4)\,|(x-1)(y+3)| \\ y - x + 9 = y^2 - 8y + 16 \end{cases}$$

т.к. $y \neq -3$, т.к. $y + 3 \geq y \geq 4 > 0$

$$\begin{cases} (x-1)\,|y - x - 9| = (x-4)\,|x-1| \\ y^2 - 9y + 7 + x = 0 \end{cases}$$

$\frac{15}{7}$ $\frac{25}{11}$ $\frac{40}{17}$

850+425

1275 | 7
7 | 182
57
-56
15
1

$\frac{15}{7} \cdot 85 = \frac{1275}{7}$ ---182,183

850
1700
425

$\frac{25}{11} \cdot 85 = \frac{2125}{11}$ 193, 194

2125 | 11
-11 | 193
102
-99
35

$\frac{40}{17} \cdot 85 = \frac{3400}{17} = 200$

200

185 200

185

190 195

185

185 185

5 мин

17

Апелляцию удовлетворить
Повысить на 4 балла. Новая
оценка 56 баллов
Е.Н. Хайлов
А.Б. Хрущенко

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Ломоносов" Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему
От участника заключительного этапа по профилю „Математика" Андрианова Фёдора Алексеевича

апелляция.

Прошу пересмотреть мой индивидуальный предварительный результат заключительного этапа, а именно 52 балла, поскольку считаю, что задача №7 решена мной верно в общем виде (через сочетания), арифметическая ошибка возникла в процессе вычисления и должна быть оценена в 8 баллов, в соответствии с предложенными по критериям проверки.

Подтверждаю, что я ознакомлен с Положением об апелляциях на результаты олимпиады школьников „Ломоносов" и осознаю, что мой индивидуальный предварительный результат может быть изменён, в том числе в сторону уменьшения количества баллов.

Дата 23.03.2024