



47-57-45-94
(40.34)



14:17 60109
14:19 8769

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Антонова Кирилла Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» 02 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	0	12	12	12	12	8	0	68

Черновик

$$3. \begin{cases} |17x-5+2y-9| |y-x-9| = (x-4) |17x-5+2y-9| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases}$$

$y \geq 4$

$9999 \cdot 9 \cdot 2 = (10^{10} - 1) \cdot 2 =$

$= 199 \dots 98$

~~$x^2 + 17x - 4 = 0$~~
 ~~$x^2 + 17x - 4 = 0$~~
 $x(y+5) - (17x+9) = (x-4)(17x+9) = 0$

$$\begin{cases} (x-1) |y-x-9| = (x-4) |x-1| |17x+9| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases}$$

р.к. $y+5 > 0$

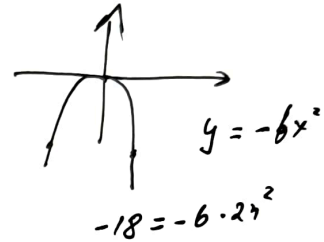


I $x \leq 1$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \sqrt{y-8} = y-4 \end{cases} \begin{cases} y-8 = y^2 - 8y + 16 \end{cases}$$

$y^2 - 8y + 16$

$\Delta = 81 - 96 < 0 \Rightarrow \text{нет решений}$



II $x \geq 4$

$$(x-1) |y-x-9| = (x-4) |x-1| \quad x-1 > 0$$

$$\begin{cases} |y-x-9| = x-4 \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases} \begin{cases} |y-x+9-18| = x-4 \\ y-x+9 = y^2 - 8y + 16 \end{cases}$$

$|y-x-9| = x-4 \Rightarrow x \geq 4 \quad t^2 = y-x+9 \quad x-y = 9-t^2$

$$\begin{cases} |y-x-9| = x-4 \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases} \begin{cases} |y-x-9| - \sqrt{y-x+9} = 2x-8 \\ |t^2-18| - t = 2x-8 \end{cases}$$

a) $t \in [\sqrt{18}; +\infty)$
 $2t^2 - t - 27 = 2x - 8 \Rightarrow t = \frac{1 + \sqrt{217}}{2}$
 $\sqrt{y-x-9} = \frac{1 + \sqrt{217}}{2} = y-4$

b) $t \in [0; \sqrt{18}]$

$18 - t^2 - t = 2x - 8 \quad 18 - t = 9$

$2t^2 + t - 27 = 0 \quad t = 9$
 $\Delta = 1 + 216 = 217$
 $t = \frac{-1 + \sqrt{217}}{2}$
 $\frac{-1 + \sqrt{217}}{2} > \sqrt{18} \Rightarrow \text{нет}$

$t = \frac{-1 + \sqrt{217}}{2} > \sqrt{18} \Rightarrow \text{нет}$

$t = \frac{-1 - \sqrt{217}}{2} < 0 \Rightarrow \text{нет}$

III $x < 1$

$$109 - 6 = \frac{101}{8} = -\frac{108 \frac{2}{12}}{\frac{25}{7}}$$

Черковник

$$|y - x - 9| = -(y-1)(x-4)$$

$$\begin{cases} |y - x - 9| = 4 - x \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4 \end{cases}$$

$$22 - 13 = 9 \neq 0$$

$$59 + 3 = 62 \neq 13 \Rightarrow f(x) = \frac{y}{x} \text{ (??)}$$

$$|y - x - 9| + \sqrt{y - x + 9} = y - x$$

$$f'(x) = \frac{x}{1024} - \frac{1023}{528}$$

$$\begin{aligned} y - x > 9 > 0 \\ x < 9 + y < 9 \end{aligned}$$

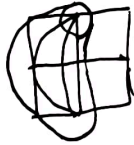


- 0 умбрсаи $3 \cdot \frac{5 \cdot 7}{2} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7}{2} = 10 \cdot 4 \cdot 7$
- 1 умбрсаи $3 \cdot 3 \cdot 0.5 \cdot \frac{0.8 \cdot 7}{1} = 5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 = 280 \cdot 3$
- 2 умбрсаи $5 \cdot 3 \cdot \frac{1 \cdot 6 \cdot 5}{1} = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 =$

9.8.7.5

$$\begin{array}{r} \times 72 \\ \times 504 \\ \hline 2520 \end{array}$$

$$\frac{165}{315}$$



$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(12) =$$

$$f' = \frac{1}{1024}$$

$$S = S_1 - S_2 \quad S_1 = \frac{\pi R^2}{2} = 0.5\pi$$

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 2}{4} - 1$$

$$\begin{aligned} AB &= 15 \\ BC &= x \end{aligned}$$

$$147 = 12 \cdot 12 = \frac{3^2 \cdot 2^4}{12} = 28 \quad S = 0.5\pi - (0.5\pi - 1) = 1$$

$$V =$$

$$AB = 15 = \pi R_1$$

$$BC = 25 = \pi R_2$$

$$AC = \pi(R_1 + R_2) = 40$$

$$15x + 11y + 12z = 85 = 5 \cdot 17$$

~~z=0~~

$$z = 5 \quad x = y = 0 \quad X$$

z=4

$$85 - 4 \cdot 17 = 17 = 15x + 11y$$

z=3

$$15x + 11y = 54$$

$$\begin{aligned} x=0 \quad 11y &= 54 \\ x=1 \quad 11y &= 39 \\ x=2 \quad 11y &= 24 \end{aligned}$$



числовых

3.
$$\begin{cases} (xy-3+3x-y) |y-x-9| = (x-4) |xy-3-3x-y| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } y \geq 4$$

$(x-1) |y+3| |y-x-9| = (x-4) |y+3| |x-1| \quad \text{т.к. } y+3 > 0$

I $x=1$

$$\begin{cases} 0=0 \\ \sqrt{y+8} = y-4 \end{cases} \quad \begin{cases} y+8 = y^2 - 8y + 16 \end{cases}$$

$$y^2 - 9y + 8 = 0$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = 8$$

$$x_1 = 1 \quad y_1 = 8$$

II $x > 1$

$$(x-1) |y-x-9| = (x-4) |y-1|$$

$$\begin{cases} |y-x-9| = x-4 \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases} \quad \begin{cases} |y-x-9| = \sqrt{y-x+9} = x-y \\ \sqrt{y-x+9} = t; t \geq 0 \end{cases}$$

$$|t^2 - 18| - t = 9 - t^2$$

a) $t \in [0; \sqrt{18}]$

$$18 - t^2 - t = 9 - t^2$$

$$t = 9$$

$$t > \sqrt{18} \Rightarrow \text{не подходит}$$

b) $t \in (\sqrt{18}; +\infty)$

$$t^2 - 18 - t = 9 - t^2$$

$$2t - t - 27 = 0$$

$$D = 1 + 27^2 = 217$$

$$t = \frac{1 + \sqrt{217}}{2} < \sqrt{18}$$

$$\frac{1 + \sqrt{217}}{4} \quad ? \quad \sqrt{18}$$

$$\frac{1 + 15}{4} = 4$$

$$t = \frac{1 - \sqrt{217}}{2} < 0 \text{ - не подходит}$$

III $x < 1$

$$(x-1) |y-x-9| = (x-4) |1-x|$$

$$\begin{cases} |y-x-9| = 4-x \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases} \quad \begin{cases} |t^2 - 18| + t = t^2 - 9 \\ \sqrt{y-x+9} = t; t \geq 0 \end{cases}$$

a) $t \in [0; \sqrt{18}]$

$$-t^2 + 18 + t = t^2 - 9$$

$$2t^2 - t - 27$$

$$t = \frac{1 + \sqrt{217}}{4} - 9 \quad t = \frac{1 - \sqrt{217}}{4} - \text{не подходит}$$

$$y-4 = \frac{-1 + \sqrt{217}}{4} \quad y = \frac{15 + \sqrt{217}}{4}$$

числовик

$$y - x + 9 = t^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right)^2$$

$$x = 9 + \frac{15 + \sqrt{17}}{4} - \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right)^2 = \frac{51 + \sqrt{17}}{4} - \left(\frac{218 - 2\sqrt{17}}{16}\right) =$$

$$= 12 + \frac{5 + \sqrt{17}}{8} - \frac{109 - \sqrt{17}}{8} = 12 - 12 + \frac{3\sqrt{17} - 7}{8} \quad f$$

$$x = \frac{3\sqrt{17} - 7}{8} \quad f > 1 \Rightarrow \text{нужно}$$

б) $t \in (\sqrt{18}; +\infty)$

$$x^2 - 18x + 9 = x^2 - 9$$

$$t = 9$$

$$y - 4 = 9 \quad y = 13$$

$$y - x + 9 = t^2 = 81$$

$$x = 13 + 9 - 81 = -59$$

$$x_2 = 59; y_2 = 13$$

Ответ: (1; 8); (-59; 13)

1. рассмотрим 3 варианта:

I $3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 6} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520$
 в р. 345 345 345 f^{10}

II 345 345 1 универсал

$$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 2520$$

III все 345 - универсал

$$3 \cdot 4 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 9 \cdot 7 \cdot 5 = 315$$

∪

$$\text{Всего способов } 2520 + 2520 + 315 = 5355$$

Ответ: 5355

4. $\cap A \cap B = \pi R_1 = 15$

$$\cap A \cap C = \pi (R_1 + R_2) = 40$$

$$\cap B \cap C = \pi R_2 = 25$$

нужно по формуле AB, BC и AC алгоритм проекция x, y, z раз соотв. и x, y, z - тоже там ≥ 0

47-57-45-94
(40.34)

числовик

У

$$7x + 11y + 17z = 85$$

$$z \in [0; 5]$$

$z = 5 \quad x = y = 0 \Rightarrow$ автомобиль остановился в т. С за 5 мин

$$z = 4$$

$$7x + 11y = 17$$

$$y = 1 \quad 7x = 6 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 0 \quad 7x = 17 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$z = 3$$

$$7x + 11y = 34$$

$$y = 3 \quad 7x = 1 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 2 \quad 7x = 12 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 1 \quad 7x = 23 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 0 \quad 7x = 34 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$z = 2$$

$$7x + 11y = 51$$

$y = 4 \quad 7x = 7 \quad x = 1; y = 4; z = 2$, однако в этом случае автомобиль остановился в т. В

$$y = 3 \quad 7x = 18 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 2 \quad 7x = 29 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 1 \quad 7x = 40 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 0 \quad 7x = 51 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$z = 1$$

$$7x + 11y = 68$$

$$y = 6 \quad 7x = 2 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 5 \quad 7x = 13 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 4 \quad 7x = 24 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 3 \quad 7x = 35 \quad x = 5; y = 3; z = 1$$

- удовлетворяет $(AB \times 5; AC \times 2; AC) \Rightarrow A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C \quad C \Rightarrow A$

$$\Rightarrow S = 5 \cdot 15 + 5 \cdot 25 + 40 = 190 \text{ км}$$

$$y = 2 \quad 7x = 46 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 1 \quad 7x = 57 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 0 \quad 7x = 68 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$z = 0$$

$$7x + 11y = 85$$

$$y = 7 \quad 7x = 8 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 6 \quad 7x = 19 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 5 \quad 7x = 30 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 4 \quad 7x = 41 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 3 \quad 7x = 52 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 2 \quad 7x = 63 \quad x = 9 \Rightarrow$$

$$y = 1 \quad 7x = 74 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$y = 0 \quad 7x = 85 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

\Rightarrow автомобиль остановился в В - минут

Ответ; $S = 190 \text{ км}$

Числовик

$$5. \quad \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = \pm \quad \frac{1}{x-1} = \frac{t-1}{2} = \frac{t+1}{2} - 1$$

$$g_1 = f(\pm) = \frac{t-1}{2}$$

$$f \circ f(1+t) = f\left(\frac{t-1}{2}\right) = \frac{\frac{t-1}{2} - 1}{\frac{t-1}{2} + 1} = \frac{t-3}{t+1}$$

$$g_2 = f(f(t)) = f\left(\frac{t-1}{2}\right) = \frac{\frac{t-1}{2} - 1}{\frac{t-1}{2} + 1} = \frac{t-3}{t+1}$$

$$g_3 = f(f(f(t))) = f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{\frac{t-3}{t+1} - 1}{\frac{t-3}{t+1} + 1} = \frac{t-4}{t}$$

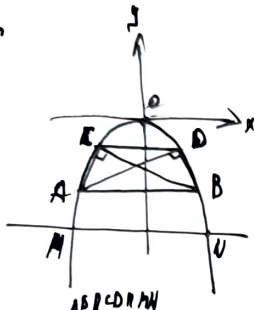
...

$$g_{1023} = f(f \dots f(t)) = \frac{t+1}{1024} - 1 = \frac{t}{1024} - \frac{1023}{1024}$$

$$tg \alpha = f'(x_0) = \frac{1}{1024}$$

$$Отв: tg \alpha = \frac{1}{1024}$$

6



возьмем в с.о. - каноническую параболу; ось $Ox \parallel$ полу

$$y = -bx^2 \quad x = \pm \sqrt{\frac{y}{b}}$$

$$M(-\frac{24}{2}; -18) \quad N(\frac{24}{2}; -18)$$

$$-18 = -b \cdot 12^2 \quad b = \frac{1}{8}$$

т.к. $EA = B$, C и D - на одной высоте \Rightarrow

$$A(-\sqrt{-8y_1}; y_1) \quad B(\sqrt{-8y_1}; y_1)$$

$$C(-\sqrt{-8y_2}; y_2) \quad D(\sqrt{-8y_2}; y_2)$$

$$\vec{BD} = \{\sqrt{-8(y_2 - y_1)}; y_2 - y_1\}$$

$$\vec{AD} = \{\sqrt{-8(y_2 + y_1)}; y_2 - y_1\}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{BD} = 8 \cdot (\sqrt{-y_2} - \sqrt{-y_1})(\sqrt{-y_2} + \sqrt{-y_1}) + (y_2 - y_1)^2 = 0 \quad \text{т.к. } \cos \alpha = 0$$

$$8 \cdot (-y_2 - (-y_1)) + (y_2 - y_1)^2 = 0$$

$$-8(y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)^2 = 0$$

1. $y_1 = y_2$, тогда т. А и С, В и D совпадают - вырожден

2. $y_2 - y_1 = 8$, это и является расстоянием между балками

$$8. \quad A(3; 4; 5) \quad B(11; 10; 6) \quad C(15; 8; 9)$$

$$\vec{AB}(8; 6; 1) \quad \vec{AC}(12; 4; 4)$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ 8 & 6 & 1 \\ 12 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad (x-3) \cdot 20 - (y-4) \cdot 20 + (z-5) \cdot 20 = 0 \quad /: 20$$

$$2x - 6 - 3y - 12 + 2z - 10 = 0$$

листовик

$$2x - 3y + 2z = 28 = 0$$

$$(x-3) + (y-4) + (z-5) = 0$$

$$(x-1) + (y-1) + (z-6) = 0$$

$$(x-5) + (y-9) + (z-6) = 0$$

м-тв ABC: $2x - 3y + 2z = 28 = 0$

$$rD = \frac{aA + bB + cC}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$a, b, c = \text{нужно}$
 $a, b, c = \text{нужно}$

2.

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi \cdot 1}{2} - \left(\frac{\pi \cdot 2}{4} - \frac{1 \cdot 2}{2} \right) = 1$$



площадь S = 1



7. $n = \underbrace{9999 \dots 99}_{100}$

$S(n) = 999 \dots 900$

$$S(mn) = \underbrace{9 \dots 9}_{(m-1)} \cdot m = (10^{m-1} - 1) \cdot m = m \cdot 10^{m-1} - m$$

$$= \underbrace{m^{101}}_{(m-1) \cdot 9 \dots 9} - 1 - (m-1) = 900 + m - 1 - (m-1) = 900$$

$$\underbrace{(m-1) \cdot 9 \dots 9}_{100} \quad S(m-1) = 900 + (m-1)$$

ч.т.р.

8. A(5; 4; 15) B(11; 10; 6) C(5; 8; 9)

$\vec{AB} \{ 6; 6; 1 \}$ $\vec{AC} \{ 2; 4; 4 \}$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-5 \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

м-тв ABC: $2x - 3y + 2z = 28$