0 252390 860003

25-23-90-86
(40.59)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

+1 лист
Веселов

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Артемова Романа Артемовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	4	8	12	12	12	12	0	64

64 (шестьдесят четыре) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

25-23-90-86
(40,59)

Чистовик

Задача 1

0) Без „универсалов":

$$C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = 2 \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 2 \cdot 6 \cdot 35 = \boxed{420}$$

1) 1 универсал:

ун. = вр.; ун. = защ. ун = нап.

$C_4^2 + C_7^3 = 41$

$C_2^1 + C_4^1 + C_7^3 = 2 + 4 + 35 = 41$

$C_2^1 + C_4^2 + C_7^2 = 2 + 6 + 21 = 29$

2) 2 универсала:

• ун. = вр. и ун. = защ:

$1 + C_4^1 + C_7^3 = 1 + 4 + 35 = 40$

• ун. = вр. и ун. = нап.:

$1 + C_4^2 + C_7^2 = 1 + 6 + 21 = 28$

• ун. = защ. и ун. = защ.:

$C_2^1 + C$

1) 1 универсал:

ун = защ.:

$C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^3 = 2 \cdot 4 \cdot 35 = 280$

ун = нап:

$C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = 2 \cdot 6 \cdot 21 = 252$

Выбрать 1 ун. из 3: C_3^1

~~Итого: $C_3^1 \cdot (41 + 29) = 3 \cdot 70 = \boxed{210}$~~

2) 2 универсала:

• 2 ун. = 2 защ.:

$C_2^1 \cdot \varphi \cdot C_7^3 = 2 \cdot 35 = 70$

• 2 ун. = 2 нап: $C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^1 = 2 \cdot 6 \cdot 7 = 84$

Чистовик

• уп = защ. и уп = нап:

$C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^2 = 2 \cdot 4 \cdot 21 =$

~~Итого:~~ $\cancel{C_3^2 \cdot (37 + 15 + 27) = 3 \cdot (64 + 15) = 3 \cdot 79 = \boxed{237}}$

3) 3 уп.:

• 3 уп = 3 нап: $C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot 1 = 2 \cdot 6 =$

• 2 уп = 2 нап и 1 уп = защ: $C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^1 = 2 \cdot 4 \cdot 7 =$

• уп = нап и 2 уп = 2 защ: $C_2^1 \cdot 1 \cdot C_7^2 = 2 \cdot 21$

4) Итого:

$2 \cdot 6 \cdot 35 + 3 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 35 + 2 \cdot 6 \cdot 21) + 3 \cdot (2 \cdot 35 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 21) + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 21 =$

$= 7(2 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3) + 12 = 7(6(2 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 1) + 8) + 12 = 7 \cdot (6 \cdot (10 + 20 + 12 + 5 + 6 + 12 + 1) + 8) + 12 =$

$= 7 \cdot (6 \cdot (30 + 30 + 6) + 8) + 12 = 7 \cdot (6 \cdot 66 + 8) + 12 =$

$= 7 \cdot (396 + 8) + 12 = 7 \cdot 404 + 12 = 2828 + 12 = 2840$

Ответ: 2840

Задача 4

1 час 35 мин = 95 мин

Пусть автомобиль проехал a дуг BC; b дуг AC и c дуг AB. Тогда:

$a \cdot 13 + b \cdot 19 + c \cdot 5 = 95$

Переберем все варианты $(a, b, c \in \mathbb{N})$

Пусть $b = 5$, тогда $a = 0$ и $c = 0$. Но авто не ока-

Чистовик

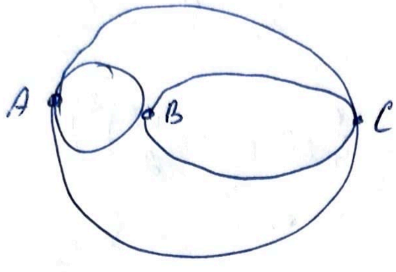
ится в A. Противоречие:

$b=4$: $a\cdot 13+c\cdot 5=19$ не имеет решения

$b=3$: $a\cdot 13+c\cdot 5=38$

$a=1$ и $c=5$

Пример:



Сразу 5 дуг AB,
авто из т. A → т. B.;
одну дугу BC: B → C
три дуги AC: C → A.
получилось!

Километры:

$5\cdot 13+27\cdot 1+3\cdot l=65+27+3l=92+3l$, где l – длина дуги AC

$b=2$: $a\cdot 13+c\cdot 5=57$

$a=4$ и $c=1$ не получается

других решений нет

$b=1$: $a\cdot 13+c\cdot 5=76$

~~????~~

$a=2$ и $c=10$ не получается

$b=0$: $a\cdot 13+c\cdot 5=95$

$a=0$ $c=19$ не получается

$a=5$ $c=6$ не получается.

Имеем всего один вариант. Осталось найти длину дуги AC:

$\pi r_{AB}=13$ $\pi r_{BC}=27$

$r_{AC}=r_{AB}+r_{BC}=\frac{40}{\pi}$

$l=\pi r_{AC}=40$

Тогда ответ: $92+3\cdot 40=92+120=212$

Ответ: 212

Чистовик Задача 21.

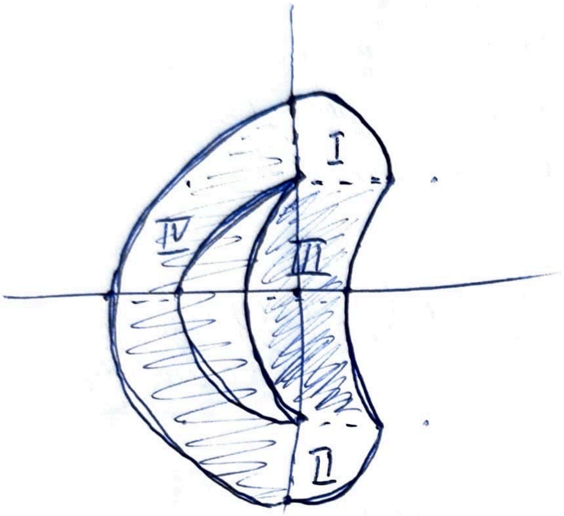
Понятно, что дуги окружностей просто вырастут. Ну а в крайних точках будут четвертинки окружностей:

$$S = S_{I} + S_{II} + S_{III} + S_{IV} =$$

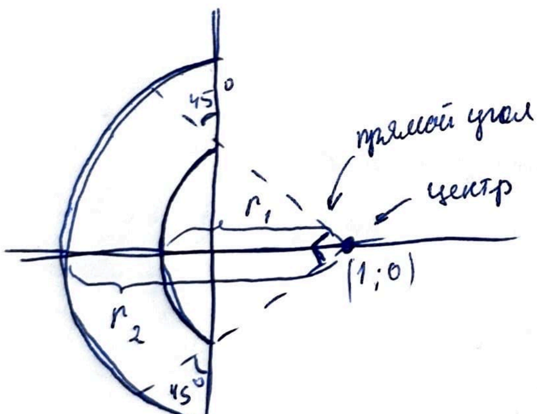
$$= \frac{1}{4} \cdot 2\left(\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) +$$

$$+ 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{IV} =$$

$$= \frac{1}{4}\pi + \sqrt{2} + S_{IV}$$



Подробнее изучим IV:



$$r_1 = \sqrt{2}; \quad R_2 = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{IV} = \frac{1}{4}\left(\pi r_2^2 - \pi r_1^2\right) +$$

$$+ 2 \cdot \frac{45}{360} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\pi\left(\frac{9 \cdot 2}{4} - 2\right) + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{5}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Итого: $S = \frac{1}{4}\pi + \sqrt{2} + \frac{3}{4}\pi = \pi + \sqrt{2}$

Ответ: $\pi + \sqrt{2}$

Чистовик

Задача 5

Пусть $t=\frac{x+2}{x-2}$: $tx-t\cdot 2=x+2$

$$x(t-1)=2t+2$$

$$x=\frac{2t+2}{t-1}=2\cdot\frac{t+1}{t-1}$$

$$f(t)=\frac{2}{2\cdot\frac{t+1}{t-1}-2}=\frac{1}{\frac{t+1}{t-1}-1}=\frac{1}{\frac{t+1-t+1}{t-1}}=\frac{t-1}{2}$$

Выходит, что $\boxed{f(x)=\frac{x-1}{2}}$!

$$f(f(x))=\frac{f(x)-1}{2}=\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2}=\frac{\frac{x-1-2}{2}}{2}=\frac{x-3}{4}$$

$$f(f(f(x)))=\cancel{f}=\frac{\frac{x-3}{4}-1}{2}=\frac{\frac{x-3-4}{4}}{2}=\frac{x-7}{8}$$

Заметим, что $\underbrace{f(f\ldots f(x))}_{n}=\frac{x-(2^n-1)}{2^n}$

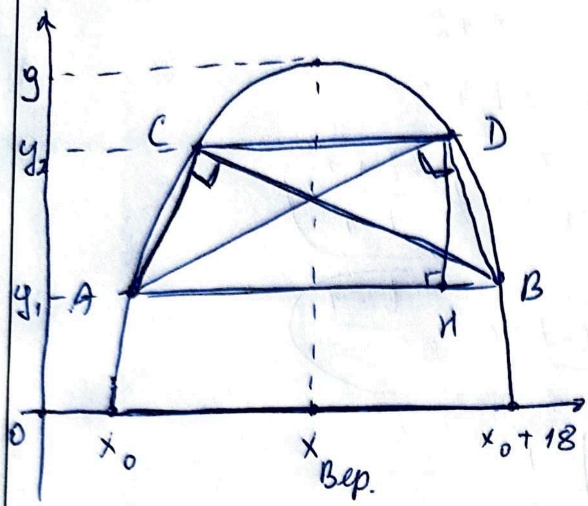
При $n=12$:

$$\underbrace{f(f\ldots f(x))}_{12}=\frac{x-(2^{12}-1)}{2^{12}}=\frac{1}{2^{12}}\cdot x-\mathrm{const}$$

функция линейная, поэтому тангенс наклона везде одинаков и равен $\frac{1}{2^{12}}$

Ответ: $\frac{1}{2^{12}}=\frac{1}{4096}$

Чистовик | Задача 6



Найти : $y_2 - y_1 = ? = h$

Пусть ~~$x_0 = 0$~~ $x_0 = -9$

Найдём $y(x)$.

~~$x_{вер} = 9$ / в силу симметрии~~

~~$0 = a - b \cdot 0$, $a = 0$~~

~~$9 = a - b \cdot x_{вер}^2$~~

~~$9 = 0 - b \cdot 81 \to b = -1$~~

Тогда $x_{вер} = 0$.

$9 = a - b \cdot 0$ $\quad a = 9$

$0 = a - b \cdot x_0^2$ $\quad b = \frac{a}{x_0^2} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$ $\quad \boxed{y(x) = 9 - \frac{1}{9}x^2}$

Пусть точки имеют координаты: $A(x_A ; y_1)$; $C(x_C ; y_2)$

$B(x_B ; y_1)$; $D(x_D ; y_2)$

Тогда верно: 1) $y_2 = 9 - \frac{1}{9} \cdot x_D^2$

2) $y_1 = 9 - \frac{1}{9} \cdot x_B^2$ / $y_1 = 9 - \frac{1}{9} \cdot x_A^2$

3) Т.н. Пифагора $\triangle ADB$:

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_D - x_A)^2} + \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_D - x_B)^2}$$

Пусть $x_B = l$; $x_D = d$; тогда $x_A = -l$ и $x_C = -d$

Имеем:

$$\begin{cases} 2l = \sqrt{h^2 + (d+l)^2} + \sqrt{(h^2) + (l-d)^2} \\ y_2 = 9 - \frac{1}{9} \cdot d^2 \\ y_1 = 9 - \frac{1}{9} \cdot l^2 \end{cases} \to h = y_2 - y_1 = \frac{1}{9}(l^2 - d^2) \quad (*)$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

разных степеней 10, ~~то~~ сумма правой части не изменяется.
Там, где начинается значащая часть у числа $10^i \cdot a_i \cdot n$, у него стоят или 9, или ~~10~~ $(a_i - 1)$ и $(10 - a_i)$
При сложении обязательно будет переход ч/з десятки. А он дает изменение в сумме на 9 очков.
При сложении числа с 9; пусть это число p:
$9 + p = \overline{1(p-1)}$. ~~Анало~~ Но из-за $a_i - 1$ и $10 - a_i$ не происходит потери в общей сумме, т.к. у нас только 9 + число.

Из этого следует, что

$$S(mn) = S(a_0 n + \cancel{8}) \cdot 10 \cdot a_1 + \ldots n \cdot 10^k \cdot a_k) =$$
$$= S(n)$$ чтд

~~Треугольник DHB: Th Пифагора~~ $\boxed{\text{Чистовик}}$

$\cancel{DB^2 = DH^2 + HB^2}$

$\cancel{(y_2-y_1)^2+(l-d)^2=}$

$\triangle ADH \sim \triangle ABD$:

$$\frac{DH}{DB}=\frac{AD}{AB}=\frac{AH}{AD}$$

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+(l-d)^2}}=\frac{\sqrt{h^2+(l+d)^2}}{2l}=\frac{d+l}{\sqrt{h^2+(l+d)^2}}$$

$$\frac{h^2}{h^2+(l-d)^2}=\frac{h^2+(l+d)^2}{4l^2}=\frac{(d+l)^2}{h^2+(l+d)^2}$$

Тогда преобразуем (*):

$$h^2=\frac{1}{81}\cdot(l-d)^2(l+d)^2$$

Пусть $l-d=x$ и $l+d=y$

Имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{h^2}{h^2+x^2}=\dfrac{h^2+y^2}{4l^2}=\dfrac{y^2}{h^2+y^2}\\ h^2=\dfrac{1}{81}\cancel{(l-d)^2}=\dfrac{1}{81}\cdot x^2\cdot y^2\end{cases}$$

$$\frac{h^2}{h^2+\frac{81h^2}{y^2}}=\cancel{\frac{4l^2}{4l^2}}=\frac{\frac{81h^2}{x^2}}{h^2+\frac{81h^2}{x^2}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{81}{y^2}}=\frac{1}{\frac{x^2}{81}+1}\to\frac{81}{y^2}=\frac{x^2}{81}\to\boxed{xy=81}\ !$$

$$h=\frac{1}{9}\cdot xy=\frac{1}{9}\cdot 81=9$$

Ответ: 9

Чистовик

Задача 3

$$\begin{cases} ((x-1)(y+2)) \cdot |y-x-10| = (x-4) \cdot |(x-1)(y+2)| & \text{I} \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 & \text{II} \end{cases}$$

Из II: $y-5 \geq 0$, т.е. $y+2 > 0$!

При $x-1 \geq 0$:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} |y-x-10| = (x-4) \\ x = 1 \\ y = -2 \end{array}\right. \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

Проверим частные:

$x=1$: $\sqrt{y+7} = y-5$

$y+7 = y^2 - 10y + 25$

$y^2 - 11y + 18 = 0$

$y_1 = 2$ $\quad y_2 = 9$ ← подходит

Решение $(1; 9)$

$y=-2$: $\sqrt{-x+6} = -7$ ← не имеет решения

~~при~~

при $x-1 \geq 0$: $(x \geq 1)$

$$\begin{cases} |y-x-10| = x-4 \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

- $y-x+8 \geq 0$ $\quad y \geq x-8$ $\quad y \geq -7$
- $y-5 \geq 0$ $\quad y \geq 5$ $\quad y \geq 5$ → $y \geq 5$
- $x-4 \geq 0$ $\quad x \geq 4$

при $y-x-10 \geq 0$: (Чистовик)

$$\begin{cases} y-x-10 = x-4 \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x+6 \\ \sqrt{2x+6-x+8} = 2x+6-5 \end{cases}$$

$\sqrt{x+14} = 2x+1$

$x+14 = 4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-13=0$

$D = 9+4\cdot4\cdot13 = 9+16\cdot13 = 217$

$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$

Очевидно, что $x_1 = \frac{-3-\sqrt{217}}{8}$ не подходит

$x_2 = \frac{-3+\sqrt{217}}{8} < \frac{-3+15}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Получили ограничение $x \geq 4$, не подходит

при $y-x-10 \leq 0$:

$$\begin{cases} y-x-10 = 4-x \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 \\ \sqrt{6-x+8} = 1 \end{cases}$$ $y=6 \quad x=13$ ← подходит

при $x-1 \leq 0$: $(x \leq 1)$

$$\begin{cases} -|y-x-10| = (x-4) \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

~~при $y-x-10 \geq 0$:~~

- $y-x+8 \geq 0$ $\quad y \geq x-8$
- $y-5 \geq 0$ $\quad y \geq 5$
- $x-4 \leq 0$ $\quad x \leq 4$

Чистовик

при $y - x - 10 \geq 0$:

$\begin{cases} y - x - 10 = 4 - x \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 6 \\ \sqrt{6 - x + 8} = 1 \end{cases}$ $x = 13 \quad y = 6$ ← не подходит

при $y - x - 10 \leq 0$

$\begin{cases} y - x - 10 = x - 4 \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ \sqrt{2x + 6 - x + 8} = 2x + 6 - 5 \end{cases}$

$\sqrt{x + 14} = 2x + 1$

$x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{217}}{8}$ ← подходит

$y_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{217}}{4} + 6 = \dfrac{21 - \sqrt{217}}{4} < 5$ ← не подходит.

$x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{217}}{8} > 1$ ← не подходит.

Ответ: $(1; 9)$ $(13; 6)$ ~~$\left(\frac{-3-\sqrt{217}}{8}; \frac{21-\sqrt{217}}{4}\right)$~~

Задача 7

- Рассмотрим подзадачу проще. Пусть $n \in [1; 9]$

Видно, что условие выполняется только при $n = 9$

- Двузначное: $n = 10 \cdot a_1 + a_2$ (разложим по разрядам)

Заметим, что $n = 99$ - подходит.

Гипотеза: пусть $n = \underbrace{99 \ldots 99}_{90 \text{ раз}}$

Пусть есть произвольное m. Пусть $m = a_0 + 10 \cdot a_1 + \ldots 10^k \cdot a_k$

Разложим ~~m~~ m по разрядам.

Пусть $a_k \neq 0$, а $a_0, a_1 \ldots = 0$

В таком случае:

$m \cdot n = a_k \cdot n \cdot 10^k$

Очевидно, что $S(a_k\, n) = S(a_k n \cdot 10^k)$

Докажем, что $S(a_k \cdot n) = S(n)$

$S(n) = 90 \cdot 9$

Если $a_k = 1$ всё очевидно.

Если $a_k > 1$: (a_k – однозначное)

Каждый разряд сделает „шаг."

$a_k = 2$:

$$\begin{array}{r} \times\ 99\ldots9 \\ 2 \\ \hline 19\ldots98 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 99\ldots9 \\ 3 \\ \hline 2\ldots997 \end{array}$$

$a_k = 3$

И так для каждого a_k.

Теперь рассмотрим общий случай.

Пусть $a_1, a_2, \ldots a_k$ – любые от 1 до 9

Доказано, что $S(n a_i) = S(n)$, где $i \in \{0; 1; 2 \ldots; k\}$

~~Получим~~ $S(nm) = S(n(a_0 + a_1^{\cdot 10} \ldots + a_k^{\cdot 10^k})) = \cancel{S(na_0 + \ldots + na_k)} =$

~~Рассмотрим~~ $= S(n a_0 + n a_1 \cdot 10 + \ldots + n a_k \cdot 10^k)$

Что происходит при сложении na_0 и $10 \cdot n a_1$:

$$\begin{array}{r} + \ (a_0 - 1)\, 99 9 \ldots 9 (10 - a_0) \\ (a_1 - 1)\ 9 \ldots 9 9 (10 - a_1)\ 0 \\ \hline (a_1 - 1)(8 + a_0) 9 \ldots 9 9 (9 - a_1)(10 - a_0) \end{array}$$

Если $a_0 \neq 1$, то: ~~$10 \cdot n a_1 + n a_0 = (a_1 - 1) 99 \ldots 9 (9 - a_1) \cdot 9$~~

то $10 n a_1 + n a_0 = (a_1)(a_0 - 1)\, 99 \ldots 9\, (9 - a_1)(10 - a_0)$

Понятно, что сумма не изменилась

При аналогичном движении из-за

сдвига, который образуется из-за

Черновик

$\times \frac{66}{6}$ $\quad 396$

$\sqrt{2} - 1 = 0,4 < 0,5$

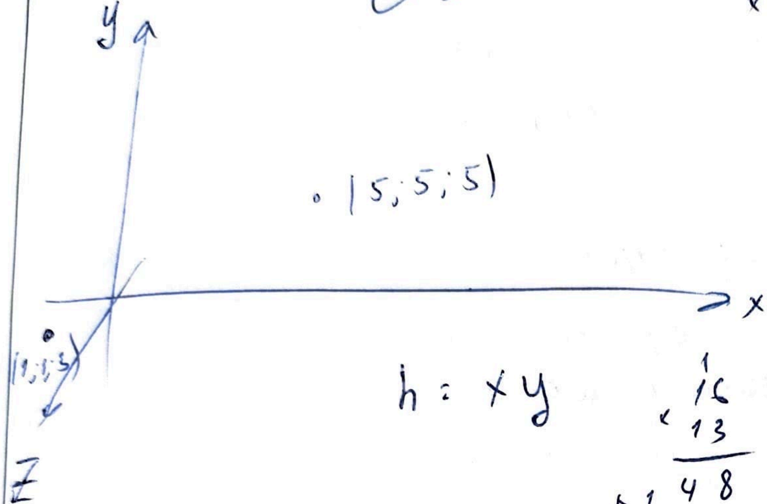
$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,4} > 0,5$

$x(y+2) - 1(y+2) =$

$= (x-1)(y+2)$

$y - 5 \geq 0$

$y + 2 > 0$



$h = xy$

16×13: 48, 16, 208

99×56: 594, 495, 5544

$(7;2;11)$

$x = \frac{-3-\sqrt{217}}{8}$; $\quad y = \frac{21-\sqrt{217}}{4}$

$\sqrt{\frac{21-\sqrt{217}}{4} + \frac{3+\sqrt{217}}{8} + 8} = \frac{21-\sqrt{217}}{4} - 5$

$\sqrt{\frac{42-2\sqrt{217}+3+\sqrt{217}+64}{8}} = \frac{21-\sqrt{217}}{4} - 5$

$\sqrt{\frac{109-\sqrt{217}}{8}} = \frac{21-\sqrt{217}}{4} - 5$

$1293 + 3960 = 4253$ $\quad = 18$

$999 \times 22 = 199800$ $\quad 999 \times 3 = 2997$

$21 - 16$

$> \frac{21-\sqrt{217}}{4} - 5 > \frac{21-\sqrt{15}}{4} - 5 = \frac{6}{4} - 5 < 0$

~~31968~~

$199800 + 31968 = 231768 = 27$

$29970 + 1998 = 31968$