0 458245 270007

45-82-45-27
(40.16)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Атаяна Александра Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника
Атаян

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	−	+	+	−	+	−	60

60 (шестьдесят) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

45-82-45-27 (40.16)

5. стр. 1 Чистовик

$$\begin{cases} y = f(x) \\ f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2} \end{cases}$$

1. Обозначим $\frac{x-2}{x+2} = t$. Тогда $x = -2 \cdot \frac{t+1}{t-1}$.

2. ~~Найдем~~ Выразим $x+2$:

$x+2 = 2 - 2 \cdot \frac{t+1}{t-1} = 2\left(1 - \frac{t+1}{t-1}\right) = \frac{-4}{t-1}$.

3. Из п. 1 и п. 2 следует, что $f(t) = -\frac{2}{\left(\frac{-4}{t-1}\right)} = -2 : \left(\frac{-4}{t-1}\right) = \frac{1}{2}(t-1)$. Т.к. вместо t можно подставить любой аргумент функции, то $y = f(x) = \frac{1}{2}(x-1)$. А

4. $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, тогда $f(f(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$.

$f(f(f(x))) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{4} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{7}{4}\right) = \frac{x}{8} - \frac{7}{8}$.

Заметим, что $\frac{1}{2^3}$ - есть $tg\,\alpha$ для $f(f(f(x)))$.

Тогда $tg\,\alpha$ для $g(x) = \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}$.

Ответ: $\frac{1}{2048}$.

~~1.~~

1	2	3
ВРАТ	ЗАЩ	НАП

"шестёрка"

~~1. Заметим, что место одного вратаря мы можем выбрать только из 3 вратарей. Тогда у нас есть всего 3 вар-та выбора для вратаря.~~

2. На позициях защитника и нападающего возможн...

3 случая:

ЗАЩ ... 3 УНИВЕРСАЛА
НАП 7 ПРЕТ. + 1 УН.

НАП 7 + 2 УН.
ЗАЩ 3 УН
+
ЗАЩ 4 ПР.

ЗАЩ 4 + 0 УН.
НАП 7 + 3 УН.

Рассмотрим эти случаи подробно:

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

стр.2 Чистовик.

Случай 1. Вариантов выбрать защитника = $C_3^2 = 3$.

Вариантов выбрать нападающего = $C_8^3 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$.

Тогда всего случай 1 допускает 3·56 вариантов.

~~Случай 2. Варианты защитника~~ $\cancel{C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15}$.

~~Варианты нападающего~~ $\cancel{C_8^3 = 56}$. ~~Всего вариантов по случаю 2: 15·56.~~

Случай 2. Варианты защитника = $C_3^1\cdot C_4^1 = 12$.

Варианты нападающего $C_9^3 = \frac{9!}{3!\cdot 6!} = 84$. Всего вар.: 1008.

Случай 3. Варианты защитника = $C_4^2 = 6$.

Варианты нападающего $C_{10}^3 = 120$.

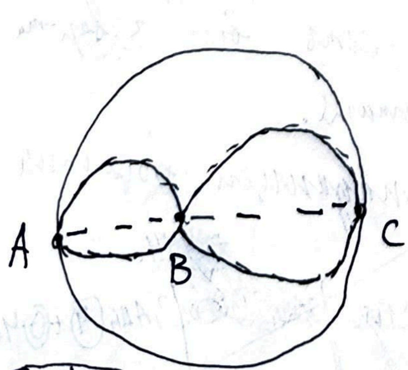
Всего вариантов: 6·120.

3. Тогда полное число способов выбрать эту „шестёрку" равно:

$$\underbrace{3}_{\text{ВРАТ.}} \cdot \underbrace{(56 + 1008 + 120\cdot 6)}_{\text{ЗАЩ.}+\text{НАП.}} = 209\cdot 45 = 9405.$$

Ответ: 9405.

4. ~~2~~



1. Рассмотрим окружность с диаметром, равным AB. Заметим, что ∪AB составляет ровно половину длины этой окружности. Тогда $C = 2\cdot \cup AB = 2\cdot 15 = 30$ км. В то же время $C = \pi\cdot D \Rightarrow D_{AB} = \frac{30}{\pi}$.

∪AB = 15 км
∪BC = 25 км

∴ Аналогично $D_{BC} = \frac{50}{\pi}$ (в окружности с ∪BC).

стр.3 Чистовик

2. D_{AC} (для самой большой окружности) $= D_{BC} + D_{AB} = \frac{80}{\pi}$.

3. Длина самой большой окружности равна $\pi \cdot D_{AC}$. Следовательно, $\pi \cdot D_{AC} = 80$. Тогда $\cup AC = \frac{80}{2} = 40$ км.

4. $t_{всего} = 60$ мин $+ 35$ мин $= 95$ мин. Таким образом, $x \cdot 19 + y \cdot 13 + z \cdot 5 = 95$, где $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Решив его, получим $x = 3$, $y = 1$, $z = 5$.

5. Теперь нам известно, сколько раз автомобиль проехал каждую из дуг. Получаем, что $\cup AC$ проехали 3 раза, $\cup BC$ – 1 раз, $\cup AB$ – 5 раз. Тогда полный путь составил $3 \cdot \cup AC + \cup BC + \cup AB \cdot 5 = 3 \cdot 40 + 25 + 5 \cdot 15 = 220$ км.

Ответ: 220 км.

~~7.~~

~~Оценим выполнимость р-ства $S(mn) = S(n)$ при $1 \leq m \leq n$ и $n, m \in \mathbb{Z}$. При $m = 1$ $S(n) = S(n)$ и р-во вып-ся. При $m \leq n$ р-во выполнится, если m кратно 10. Отметим, что допустимый случай, когда $m = n$. Из этого следует, что n тоже должно быть кратно 10. При этом, n должно быть максимально большим. Для деления достаточно, чтобы последняя цифра n равнялась нулю. Тогда искомое $n = 9 \cdot 10^{74} + 9 \cdot 10^{73} + 9 \cdot 10^{72} + \ldots + 9 \cdot 10^{2} + 9 \cdot 10 = 9(10^{74} + 10^{73} + \ldots + 10^{3} + 10^{2} + 10)$. Ответ: $9(10^{74} + 10^{73} + \ldots + 10)$.~~

стр. 4 Чистовик

7.

$S(n)$ – сумма цифр n, где $n \in N$.

Обозначим x – кол-во цифр числа $n \Rightarrow x = 75$.

Найти n_{max}: $\forall m \in [1; n]$.

верно: $S(mn) = S(n)$.

Из этого следует, что $S(2n) = S(n) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(1000n) = S(n) \Rightarrow S(n(n-2)) = S(n) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(n(n-1)) = S(n) \Rightarrow S(n^2) = S(n)$.

Рассмотрим задачу на примере с $x = 4$.

$S(n^2) = S(n)$ для $n_{max} = 9999$, $S(n) = 36$.

$9999^2 = (10000-1)^2 = 10000^2 - 20000 + 1 = 99980001$.

При этом, $S(n^2) = 36$.

$S(n(n-1)) = S(n) \Rightarrow n_{max} = 9999$.

$9998 \cdot 9999 = (999-1) \, 9999 = 9999^2 - 9999 = 99970002$.

$S(n(n-1)) = 36$.

Проверяем дальше, и получаем ту же закон-ть:

$5n = 49995$ $S(5n) = 36$.

$S(5n) = S(n)$

Аналогично, если проверить $x = 6$, получим ту же закономерность:

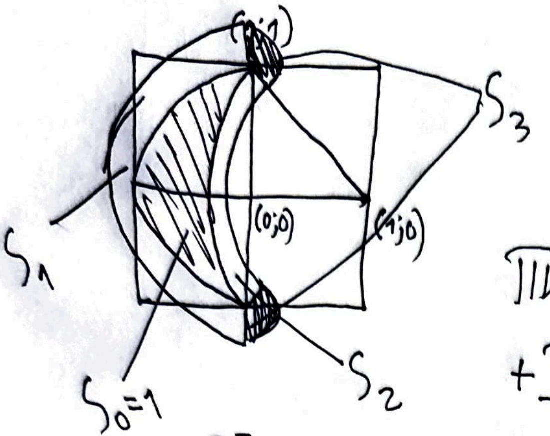
$S(n^2) = S(n)$ для $n_{max} = 999999$

Ответ: $10^{75} - 1$.

$S(5n) = S(n)$ для $n_{max} = 999999$.

Наконец, при $x = 75$: $n_{max} = \underbrace{99\ldots99}_{75 \text{ цифр.}}$

2. стр. 5 Чистовик



$$S=\overbrace{S_1+S_2+S_3}^{S_{общ.}}+S_0$$

Тогда $S_{общ.}=\dfrac{\pi\left(1+\frac{1}{4}\right)^2-\pi}{2}+$

$+\dfrac{\pi\cdot 2-\pi\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)^2}{4}+\dfrac{3}{4}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=$

$=\dfrac{\pi\cdot\frac{25}{16}-\pi}{2}+\dfrac{2\pi-\pi\left(2+\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4}+\dfrac{3}{4}\cdot\pi\cdot\dfrac{1}{16}=\dfrac{18\pi}{64}-$

$-\dfrac{\pi}{64}+\dfrac{\sqrt{2}\cdot\pi}{8}+\dfrac{3\pi}{64}=\dfrac{20\pi}{64}+\dfrac{\sqrt{2}\cdot\pi}{8}=\dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{\sqrt{2}\cdot\pi}{8}.$

Тогда $S=S_{общ.}+S_0=\dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{\sqrt{2}\cdot\pi}{8}+1.$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}+1.$

1.

$3\left(C_4^2\cdot C_7^3+C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_7^3+C_3^2\cdot C_7^3+C_4^2\cdot C_3^1\cdot C_7^2+\right.$

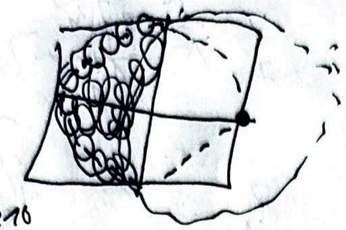
$+C_4^2\cdot C_3^2\cdot C_7^1+C_4^2\cdot C_3^3+C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_7^2\cdot C_2^1+C_1^1\cdot C_3^2\cdot C_7^2+$

$\left.+C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_7^1\cdot C_2^2\right)=3\left(6\cdot 35+4\cdot 3\cdot 35+3\cdot 35+6\cdot 3\cdot 21+\right.$

$\left.+6\cdot 3\cdot 7+6\cdot 1+4\cdot 3\cdot 21\cdot 2+3\cdot 21\cdot 1+4\cdot 3\cdot 7\cdot 1\right)=5688.$

Ответ: 5688.

2. Черновик



a_n+1

$S(n) = 1+2+3+4\dots+n$

$\frac{5\cdot 5}{2} = 3.5 = 10$

$1 \le m \le n$

$S(m\cdot n) = S(3)$

$n=3$

~~1+2+1+3+4~~

$S(n^2) = S(3)$

$S_n = \frac{(a_n-1)d}{2}$

$S(\ \ ) = S$

2 4 6

$S = \frac{(3-1)\cdot 2}{\ } = 2 = 2$ $\quad \frac{5\cdot 2}{2} = 5$

$S = ad + (a_n+1)d = (a_n+2$

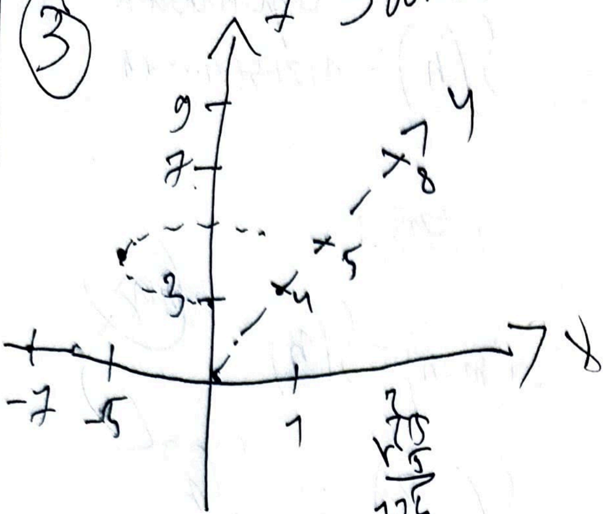
$m=1$

$S(2\cdot 3) = S(3)$ $\quad m=2$

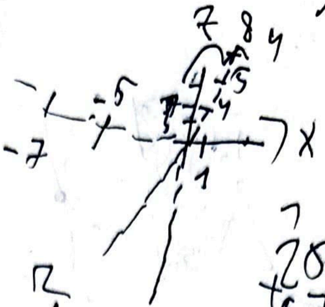
$S(n^2) < S(n$

$n \ge 9$ $\quad 9\cdot 10^{74} + 9\cdot 10^{73} + 9\cdot 10^{72} + \dots + 9\cdot 10^{1} + 9\cdot 10^{0}$

3 380км!



Черновик



$7+28+87=82$

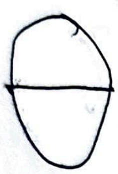
$82+13=95$

$19+3=57$

$70+55=125$

$365+15=380$

C+B+A, A+B и C, C+B и A, A+B и C



$240+125$

$240+125=365$

$\pi D=30$

$D=\frac{30}{\pi}$

$32+5=37$

$240+125=365$

$\frac{50}{\pi}+\frac{30}{\pi}=\boxed{\frac{80}{\pi}}$

$19+13+5$

$20+9+3+5$

$25+12$ 37

1 ч = 60 мин

$60+35=$ 95 мин

$D=\frac{80}{\pi}$

$AC=\pi D$

$AC=80$

$\boxed{80 км}$ / 19 мин : AC 3

25 км / 13 мин : BC 5

15 км / 5 мин : AB 1

3 6

$x\cdot AC+y\cdot BC+z\cdot AB=95$

$\boxed{15 \cdot AB}$

Пусть A

$95-25=50$

$58/2=29$, $13\cdot4=52$, $13\cdot5=65$, $39-2=41$, $41+13=54$, $13\cdot2=26$, $26+13=39$, $37\cdot2=74$, $95-37=58$

6·5

$37\cdot2=74$, $71+24$

$13\cdot2=26$

$37\cdot1=37$

2·29 .37

$2\cdot(19+10)=3\cdot19+5\cdot5+1\cdot13$

Черновик

$9\left(7\cdot\underbrace{5\cdot7}_{35}+5\cdot\underbrace{4\cdot14}_{56}+40\cdot7+4\cdot6\cdot10\right)$

$7\cdot8$

$D=9^2-4\cdot6=81-24=\sqrt{57}$

≤42 ≤8

$xy+3x-2y-6\ge0$

$(10+4)4=40+16=56$ $3x$ $4\cdot2\cdot7$

$x\le4+16$

$x\le14$

$56\,|\,4$, 14

$280\,|\,7$, 40

$8\cdot7$

$b\ge0$ $a\ge0$

$-2y\le8$

$y\ge4$

$\sqrt{a}=b$ a $y-x+10=(y-4)^2$ $3x\le42$

$y-x\ge-10$

$5\cdot8$

$9\left(7\left(5\cdot7+5\cdot8\right)+40(7+6)\right)$

$y\ge x-10$

$y_1+y_2=-9$ $y_1\cdot y_2=6$

$y+10\ge x$

$x\le y+10$

$5\cdot8$

$9\left(7\cdot5(7+8)+40(7+6)\right)$

$9\cdot5\left(7\cdot15+8\cdot13\right)$

$15\times7=105$

$13\times8=104$

≥4 ≤14

$y-x-8$

$45(105+104)$

209×45: $1045+836=9405$

$y-x+10=y^2-8y+16 \;|-10$

$y-x=y^2-8y+6$ ~~$45(2\cdot104+1)$~~

$-x=y^2-9y+6$ $2+9=11$

$x=-(y^2-9y+6)$ $-6\cdot12=-6(10+2)=-60-12=-72$

$xy+3x-2y\ge6$

$x\ge y-10$

$x\ge4-10$

$x\ge-6$

$y+3\ge12$

$$\begin{cases}(xy+3x-2y-6)\left|\sqrt{y-x-8}\right|=(x-5)\,|xy+3x-2y-6|\\ \sqrt{y-x+16}=y-4\end{cases}$$

-10

$y-4\ge0$

$y\ge4$

!

$y-x+10\ge0$

$y-x\ge-10$

$xy+3x-2y\ge-6$

≥-72 ≤8

$-2y\le8$

$x(y+3)$

$x\ge-6$ ≥12

Черновик

$$C^2_{4+0} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2} = 6$$

$$C^3_{7+3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3} = 5\cdot 7 = 35$$

$+3$ = ответ!

$$C^2_7 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 3\cdot 7 = 21$$

$$C^3_7 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3} = 35$$

$$\frac{5\cdot 6}{2} = 5\cdot 3 = 15$$

$$\frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3}$$ 56

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$$

$$C^3_{10} \quad \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2} = 6 \quad \frac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3} = 12\cdot 7 = (10+2)7$$

$70+14=84$

$$\frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3}$$

$8\cdot 3\cdot 5$

$8\cdot 15$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 8 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$4\cdot \frac{9\cdot 10}{3} = 12\cdot 10 = 120$$

$840 \,|\, 3$, -6, 280, 24, -24, 0

$3\cdot 3(7\cdot 35 + 5\cdot 56 + 280 + 40\cdot 6)$

5/2

!!

Черновик

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{3}{2}$

$f(f(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)$

~~f(f f(~~ $f(f(f(x))) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}\right)$

$f(f(f(f(x))))/ = \frac{x}{2^{11}} - \dots$

$\frac{1}{2^{11}}x$ $\frac{1}{2^{11}}$!!! $\frac{x}{8} = \frac{x}{2^3}$ ✓

$2^{10} \cdot 2$ $1024 \cdot 2 = 2048$

58

$3 \cdot 19 + 2 \cdot 13 + 5 \cdot 5 = 95$

95

$x, y, z = 1$

58/2 = 29

19

$2(19+10)$

$2 \cdot 19 + 4 \cdot 5$

1.

1	2	3
ВРАТ	ЗАЩ	НАП

ВРАТ ЗАЩ

3 ✓ 4

только

3

3	4	7
ВРАТ	ЗАЩ	НАП

1	1	1
ЧЛ	ЧЛ	ЧЛ
(3/11)	(3/11)	(4/11)

НЕВРАТ.

C_{4+3}^{2} C_{7+0}^{3}

C_{4+0}^{2} C_{7+1}^{3}

$C_3^1 =$

$C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{3!}{1!(2!)} = \frac{2! \cdot 3}{2!} = 3$ ✓

ИТОГ:

$3 +$ $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} + \boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$

ВРАТ   ЗАЩ   НАП

2   3

C_{4+1}^{2} C_{7+2}^{3}

C_{4+2}^{2} C_{7+1}^{3}

5/1 Черновик

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$?

$y = f(x)$

Замена!!

$t = \frac{x-2}{x+2}$

$x - 2 = tx + 2t$

$x - tx = 2 + 2t$

$(1-t)$: |

$x(1-t) = 2(1+t)$

!! $x = 2 \cdot \frac{1+t}{1-t}$

$x + 2 = 2 \cdot \frac{1+t}{1-t} + 2$

$x + 2 = 2\left(\frac{1+t}{1-t} + 1\right)$

$2 \cdot \frac{1+t}{-(t-1)}$

$\frac{t+1}{-(t-1)}$ $-2 \cdot \frac{t+1}{t-1}$

$x + 2 = 2\left(-\left(\frac{t+1}{t-1}\right) + 1\right)$

$= -\frac{t+1}{t-1}$

$x + 2 = 2\left(1 - \frac{t+1}{t-1}\right)$

$f(t) = \frac{1}{2}(t-1)$

$x + 2 = 2\left(\frac{t-1}{t-1} - \frac{t+1}{t-1}\right)$

$-\frac{3}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{7}{4}$

Вместо может быть всё что угодно!!!

$x + 2 = 2\left(\frac{t-1-t-1}{t-1}\right)$

$t = x$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)$

$x + 2 = 2\left(\frac{-2}{t-1}\right) = \frac{-4}{t-1}$

$f(x) = \boxed{\frac{1}{2}}x - \frac{1}{2}$

tg 2

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2} \Leftrightarrow f(t) = -\frac{2}{\left(\frac{-4}{t-1}\right)} = -2 \cdot \frac{(t-1)}{-4}$

$\frac{1}{2}(t-1) \Rightarrow \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$

$\frac{2}{4} \cdot (t-1)$