09-49-85-80
(40.54)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Байгулова Ильи Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Бай

09-49-85-50

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	0	8	12	12	12	8	12	76

09-49-85-80
(40.54)

76 (семьдесят шесть)

Чистовик

№5

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = f\left(1+\frac{4}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$1+\frac{4}{x-2} = t$, $t \neq 1$ (т.к. $\frac{4}{x-2} \neq 0$)

$f(t) = \frac{t-1}{2}$ $\quad f(f(f(f(t)))) = \frac{t-15}{16}$

~~$f(0) = -\frac{1}{2}$~~ $\quad f(f(t)) = \frac{t-3}{4}$ $\quad f(f(f(f(f(t))))) = \frac{t-31}{32}$

~~$f(f(0)) = -\frac{3}{4}$~~ $\quad f(f(f(t))) = \frac{t-7}{8}$ $\quad$ очевидно, что $\underbrace{f(\dots f}_{n\ \text{раз}}(x)) = \frac{x-(2^n-1)}{2^n}$

~~$f(f(f(0)))$~~

тогда $\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{12\ \text{раз}} = \frac{x-(2^{12}-1)}{2^{12}}$

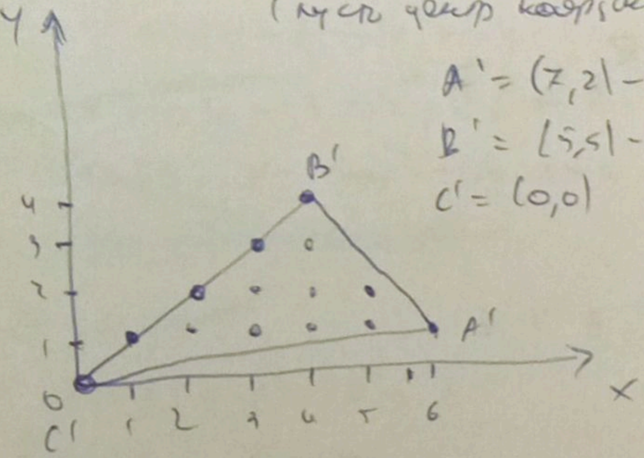
тогда $g'(x) = \frac{1}{2^{12}}$

Ответ: 2^{-12}

№8.

Рассмотрим проекцию Δ на плоскость (XOY) тогда очевидно если точка с целочисл. координатами лежала в Δ то и в проекции она будет лежать в Δ. (и будут тоже целочисл. координаты):

(пусть центр координат — точка (1,1) тогда



$A' = (7,2) - (1,1) = (6,1)$

$B' = (5,5) - (1,1) = (4,4)$

$C' = (0,0)$

Проверим лежит ли точка (5;2) внутри: уравнение $A'B'$:

$y = kx + b$

$4 = 4k + b$

$1 = 6k + b \Rightarrow 2k = -3 \Rightarrow k = -1{,}5 \Rightarrow b = 10$

точка лежащая на $A'B'$ с $x = 5$: $y = -1{,}5\cdot5+10 = 5\cdot0{,}5 = 2{,}5 \Rightarrow$

(5,2) лежит внутри. тогда есть 14 точек с цел. координатами

Найдем уравнение плоскости в которой лежит треугольник:

$ax+by+cz+d=0$

$a+b+3c+d=0 \quad a+b+3c+d=0 \quad a+b+3c+d=0$

$7a+2b+11c+d=0 \Leftrightarrow 6a+b+8c=0 \Leftrightarrow 10a+15b=0 \Rightarrow a=-1{,}5b$

$5a+5b+5c+d=0 \quad 4a+4b+2c=0$

$-9b+b+8c=0 \quad c=b$

$-1{,}5b+b+3b+d=0 \Rightarrow d=-2{,}5b$

уравнение плоскости:

$-1{,}5x+y+z-2{,}5=0$ выразим z: $z = 1{,}5x+2{,}5-y$

№8. ~~Чи~~ Чистовик

... $z+y=\frac{3x+5}{2}$

$z+y\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3x+5}{2}\in\mathbb{Z} \Rightarrow x$ - нечетное.

~~Подходят все точки с нечетным x~~

Подходят все точки с нечетным x, но т.к. мы меняли начало системы координат то на прошлых ~~рисунках~~ точки как раз с четным x $(x\in\{0,2,4,6\})$

таких точек 8 - $(0,0)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(4,3)$; $(4,4)$; $(6,1)$

Ответ: 8

№1.

Рассмотрим 3 варианта: среди выбранных защитников:

1) 0 универсалов
2) 1 универсал
3) 2 универсала.

1) Среди защитников нет универсалов.

тогда ~~$N_1 = 2\cdot 4\cdot 10 = 80$~~ $N_1 = \underset{\text{вр.}}{C_2^1}\cdot\underset{\text{защ.}}{C_4^2}\cdot\underset{\text{нап.}}{C_{10}^3} = 2\cdot 6\cdot\frac{10\cdot 8\cdot 9}{6} = 20\cdot 8\cdot 9$

2) один универсал.

$N_2 = \underset{\text{вратарь}}{C_2^1}\cdot\underset{\text{выбор универсала}}{C_3^1}\cdot\underset{\text{второй защ.}}{C_4^1}\cdot C_9^3 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 4$

3) два универсала.

$N_3 = \underset{\text{вр.}}{C_2^1}\cdot\underset{\text{защ}}{C_3^2}\cdot\underset{\text{нап.}}{C_8^3} = 2\cdot 3\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 8\cdot 7\cdot 6$

$N = N_1 + N_2 + N_3 = 20\cdot 8\cdot 9 + 9\cdot 8\cdot 4\cdot 7 + 8\cdot 7\cdot 6 = 8\cdot 3(60+84+14) =$

$= 3\cdot 8\cdot 158 = 24\cdot 158 = 3792$

Ответ: 3792

№3.

$$\begin{cases}(xy+2x-y-2)|y-x-10| = (x-4)\cdot|xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+6} = y-5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|xy+2x-y-2|\cdot(\operatorname{sign}(xy+2x-y-2)\cdot|y-x-10| - (x-4)) = 0 \\ \begin{cases} y-5\geq 0 \\ y-x+8 = y^2-10y+25\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 5 \\ x = -y^2+11y-17\end{cases}$$

№3 Исходная. $\quad \operatorname{sign}(4y+2x-y-2)=a$

...

Подставим x в первое уравнение.

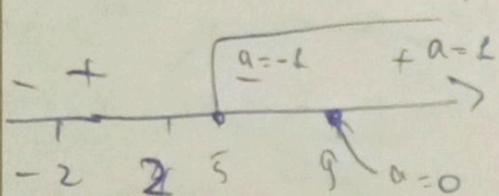
$$\left[\begin{array}{l} \cancel{4y} - y^3 + 11y^2 - 17y \cancel{+} 2y^2 + 22y - 34 - y - 2 = 0 \\ a\cdot|y + y^2 - 11y + 17 - 10| = x + 4 = -y^2 + 11y - 13 \end{array}\right.$$

$\boxed{y \geq 5}$!

$$\left[\begin{array}{l} y^3 - 9y^2 - 4y + 36 = 0 \\ \cancel{a\cdot|(y-5-\sqrt{18})(y-5+\sqrt{18})| =} \\ a\cdot|y^2 - 10y + 7| = -y^2 + 11y - 13 \end{array}\right.$$

Рассмотрим $y^3 - 9y^2 - 4y + 36$.

$y^3 - 9y^2 - 4y + 36 = y^2(y-9) - 4(y-9) = (y-9)(y^2-4)$ найдем a:



$y \in [5;9) \Rightarrow a = -1$
$y = 9 \Rightarrow a = 0$
$y > 9 \Rightarrow a = 1.$

1) $y \in [5;9)$

$-y^2 + 10y - 7 = -y^2 + 11y - 13$

$-7 = y - 13 \Rightarrow y = 6 \in$ в

Тогда $x = -y^2 + 11y - 17 = -36 + 11\cdot 6 - 17 = 6\cdot 5 - 17 = 13$

$(13;6)$ – в ответ.

2) $y = 9$

$x = 9(11-9) - 17 = 1$

$(1;9)$ – в ответ.

3) $y > 9$

$2y^2 - 21y + 20 = 0$

$$y = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 8\cdot 20}}{4} = \frac{21 \pm \sqrt{19^2}}{4} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

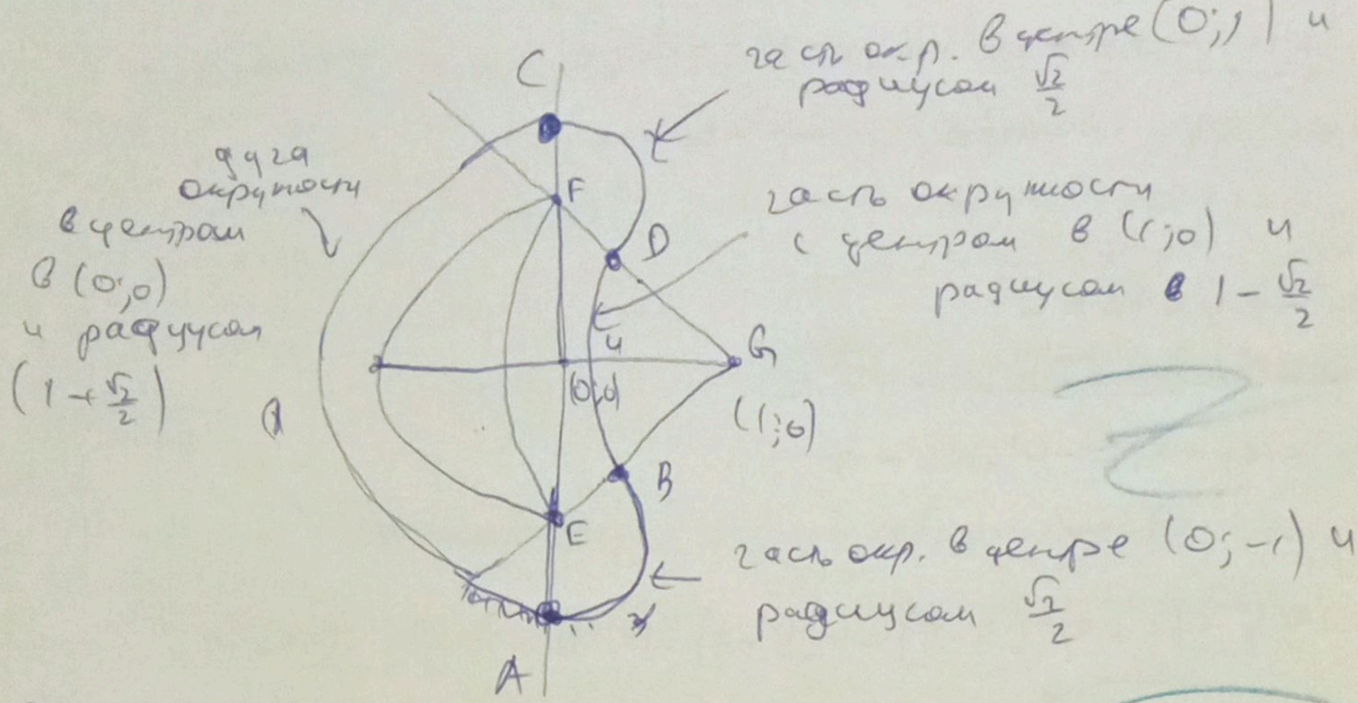
но $y > 9$ ×

Ответ: ~~(1;9)~~; $(x;y) = (1;9)$ или $(13;6)$

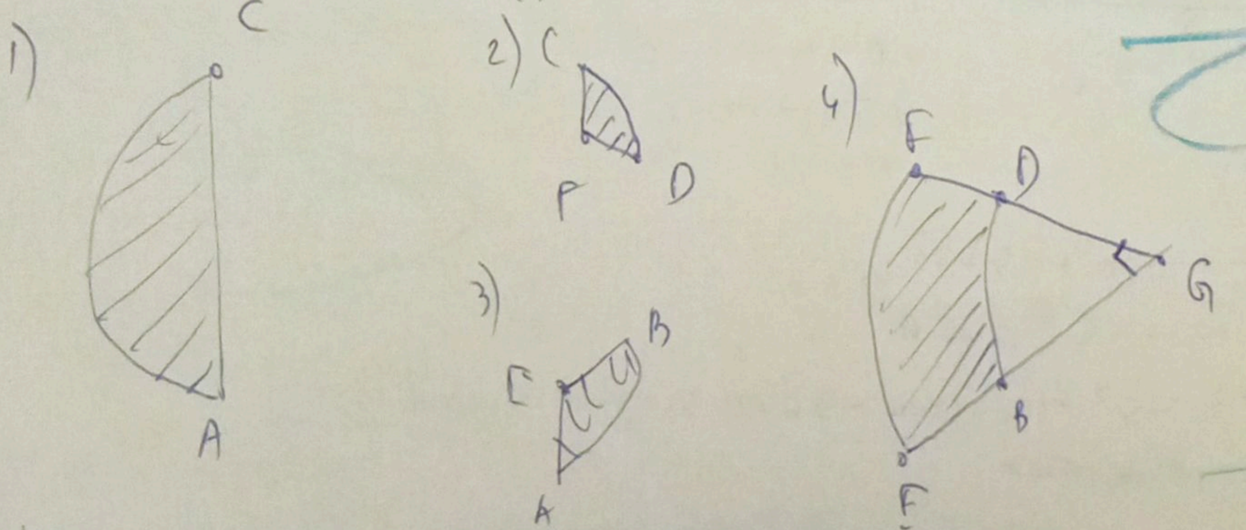
Чистовик

№ 2.

Построим получившуюся фигуру:



Разделим на 4 части:



Найдем ~~св~~ все площади по отдельности

1) $S_1 = \frac{\pi r^2}{2}$, $r = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$

2,3) $S_2 = S_3 = \frac{\pi r^2}{[illegible]}\cdot\left(\frac{\pi-\frac{\pi}{4}}{2\pi}\right)$, т.к. $\angle CFD = \pi - \angle EFD$, $\angle EFD = \frac{\pi}{4}$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_2 = S_3 = \frac{\pi}{2}\left(\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{8}\right)$

4) $\angle DGB = \frac{\pi}{2}$ т.к. (это $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$).

$S_4 = S_{GFE} - S_{GDB} = \pi R^2\cdot\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right) - \pi r^2\left(\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right) = \frac{1}{4}\pi\cdot(R^2 - r^2)$, $R = \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; $r = \sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $S_4 = \frac{1}{4}\pi\,(\sqrt{2}\cdot)(\cdot 2\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}(2)$

09-49-85-80
(40.54)

Чистовик

№2

...

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{3}{4} + 2\right) =$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(4{,}25 + \sqrt{2}\right)$

Ответ: $\frac{\pi}{2}\left(4{,}25 + \sqrt{2}\right)$

№7.

$10^{89} \le n < 10^{90}$

$n > 9^{90}$ т.к. $10^{89} > 9^{90}$

$S(9^{90} \cdot n) = S(n)$ но т.к. $9^{90} \cdot n$ делится на 9^{90} то и $S(9^{90} \cdot n)$ делится на 9^{90} и тогда $S(n)$ делится на 9^{90} и тогда $n \vdots 9^{80}$

тогда $n = \alpha \cdot 9^{90}$

$\alpha \cdot 9^{90} < 10^{90}$

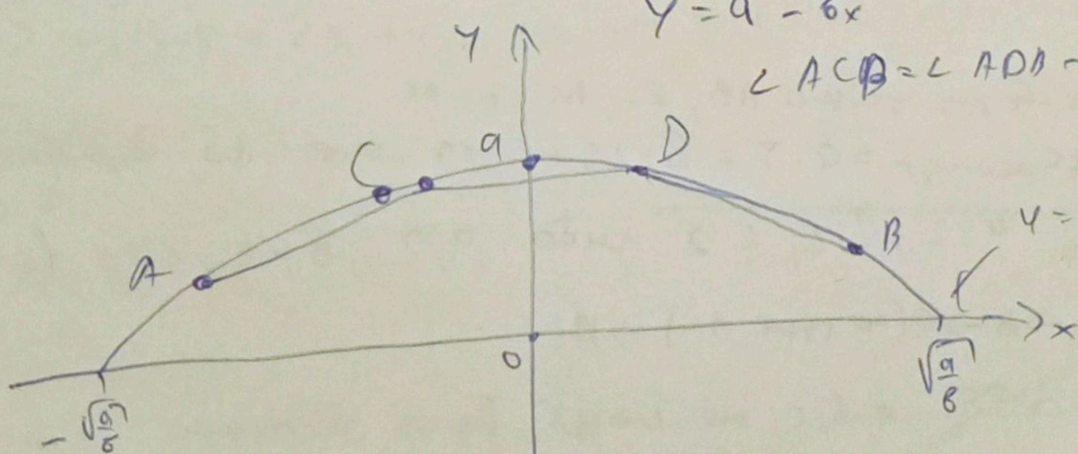
$\alpha < \left(\frac{10}{9}\right)^{90} = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^{9 \cdot 10} < e^{10}$

№6.

Нарисуем ее: (введем систему координат)

$y = a - bx^2$

$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$



$y = 0 \Rightarrow a = bx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Пусть $A = (-x_1; y_1)$ $B = (x_1; y_1)$ $C = (-x_2; y_2)$; $D = (x_2; y_2)$

$a = 9$

$2\sqrt{\frac{a}{b}} = 18 \Rightarrow \frac{a}{b} = 9^2 \Rightarrow b = \frac{1}{9}$

$y_1 = 9 - \frac{x_1^2}{9}$

$y_2 = 9 - \frac{x_2^2}{9}$

$\overrightarrow{AC} = (x_1 - x_2; y_2 - y_1)$ $\overrightarrow{CB} = (x_1 + x_2; y_1 - y_2)$

Чисровик

№6

...

$AC \perp BD \Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0 = (x_1 - x_2)\cdot(x_2 + x_1) + (y_2 - y_1)(y_1 - y_2) =$

$= \cancel{x_2^2 - x_1^2} - (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 - x_2^2 - (y_2 - y_1)^2$

$y_1^2 = 81 - 9y_1$

$x_2^2 = 81 - 9y_2$

$0 = \cancel{81} - 9y_2 - \cancel{81} + 9y_1 - (y_2 - y_1)^2 =$

$\cancel{= 9(y_1 - y_2) - (y_2 - y_1)^2}$

$0 = \cancel{81} - 9y_1 - \cancel{81} + 9y_2 - (y_2 - y_1)^2 =$

$= 9(y_2 - y_1) - (y_2 - y_1)^2$ т.к. $y_1 \neq y_2$

$0 = 9 - (y_2 - y_1)$ $y_2 > y_2$

$y_2 - y_1 = 9$ ← как раз разность высот то есть $\rho(AB, CB)$

Ответ: 9

№4 a – кол-во раз проезд AB, b – BC, c – AC

1 час 35 минут = 95 минут = $a \cdot 5 + b \cdot 13 + c \cdot 19$ т.к. он вернулся в A. то либо $a \vdots 2, b \vdots 2, c \vdots 2$ либо $a \not\vdots 2, b \not\vdots 2, c \not\vdots 2$. (совершил путь $A \to B \to C$ (по дуге AC) $\to A$.

$5a + 13b + 19c = 95$ a, b, c не могут быть четными т.к. тогда $5a + 13b + 19c$ было бы ~~четным~~, но 95 нечет. ⇒

⇒ $a \not\vdots 2$, $b \not\vdots 2$, $c \not\vdots 2$. Тогда $13b + 19c \vdots 10$

$13\cancel{b + 19c = 10n, n \in N}$

~~b~~ [illegible] $13b + 19c \equiv 0\ (10)$

$3b - c \equiv 0 \pmod{10}$

~~$b = \alpha$~~ $b = \alpha$

~~$c = 3\alpha$~~ $c \equiv 3\alpha \pmod{10}$

$c \equiv 3b\ (10)$

Чистовик

№4

...

тогда $c \vdots 3$, $c \not\vdots 2$

$c = 3$ (9 и более неподходят т.к. $9 \cdot 13 > 95$)

$b = 1$ (10)

$b = 1$ (11 и более не подходят т.к. $11 \cdot 13 > 95$)

тогда

$5a + 13 + 19 \cdot 3 = 95 \Rightarrow 5a = 25 \Rightarrow a = 5$

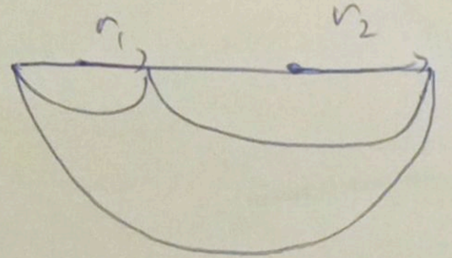
~~тогда~~

тогда пройденный путь

$S = 13км \cdot 5 + 27км \cdot 1 + X_{км} 3$

Пусть x - длина дуги AC

Найдем x.



$\pi r_1 = 13км$

$\pi r_2 = 27км$

$x = \pi(r_1 + r_2) = (13 + 27)км = 40км$.

$S = (13 \cdot 5 + 27 \cdot 1 + 3 \cdot 40)км = (65 + 27 + 120)км = 212км$

Ответ: 212км.

№7.

$n = \alpha \cdot 10^{89}$

$10^{89} \leq n$

значит $S((10^{89}+1) \cdot n) = Sn$

$(10^{89}+1) \cdot n = 10^{89} n + n =$

$n = \overline{a_1 \quad \dots \quad a_{90}}$

$10^{89} n = \overline{a_1 \dots a_{90} \underbrace{0 0 0}_{89}}$

$10^{89} n + n = + \begin{array}{l} \overline{a_1 \dots a_{90} | 0 0 \quad 0} \\ \quad\quad\quad\quad a_1 | a \dots a_{90} \end{array}$

$S(10^{89} n + n) = S(n + a_1) + S(a) - a_1 = S(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(n + a_1) = a_1$ если $a_1 < 9$ то

Числим

в числе ~~[illegible]~~ n + a, [illegible] .

$n = \underbrace{99\ldots9}_{901 \text{ ц}}$

Ответ: $\underbrace{9\,5\,5\,5\,5}_{90}$.

Черновик

$n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{90}}$ $n^i = a_i$

$S(n) = \sum_{i=1}^{90} a_i$

$a_{90} \cdot m$

$m \cdot n = \sum_{i=1} (m \cdot n)^i$ $S + (m-1) \cdot a_{90}$

если $m \cdot a_{90} > 10$

7. 9 $m \cdot a_{90} = \alpha \cdot 10 + \beta$

100000

$S_1 \to S + \alpha + \beta$

$m \cdot n = 10^{90-i} \cdot (a_i \cdot m)$ 99999999 250000

$n = \alpha \cdot 10^{89} > 10^{89}$

$1.0 \ldots 0$

S_a $\overline{a_1 \ldots a_{90}}$ $a_1 = S(n) + a_1 - 9 \cdot x$

S_b $\overline{b_1 \ldots b_{90}}$ $S(n) = 9x$

x – кол-во раз когда $a_i + b_i > 10$

$S(a+b) = Sa + Sb - 9 \cdot x$

$\overline{a_1 \ldots a_{90} 000}$ + $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{90}}$

9998 | 2 = 499

a – четн. $S = a_1$

$S(n) = S(\frac{n}{2})$ b – нечетн. $a_1 = 1$

$S(n) - a_1$

10000000001000000

$S(\frac{n}{2}) = \frac{(S(n) - b)}{2} + 5b$

$a_1 + 1$

$a_1 +$ 8 +2 144 $S(n + a_1) = a_1$

$x = \frac{x - b}{2} + 5 \cdot b$ 10

$9 \cdot 10^{89} - 9 =$

144 | 72

500000

$\boxed{S(n) = 9b}$ – кол-во ~~нечетных~~

$S(n) = 9b$

899991

3000000

Черновик.

$\cancel{16}$ 12 3

14 5

16 $\cancel{7}$

$y^2-10y+7$ $\boxed{12-9}$

$(\cancel{y-5)(y-6})$

$y=\frac{10\pm\sqrt{100-28}}{2}=$ $\sqrt{2x-9}$

(0,0,0) (-4;-4;-2) (2;-3;6) $-5\pm\sqrt{25-7}=$

$-5\pm\sqrt{18}$

$x<5$

a^2 b^2 c^2

S 2x

$x\geq5$

x $2x-9$

$y^2-11y+13$

$y=\frac{11\pm\sqrt{121-52}}{2}=$

$S_n=S_n+x\cdot a+(x-9)\cdot b$

$S+x$

$S+^{x-9}$

$S_n=S_n+S_n-58$

$=\frac{11\pm\sqrt{69}}{2}$

$ab=S_n$

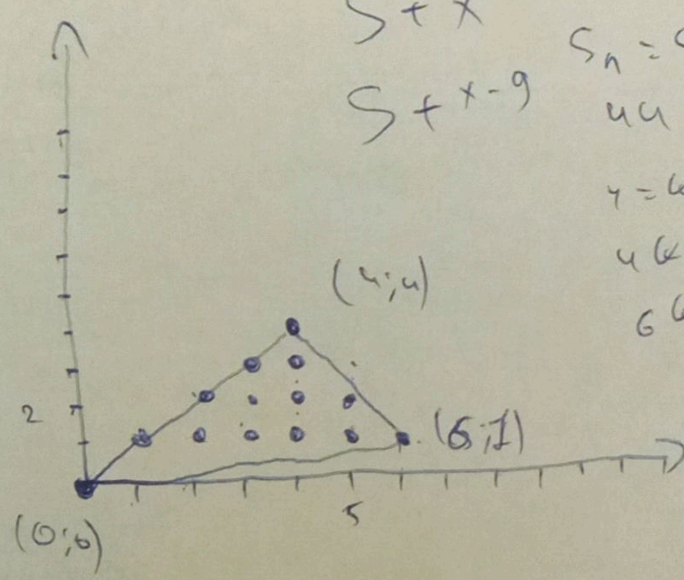
$y=kx+b$

$4k+b=4$

$6k+b=1$

$69=\cancel{6\cdot 13}$

$69=3\cdot23$



$-2k=3$

$k=-1,5$

$-6+b=4$

$b=10$

$-1,5\cdot4+10=5$ $(2-1,5)=2,5$

$S_n<9\cdot x=9\cdot\log_{10}x$

$n<10^x$ $10^{S_n}<10^{9\cdot\log x}$

$10^{S(n)}<n^9$

Черновик

$t = \frac{x+2-2+2}{x-2} = 1+\frac{4}{x-2}$

$tx - 2t = x+2$

$x(t-1) = 2(t+1)$

$x = \frac{2(t+1)}{t-1}$

$x-2 = \frac{2t+2-2t+2}{t-1} = \frac{4}{t-2}$

$\frac{2}{x-2} = \frac{t-1}{2}$

$f(t) = \frac{t-1}{2}$, $x \neq 1$

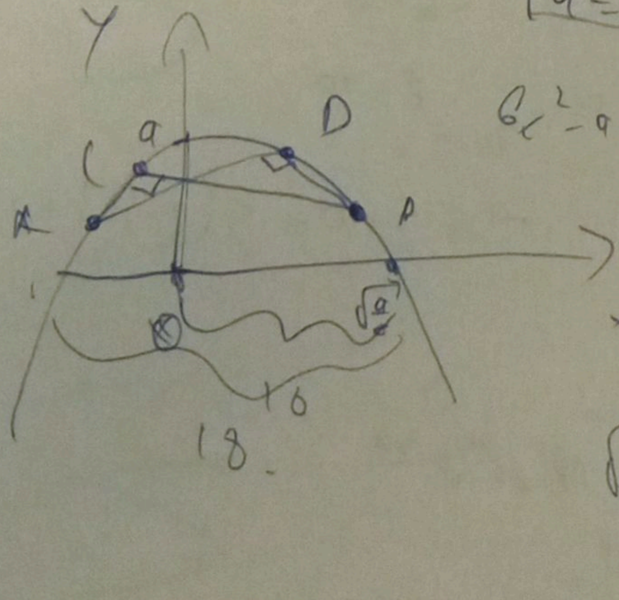
$\frac{x+2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$f(x) = \frac{x-1}{2} =$

$f(f(x)) = \cancel{\left(\frac{x-1}{2} - 1\right) / 2} = \frac{x-3}{}$

$f(f(f(x))) = \frac{x-3-1}{2} = x-2$

$\frac{\frac{\frac{-1}{2}-1}{2}-1}{2} =$



$b_c^2 = a$

$9^{90} \not< 10^{89}$

$90 \cdot \ln 9 \vee 89 \cdot \ln 10$

$\frac{90}{89} \vee \frac{\ln(10)}{\ln 9} = \frac{\ln 9 + \ln\frac{10}{9}}{\ln 9} = 1 + \frac{\ln\frac{10}{9}}{\ln 9}$

$\frac{1}{89} \vee \frac{\ln\left(\frac{10}{9}\right)}{\ln(9)}$

23
158
× 24
632
316
3792

$21^2 = 20^2 + 40 + 1 - 4 \cdot 20 =$

$= 20(20+2-4)+1 =$

$= 20 \cdot 18 + 1 =$

$x = x \cdot 10^{89} = 19^2$

$\frac{\ln 9}{89} \not< \ln\frac{10}{9} \approx \frac{1}{9}$

$\boxed{9\cancel{0}^{90}}$

$= \frac{\ln 9}{9 \cdot 10}$ $\ln 9 \approx 2{,}5$

$20 \cdot 18 = (19+1)(19-1) =$

$= 19^2 - 1$

90^{89}

$90^{90} \vee 10^{89}$ $\ln\frac{10}{9} = \ln\left(1+\frac{1}{9}\right) =$

$= \frac{1}{90} +$

$90(\ln 9 \cancel{+\ln 10}) \vee 89 \cdot \ln$

$\cancel{90 \cdot \ln 9} \vee$ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$\frac{90}{89} \vee \log_9 10 = \frac{\ln 10}{\ln 9} =$

$= \frac{\ln\left(9 \cdot \frac{10}{9}\right)}{\ln 9} = \ln$

$\boxed{a = 9 \quad b = \cancel{6}}$ $b = \frac{1}{9}$

$\ln(1+t) =$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = 18$

$= t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$

$= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}$

$\cancel{\frac{a}{b} = 4 \cdot 9^2}$

$\cancel{b = \frac{a}{4 \cdot 9^2}} = \frac{1}{36}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = 9$ $\frac{a}{b} = 9^2$ $b = \frac{1}{9}$