0 459687 410006

45-96-87-41
(40.53)

13 58 - вр вых.
14.02 - вр прих.

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бакшеева Тимофея Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	12	12	12	12	12	12	0	76

45-96-87-41 (40.53)

Черновик.

$$\begin{cases} \cancel{(y+2)}(x-1)\,|y-x-10| = (x-4)\,\cancel{|y+2|}\,|x-1| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$2\cdot($

B 3 H

2 4 7

1 2 3

$y \geq 5 \Rightarrow |y+2| = y+2 \neq 0$

• $x = 1$

$\sqrt{y+7} = y-5 \Rightarrow y = 9$

$\frac{145}{360}$

$\frac{90+45}{360} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

1 ~~2~~ ~~3~~ 4 ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ 8 !!!

• $x > 1$

$y - x - 10 = x - 4 \Rightarrow y = 2x+6$

$\sqrt{x+14} = 2x+1$

$\sqrt{x+14} = 2x-1$

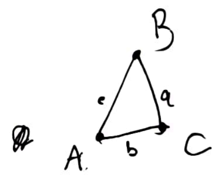
• $x < 1$

$y - \cancel{x} - 10 = 4 - \cancel{x}$ $y = 14$

$\sqrt{22-x} = 9$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = 22 - 81 = 59$



$f\left(1+\frac{4}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$ t

$f^{[k]}(x) = \frac{1}{2^k}\left(x - 2^k + 1\right)$

$f(1+2t) = t$

$f(x) = \frac{x-1}{2}$

A . . . . A

$|AC| = |AB| + |BC|$

$13c^n + 27a^n + 40b^n =$

$5c + 13a + 19b = 95$

$\exists\,(c \vee b)$

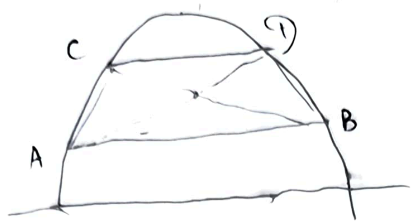
Черновик.

$16 \cdot 13 = 208$ $\quad a - bx^2$

232

$a = 9$

$b = \frac{1}{9}$



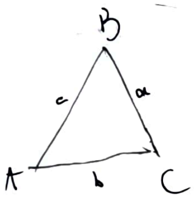
$9 - \frac{x^2}{9}$

19
38
57
76

$a = 1$

$b = 5$

$5a + 13a \,\vdots\, 19$



$5c + 13a + 19b = 95$

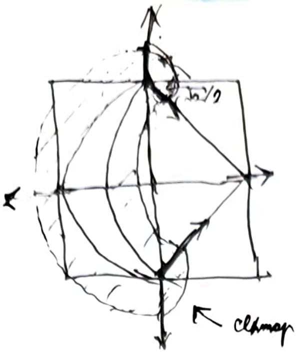
$5 + 13 + 19$

95
37

58

Чистовик.

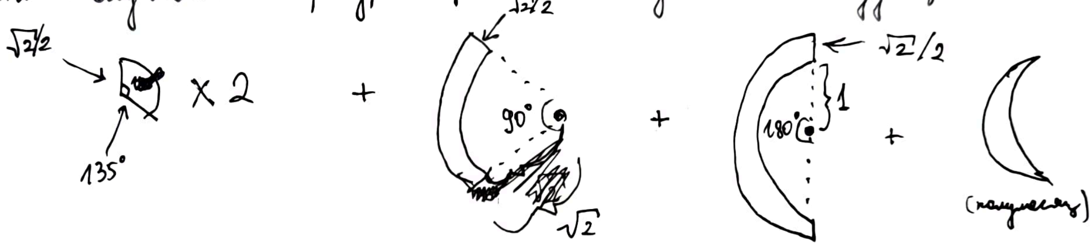
№ 2.



Ясно, что получившаяся фигура ~~образована~~ ~~объединением~~ ограничена множеством (т.е. это множество — её граница), полученным так:

в каждой точке P границы полумесяца проводится ~~касательная~~ нормаль n (прямая, перп. касательной) и во „внешнюю отн. полумесяца" область плоскости откладывается отрезок $PX \subset n$, такой, что $|PX| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит, поскольку в ок-сти центра O нормаль к P совпадает с прямой OP, то получившаяся фигура равна объединению следующих:



причём они, очевидно, попарно не пересекаются. Значит, искомая площадь равна

$$2\times\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{135^\circ}{360^\circ}+\pi\left(\sqrt{2}^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}/2\right)^2\right)\cdot\frac{90^\circ}{360^\circ}+$$

$$+\pi\left(\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1^2\right)\cdot\frac{180^\circ}{360^\circ}+$$

$$+\left(\pi\cdot 1^2\cdot\frac{180^\circ}{360^\circ}-\pi\cdot\sqrt{2}^2\cdot\frac{90^\circ}{360^\circ}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\pi+\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{4}\pi+1=$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi+1$$

Отв:

Чистовик.

№ 3

$$\begin{cases}(xy+2x-y-2)\,|y-x-10| = (x-4)\,|xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \geq 0 \quad (\text{т.к. } \sqrt{\cdot} \geq 0)\ (\Rightarrow y \geq 5 \Rightarrow y+2>0)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(y+2)\,|y-x-10| = (x-4)\,|x-1|\,|y+2| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)\,|y-x-10| = (x-4)\,|x-1| \quad (\text{т.к. } |y+2| = y+2 \neq 0) \\ \sqrt{y-x+8} = y-5\end{cases}$$

Разбор случаев:

1) $x=1$: $\begin{cases}0=0 \\ \sqrt{y+7} = y-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+7 = y^2-10y+25 \\ y \geq 5\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(y-2)(y-9)=0 \\ y \geq 5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (1, 9)$$

2) $x>1$

$$\begin{cases}|y-x-10| = x-4 \\ \sqrt{y-x+8} = y-5\end{cases} (\Rightarrow x \geq 4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y \geq x+10 \\ y-x-10 = x-4 \\ \sqrt{y-x+8} = y-5\end{cases} \\ \begin{cases}y \leq x+10 \\ y-x-10 = 4-x \\ \sqrt{y-x+8} = y-5\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+6 = y \geq x+10 \\ \sqrt{2x+6-x+8} = 2x+6-5\end{cases} \\ \begin{cases}y = 14 \leq x+10 \\ \sqrt{22-x} = 9\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y = 2x+6 \geq x+10 \\ x+14 = 4x^2-4x+1\end{cases} \\ \begin{cases}x = -59 < 1 \\ y = 14\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y = 2x+6 \geq x+10 \\ 4x^2-5x-13=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 2x+6 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+208}}{8}\end{cases} = \dfrac{5 \pm \sqrt{233}}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5+\sqrt{233}}{8}$$

но $\sqrt{233} < 27 = 4 \cdot 8 - 5 \Rightarrow x < 4$. Противоречие

45-96-87-41 (40.53)

Чистовик, №3 (продолжение)

3) $x < 1$.

$$\begin{cases} |y - x - 10| = 4 - x \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq x + 10 \\ y - x - 10 = 4 - x \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq x + 10 \\ y - x - 10 = x - 4 \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 14 \\ x = -59 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x + 6 \leq x + 10 \\ \sqrt{2x + 6 - x + 8} = 2x + 6 - 5 = 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1/2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Значит, как в п.2), $x = \frac{5 + \sqrt{233}}{8}$, но тогда $x > 1$. Противоречие.

Ответ: $(x, y) \in \{(1, 9), (-59, 14)\}$.

№5.

Пусть $t = \frac{2}{x-2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда $\frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2} = 1 + 2t$, т.е.

$f(2t+1) = t \neq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{2}$ для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Пусть $h(x) = \frac{x-1}{2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Ясно, что h и f непрерывны на области определения ~~значит~~ (значит,

~~тангенс угла наклона касательной~~

Область определения $g(x) = \underbrace{f(\ldots(f(x)))}_{12}$ равна $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\cdot1+1 = 3, 2\cdot3+1, \ldots\} \ni 0$,

значит, тангенс угла наклона касательной к графику $g(x)$ в $x=0$

равен $g'(0)$, т.к. g непрерывно дифференцируема в окрестности 0.

Но $\underbrace{f(\ldots(f(x)))}_{k} = \frac{1}{2}\underbrace{f(\ldots(f(x)))}_{k-1} + C_k$ и $f(x) = \frac{x}{2} + C_1$,

где $C_i \in \mathbb{R}$, значит, $g'(x) = 1/2^{12}$ - в частности при $x=0$. Ответ: $\frac{1}{2^{12}}$

Чистовик. №7.

Ответ: $10^{90}-1$.

Лемма: пусть $N=10^k-1$. Тогда $S(mN)=9k=S(N)$ для всех $m\in\mathbb{Z}$, $1\le m \le N$.

Док-во: Запишем $m<N$ в десятичной системе счисления: $\overline{a_d\dots a_1a_0}$, $d\le k$.

Тогда $mN=10^k m - m = $

$$
\begin{array}{r}
-\ \overline{a_d a_{d-1}\dots a_1 a_0 0\dots 0 0\dots 0\dots 0 0} \\
\overline{a_d a_{d-1}\dots a_1 a_0} \\
\hline
\overline{c_d c_{d-1}\dots c_1 c_0 9\dots 9 b_d b_{d-1}\dots b_1 b_0}
\end{array},
$$

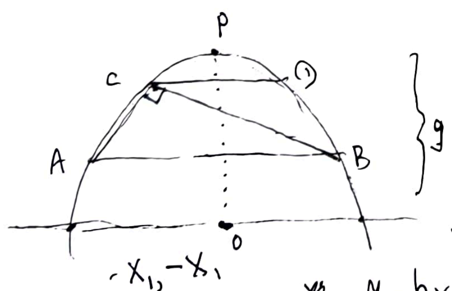
где $c_i=a_i-1$, $b_i=10-a_i$. Значит, $S(mN)=$

$$= ((a_0-1)+(10-a_0)+\dots+(a_d-1)+(10-a_d))+9(k-d)=$$

$$=9d+9(k-d)=9k.$$ Лемма доказана.

Значит условие задачи выполнено для $n=10^{90}-1$, но это в принципе наибольшее 90-значное число. Значит, и наибольшее с таким свойством.

№6.



„(Высота $=9$)" означает, что $a=9$.
(т.к. максимум – в $x=0$)

„(Ширина $=18$)" означает, что разность корней ур-ния $a-bx^2=0$ равна 18, т.е. $x_1=\pm 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow b=\frac{1}{9}$. Итак, $y=9-x^2/9$

Ясно, что, в силу симметрии параболы отн. OP, A симметрично B, а C – D.
(проводим $l\ni A$ параллельную Ox и получаем одну искомую точку пересечения $B\neq A$).

Пусть $A=(x_1, 9-x_1^2/9)$, $B=(-x_1, 9-x_1^2/9)$, $C=(x_2, 9-x_2^2/9)$, $D=(-x_2, 9-x_2^2/9)$. Тогда $\overrightarrow{AC}=\left(x_2-x_1, \frac{x_1^2-x_2^2}{9}\right)$ и

Чистовик

№ 6 (продолжение)

$\overrightarrow{BC} = \left(x_2 + x_1,\ \frac{x_1^2 - x_2^2}{9}\right)$. По ~~определению~~ свойствам скалярного произведения, „$\angle ACB = 90^\circ$" означает, что $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$,

т.е. $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{9}\right)^2 = 0$

$\iff t + \left(\frac{t}{9}\right)^2 = 0$, где $t = x_2^2 - x_1^2$

$\iff t \in \{0, -9^2\}$.

~~Значит,~~ Если $t = 0$, то $x_1 = \pm x_2 \Rightarrow A = C$ или $B = C$, что невозможно. Значит, $t = -9^2$. Тогда расстояние между балками равно разности ординат A и C, т.е. $\left|\frac{x_1^2 - x_2^2}{9}\right| = 9$.

Ответ: 9.

№ 1.

Выбрать вратаря — ровно 2 способа, и этот выбор не влияет на остальные. Найдём число способов выбрать Н и З.

~~Универсалы могут „разделиться" так:~~

Н	З
0	3
1	2
2	1
3	0

~~В каждом случае pН, qЗ — равно~~

Сначала выбираем нападающих их, ~~потом — добираем к ним универсалов~~, потом — защитников, потом — распределяем универсалов:

~~Причём либо универсалы не используют~~

~~Причём либо универсалы не используются, либо равно 3 способа~~ $\binom{3}{1} = \binom{3}{2}$

~~и добить или оставшимися ≤ 2 места:~~

$2 \cdot \left(\binom{4}{2} \cdot \binom{10}{3} + \binom{4}{1}\binom{10}{3} \cdot \binom{3}{1}\right) + \binom{4}{0}\binom{10}{3}\binom{3}{2} + \binom{4}{2}\binom{10}{2}\binom{3}{1} +$

$+ \binom{4}{1}\binom{10}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \binom{4}{0}\binom{10}{2}\binom{3}{1} + \binom{4}{2}\binom{10}{1}\binom{3}{2} + \binom{4}{1}\binom{10}{1} \cdot 3 =$

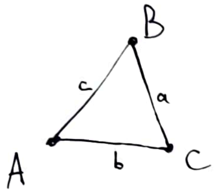
Чистовик

$= \cancel{2036} \; 2\cdot\Big(6\cdot\frac{720}{6} + 3\cdot\big(4\cdot120 + 120 + 6\cdot45 + 4\cdot45\cdot2 + 45 + 6\big)\Big) = 2\cdot\big(720 + 3\cdot(600 + 670 + 51)\big) = 2(720 + 3\cdot 1321) =$

$= 2\cdot 4683 = 9366.$ Ответ: 8046.

3963
720

№ 4.



Пусть по дуге AB автомобиль проехал c раз, по BC – a раз, по AC – b раз. Тогда $5c + 13a + 19b = 95.$ Требуется найти $13c + 27a + 40b.$

Пусть автомобиль выехал из A и заехал в A. ~~если он совершил k циклов, то 5(...)+13(...~~

~~Пусть $m = \min\{a, b, c\}$. Тогда $a \equiv b \equiv c \equiv m \pmod 2$~~

Тогда $a \equiv b \equiv c \pmod 2$ (для этого достаточно случая, когда A не была посещена дважды, а он очевиден)

Значит, a, b и c нечётные, значит хотя бы 1.

$5c' + 13a' + 19b' = 95 - (5 + 13 + 19) = 58.$

$x' = x - 1 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$

Если $b' \geqslant 2$, то $b' = 2$, и $5c' + 13a' = 20 \Rightarrow c' = 4,\ a' = 0$

Если $b' = 0$ и $a' \geqslant 2$, то $a' \in \{2, 4\} \Rightarrow 5c' \in \{32, 6\}$ Противоречие

Значит, если $b' = 0$, то $a' = 0$, но $5c' = 58$. Противоречие.

Значит, $b' = 2$, $a' = 0$, $c' = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13c + 27a + 40b = 13\cdot 5 + 27 + 40\cdot 3 =$

$= 185 + 27 = 212.$

Ответ: 212 км.