



0 268828 750006

26-88-28-75

(40.56)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 4

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ЛОМОНОСОВ
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

БАРАННИКОВА БОРИСЛАВА ВЯЧЕСЛАВОВИЧА
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» ~~11~~ 02 2024 года

Подпись участника

Bar

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
8	12	0	12	12	12	0	0	56

26-88-28-75
(41,56)

Черновик. 2 в; 43; 7 кан; 3 ушвер;

время: 2 способа.

2 ушвер и 3 кан: 0 ушвер: $C_4^2 \cdot C_7^3$
 1 ушвер: $3 \cdot C_4^1 \cdot C_7^3 + 2 \cdot C_4^2 \cdot 3 \cdot C_7^2$
 2 ушвер: $3 \cdot 2 + C_7^3 +$
 3 ушвер:

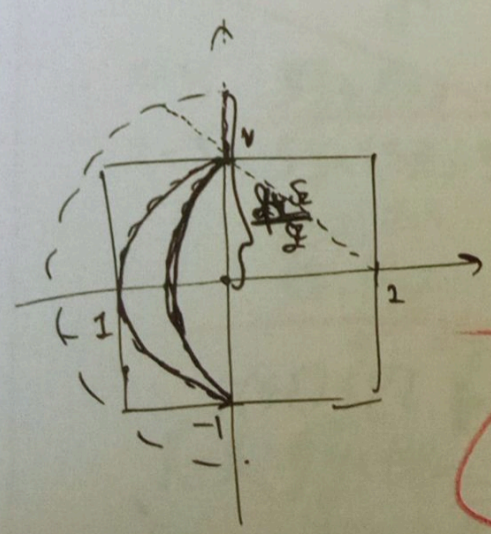
2 ушвер: $3 \cdot 2 \cdot C_7^2$
 $C_3^2 \cdot C_7^3 + C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^2 + C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_7^1$

3 ушвер: $C_3^1 (C_7^2 + C_7^1 \cdot C_4^1 + C_4^2) = x^2 + y = 9$

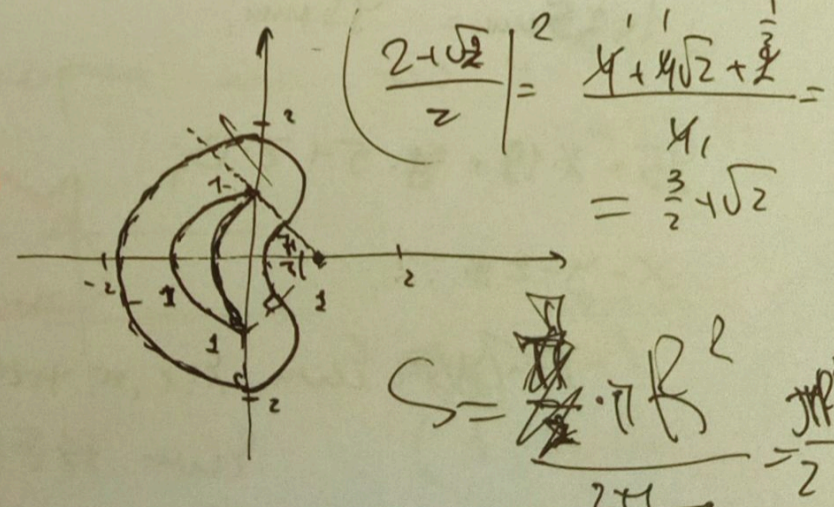
$2 \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \right) + 3 \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \right) + y + x^2 = 9$
 $x + 2 = x - 2$
 $\frac{x+2}{x-2} = 1$

$2 \left(\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \right) + 3 \left(\frac{4}{1} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} + \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \right) + \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 4}{7 \cdot 1 \cdot 1} \right) + \frac{7}{5} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} + \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 1} + \frac{3 \cdot 3}{3} =$

$= 2(10 + 35) + 3(4 + 35 + 6) + 3 \cdot 2(10 + 28) + \frac{7}{5} \cdot 6 + 21 + 14 + 3 =$



N2



$S = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$

$x^2 + y^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}; \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$
 $y + x = 1; y = 1 - x; x^2$

Червики = ~~S~~ S₄ = ~~$\frac{\pi R^2}{2}$~~ $\frac{\pi (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} + \frac{\pi (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4} - \frac{\pi (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4}$

S₁ = $\frac{\pi (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) =$

S₂ = $\frac{\pi (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4} - \frac{\pi (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}$

S₃ = $\frac{\pi \cdot 1^2}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{\pi (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4} = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{4} = 1$

~~$\frac{\pi \sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} + 1 = \pi \left(\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 1$~~

N 4

~~$\frac{\pi AC}{2} = \frac{\pi \cdot AC}{2} = \frac{\pi \cdot AC}{2} = \frac{\pi \cdot (AB + BC)}{2} =$~~

~~$Z = 40 \text{ km};$~~

~~$1 + 35 \text{ мин} = 95 \text{ мин};$~~

~~$95 = x \cdot 19 + y \cdot 5 + z \cdot 13;$~~

~~$x - y - z \equiv 2$~~

~~$x \equiv y \pmod{2}, \text{ то } y + z \equiv 2 \Rightarrow (19x + 5y + 13z) \equiv 2$~~

~~$\pmod{2}$~~

~~$x \equiv 2; y \equiv 2; z \equiv 2; \quad x \leq 5; \quad \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases} \quad 5y + 13z = 38$~~

~~$x \equiv 2 \quad (95 - 19x) \equiv 2$~~

~~$y + z \equiv 2; \text{ или } y \equiv 2, \text{ то } z \equiv 2 \text{ или } (y + z) \equiv 2$~~

Черныш

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))))}_{12};$$

$$g'(x) = \underbrace{f'(f(\dots))}_{11} \cdot \underbrace{f'(f(\dots))}_{10} \cdot \dots$$

$$f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$f(0) = \frac{0+2}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}; \quad f\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{2}{-\frac{5}{2}-2} = -\frac{4}{9}$$

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{2}{-\frac{2}{3}-2} = -\frac{3}{8};$$

$$\frac{x+2}{x-2} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{8} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$2x+4 = 2-x$$

$$x+2 = 3$$

$$2x = -5; \quad x = -\frac{5}{2}$$

$$3x = -2$$

$$x-2 = -8$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{f(x+2)}{x-2} = \frac{2}{x-2};$$

$$\frac{x+2}{x-2} - 2 = \frac{2}{x-2}$$

$$\frac{x+2}{x-2} = y$$

$$x+2 - 2(x-2) = 2$$

$$x+2 = yx-2y$$

$$y =$$

$$x = \frac{2+2y}{y-1} = \frac{2(y+1)}{y-1}$$

$$f(y) = \frac{2}{\frac{2(y+1)}{y-1} - 2} = \frac{2}{2+2y-2y+2} =$$

$$\frac{x+2}{x-2} = y; \quad x+2 = yx-2y; \quad x(y-1) = 2(y+1); \quad x = \frac{2(y+1)}{y-1}$$

$$f(y) = \frac{2}{\frac{2(y+1)}{y-1} - 2} = \frac{y-1}{1-y-y+1} = \frac{y-1}{2}$$

Черновик

$$f(x) = \frac{y-1}{2};$$

$$g(x) = f(f(\dots f(x)\dots))$$

$$g'(x) = f'(f(\dots f(x)\dots)) \cdot \dots \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

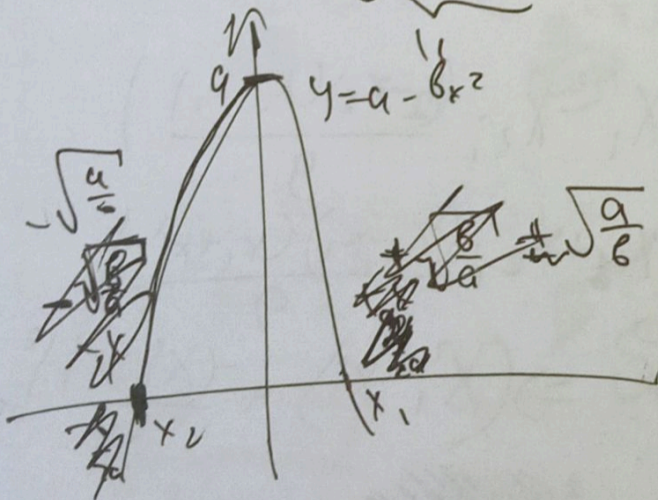
$$0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{7}{8},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$$

~~$$0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{7}{8}, \dots$$~~

$$0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \dots; \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}} - \dots - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = f'(f(\dots f(x))) \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$$



$$y = 9 - \frac{x^2}{9};$$

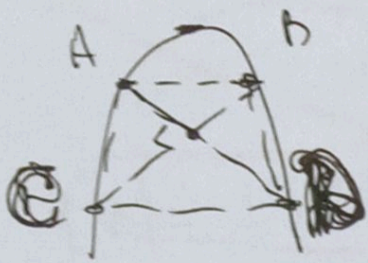
$$a = 9;$$

$$9 - bx^2 = 0$$

$$x_1 = \frac{\pm\sqrt{a}}{2b} = \frac{\pm\sqrt{9}}{2 \cdot \frac{1}{9}} = \pm\sqrt{\frac{9 \cdot 81}{1}} = \pm 9$$

$$2\sqrt{\frac{a}{b}} = 18; \sqrt{\frac{a}{b}} = 9; \frac{a}{b} = 81; a = 9; b = \frac{1}{9}$$

Чертовик



$$x_A = -x_B; y_A = y_B$$

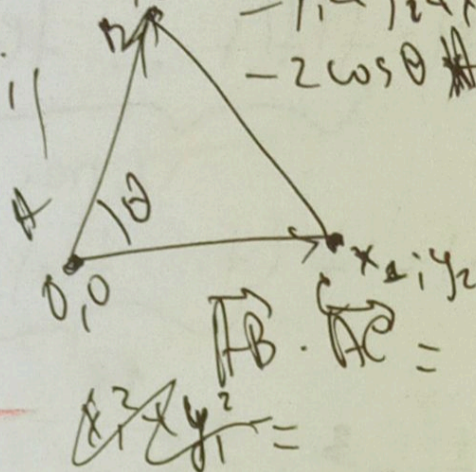
$$x_C = -x_D; y_C = y_D$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$+ y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 =$$

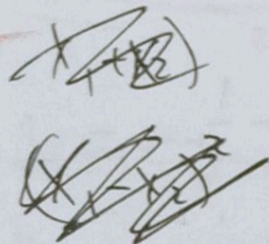
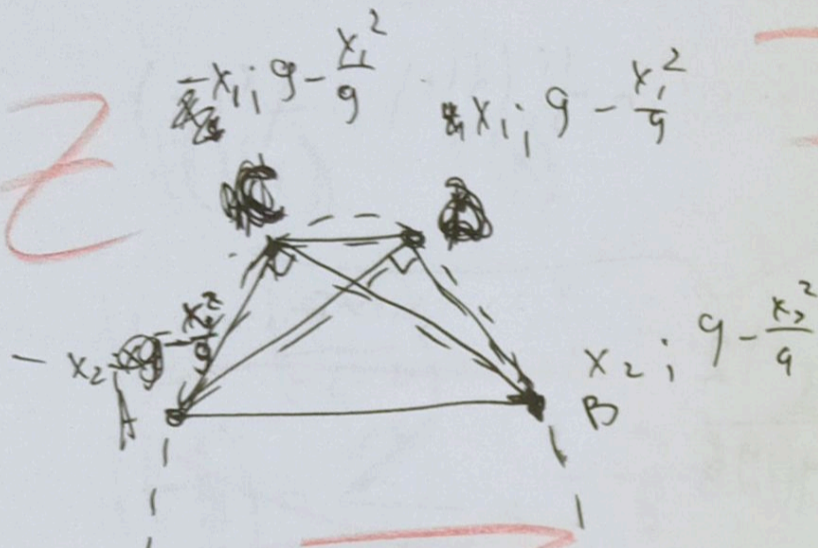
$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) =$$

$$-2 \cos \theta \cdot AB \cdot AC$$



$$1008 + 483 + 55 =$$

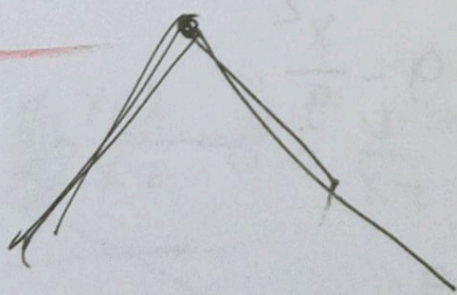
$$-8490 + 55 = 1546$$



$$h = \frac{x_2^2}{g} - \frac{x_1^2}{g} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{g}$$

$$AC^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{g} \right)^2 = (x_2 - x_1)^2 \left(1 + \frac{(x_2 + x_1)^2}{g^2} \right) =$$

$$= 2x_2$$



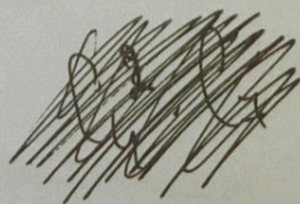
$$\vec{AC} \left(x_1 - x_2; \frac{(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{g} \right)$$

$$\vec{CB} \left(x_2 + x_1; \frac{(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{g} \right)$$

$$\vec{AC} \perp \vec{BC} \Rightarrow (x_1^2 - x_2^2) + \frac{(x_1^2 - x_2^2)^2}{81} = 0$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 81$$

$$h =$$



$$1008 + 483 + 55 =$$

$$1546$$

Истовик U_1 - универсал;
 U_2 - защитник; U_3 - нападающий; B - вратарь.
 Т.к. универсалы не могут быть
 вратарем в качестве вратарей, то
 можно выбрать $C_2^1 = 2$ свободным
 вратаря для наращения.

Если U и вратаря B являются
 U_2 защитников; U_3 нападающих
 1. Мы выбрали 0 универсалов
 2. 1 универсала
 3. 2 универсала
 4. 3 универсала.

1. Выбрав 0 универсалов, где U нас $C_3^3 \cdot C_4^2 =$
 $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ способов

2. 1 универсала. Его можно выбрать $C_3^1 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$
 свободным, он может быть либо U_1 , либо U_2 .

$$C_3^1 (C_4^1 \cdot C_7^3 + C_4^2 \cdot C_7^2) = 3(4 \cdot 35 + 6 \cdot 21) =$$

$$= 3(140 + 126) = 3 \cdot 266 = 798 \text{ способов}$$

3. 2 универсала. Можно выбрать 2 U : $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$

они могут быть $U_1 U_1$; $U_2 U_2$ и $U_2 U_3$:

Всего способов:
 $C_3^2 (C_4^1 \cdot C_7^3 + C_4^1 \cdot C_7^2 + C_4^2 \cdot C_7^1) = 3(35 + 4 \cdot 21 + 6 \cdot 7) =$

$$= 3(35 + 84 + 42) = 3 \cdot 161 = 483 \text{ способа}$$

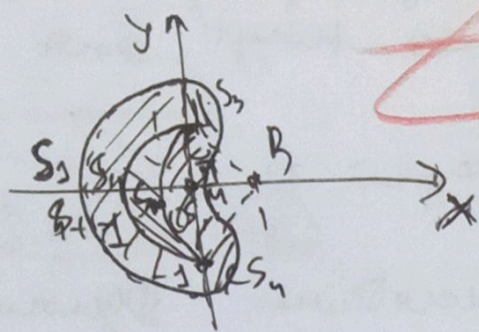
$U_3 U_3$ способов их выбрать: $C_3^3 = 1$; они могут быть: $U_1 U_1 U_1$; $U_1 U_2 U_3$;

$U_1 U_2 U_3$: $C_3^3 (C_4^2 + C_4^1 \cdot C_7^1 + C_7^2) = 1(6 + 28 + 21) = 55$ способов

Всего способов выбрать игроков: $2 \cdot (210 + 798 + 483 + 55) = 2 \cdot 1546 = 3092$

Числовик

№2



Если в каждой точке
функции месяце восстановив
перпендикуляр длиной $\frac{\sqrt{2}}{2}$, то
их концы образуют границу
"расширенного" месяца, в точках ~~(0, 1)~~ ~~(0, -1)~~
A и B
нужно будет провести окружность радиуса

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ от Oy до AB и от Oy до BC в т. С.

$$S_{\varphi} = S_{\text{месе}} + S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$S_{\text{м}} = \text{площадь месяца}; S_{\text{м}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{\pi \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4} =$

$= 1$

S_1 - площадь в которую расширяется граница окр
радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ во внешнюю окружность

$$S_1 = \frac{\pi \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2 + \frac{\sqrt{2}}{2}) =$$

$$= \frac{\pi \sqrt{2}}{8} (4 + \sqrt{2})$$

S_2 - площадь в которую расширяется граница
окр радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ во внешнюю окр.

$$S_2 = \frac{\pi (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4} - \frac{\pi (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

S_3 и S_4 - площади в которые расширяется

точки A и B; $S_3 = S_4 = \frac{3\pi}{8} \pi (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}\pi$

$$S_{\varphi} = 1 + \frac{\pi \sqrt{2}}{8} (4 + \sqrt{2}) + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{16} \cdot 2 = \frac{3\pi}{4} + 1 + \frac{\pi \sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} =$$

$$= \pi + 1 + \frac{\pi \sqrt{2}}{2} = \pi (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + 1$$

Ответ: $1 + \pi (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$

NI прокрутите.

Ответ: 3092

Числовик

24

Тусов машина проехала x км А;

у км В и z км ВС. $x, y, z \geq 0; x, y, z \in \mathbb{Z}$

$125 \text{ км} = 95 \text{ км}; 95 = 19x + 13z + 5y;$

~~Если x=2, то y+z=17~~

т.к. автомобиль вернулся в точку А, то;

Если x=2, то y+z=17 и y+z=17: 2 + * автомобиль поехал

вернулся в точку В и ВС, и т.д. $19x + 13z + 5y = 95$

Если x=2, то $19x + 13z + 5y = 95$

т.к. автомобиль поехал с начала пути и вернулся в А и В.

$x \leq 5$, т.е. $x = 1, 2, 3, 4, 5$

Если x=5, то $13z + 5y = 0$, т.е. $y+z=0$, но $\neq 0$

невозможно

x=4: $13z + 5y = 19; z \leq 1; y \leq 3; y = \frac{19-13z}{5}; 13z \equiv 19 \pmod{5}; 3z \equiv 4 \pmod{5}; z \equiv 3 \pmod{5}$

x=3: $13z + 5y = 38; z \leq 2; y \leq 7; y = \frac{38-13z}{5}; 13z \equiv 38 \pmod{5}; 3z \equiv 3 \pmod{5}; z \equiv 1 \pmod{5}$

$z = 1, 6, 11, \dots; z = 1$, т.к. $z \leq 2; y = 5;$

$x=2; y+z=2; y+z=6$, поэтому знаешь одну из переменных
у решши 7000 ур в учебнике или в интернете

~~$(3, 5, 1)$~~

~~$x=2: 13z + 5y = 57; z \leq 4; y = \frac{57-13z}{5}; 57 \equiv 13z \pmod{5}; 2z \equiv 37 \pmod{5}; z \equiv 4 \pmod{5}$~~

~~$z = 4, 9, 14, \dots; z \leq 4 \Rightarrow z = 4, y = 1;$~~

~~$x=1: 13z + 5y = 76; z \leq 5; y = \frac{76-13z}{5}; 76 \equiv 13z \pmod{5}; 1 \equiv 3z \pmod{5}; z \equiv 2 \pmod{5}; z = 2, 7, \dots; z \leq 5 \Rightarrow z = 2; y = 10;$~~

Число ~~...~~ $x:2 \Rightarrow x=2+2 \cdot 10 \cdot 2:2$, тройка ~~...~~
 (1; ~~...~~) не является решением этого уравнения.

т.к. ~~...~~ AB и BC - диаметры, то $AC = AB + BC$;

$$\cup AC = \frac{\pi \cdot AC}{2} = \pi \cdot \frac{BC}{2} + \pi \cdot \frac{AB}{2} = \cup AB + \cup BC = 40 \text{ км}$$

~~$$l = 1 \cdot 40 + 40 \cdot 2 + 10 \cdot 27 = 40 + 80 + 54 = 224$$~~

~~$$l = 3 \cdot 40 + 5 \cdot 13 + 1 \cdot 27 = 120 + 65 + 27 = 212 \text{ км}$$~~

Ответ ~~...~~ 212 км .

N5

$$y = f(x); f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}; \quad \frac{x+2}{x-2} = z; \quad x+2 = z(x-2);$$

$$x = \frac{2(z+1)}{z-2}; \quad f(z) = \frac{2}{\frac{2(z+1)}{z-2} - 2} = \frac{z-1}{z+1-2+2} = \frac{z-1}{z} < z, \forall z$$

~~$f(z) = \frac{1}{z}; \forall z$~~ Если $z=1$, то x невозможно найти.

Если $x=z$; ~~...~~ то $\frac{z+1}{z-1} = 1$, $z+1 = z-1$ невозможно.

т.е. ~~...~~ $f(z) = \frac{z-1}{z}; f'(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)' = \frac{1}{z^2}, \forall z \in \mathbb{R}$
 $f(x) = f(f(\dots(f(x))\dots))$ также у нас наклона касательной в точке ~~...~~ также имеем равен произведение ~~...~~

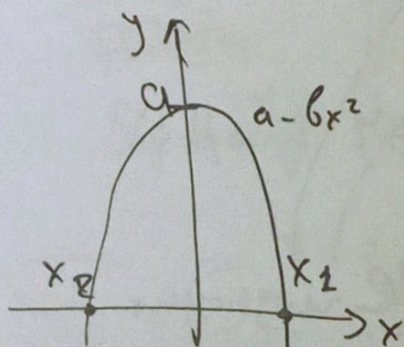
~~$$f'(x) = f'(f(\dots(f(x))\dots)) \cdot f'(f(\dots(f(x))\dots)) \cdot \dots$$~~

$$\cdot f'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096} \cdot \frac{1}{x}$$

Значит $f_{12}(x) = f'(x) = \frac{1}{4096}$

Ответ: $\frac{1}{4096}$

N6



~~$y = -bx^2 + a$~~ т.к. котр ~~...~~ $0, \neq 0$ $h = a = 9$ и $-x_1 = x_2$;

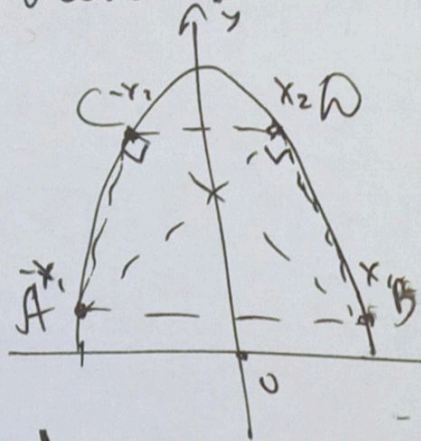
$$2x_1 = 18, x_1 = 9; x_2 = -9$$

$$-b \cdot 9^2 + 9 = 0; b = \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9};$$

$$y = -\frac{x^2}{9} + 9$$

$$y = -\frac{x^2}{9} + 9$$

Условие



Т.к. $AB \parallel Ox$, то $y_A = y_B$; x_A
 $= -\frac{x_A^2}{9} + 9 = -\frac{x_B^2}{9} + 9$

$x_A^2 = x_B^2$, А и В разны, значит

$x_A = -x_B = -x_1$

Аналогично $CD \parallel Ox$; $y_C = y_D$, значит $x_C = -x_D = x_2$
 $\angle ACD = \angle ADB = 90^\circ$; $AC \perp BC$; $|x_1| > |x_2|$

~~$y_C = y_D = -\frac{x_2^2}{9} + 9$~~ $y_A = y_D = -\frac{x_1^2}{9} + 9$

$\vec{AC} (x_1 - x_2; \frac{x_1^2 - x_2^2}{9})$; $\vec{BC} (x_1 + x_2; \frac{x_1^2 - x_2^2}{9})$

т.к. $\vec{AC} \perp \vec{BC}$, то $-(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + \frac{(x_1^2 - x_2^2)^2}{81} = 0$

$x_1^2 - x_2^2 = \frac{(x_1^2 - x_2^2)^2}{81}$

, точки ~~A и B~~ B и D разны, значит
 $x_1 \neq x_2$ т.е. $\frac{x_1^2 - x_2^2}{81} = 1$;

Расстояние между AB и CD $\neq 0$ $\frac{x_1^2 - x_2^2}{9} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{81} \cdot 9 =$
 $= 9$; ~~Ответ: 9~~ Значит точки А и В совпадают с
 корнями квадратного уравнения, а точки C и D
 совпадают между собой и являются вершиной
 параболы

Ответ: 9

и 8

Ну как минимум 3 точки принадлежат
 это $(1; 1; 3)$, $(2; 2; 1)$ и $(5; 5; 5)$

Числовик: $\begin{cases} (xy + 2x - y - 2) |y - x - 10| = (x - 4) |xy + 2x - y - 2| \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} y - x + 8 = (y - 5)^2 & y - x + 8 = y^2 - 10y + 25 \end{cases}$$

$$y - 5 \geq 0 \quad ; y \geq 5$$

~~уравнения, уравнения;~~

$$x = -y^2 + 11y - 17; \quad y_0 = \frac{-11}{2(-1)} = 5,5$$

~~$$|x - 10| = |y^2 + y^2 - 11y - 10 + 17| = |y^2 - 10y + 7|;$$~~

~~$$|x - 10| = 100 - 11 \cdot 5,5 + 17 = 47,25$$~~

$$x = -y^2 + 11y - 17; \quad y_0 = \frac{-11}{2(-1)} = 5,5$$

$$x \leq x_0 = -5,5^2 + 11 \cdot 5,5 - 17 = -30,25 + 60,5 - 17 =$$

$$= 60,5 - 47,25 = 13,25$$

~~9000 ... 10000 - наибольшее число
89 купил~~