0781761680006

78-17-61-68
(40.51)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Белова Александра Станиславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «25» февраля 2024 года

Подпись участника А. Белов

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	0	12	12	12	0	12	0	60

№1 Разобьем возможные шестерки на три группы, не пересекающиеся друг с другом: Чистовик

I) вратарь, защитники НЕ универсалы
II) вратарь, защитник + универсал
III) вратарь, 2 универсала

Нападающие выберутся из оставшихся

В каждом случае вычислим число способов и просуммируем

I) $2\cdot C_4^2\cdot C_{10}^3$ 2 – выбор вратаря C_4^2 – выбор защитников
C_{10}^3 – выбор нападающих (10 т.к 7+3, универсалов не трогали)

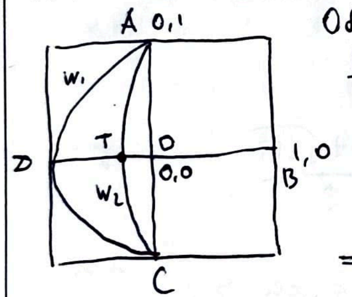
II) $2\cdot C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_9^3$ Аналогично, но на 1 универсала меньше

III) $2\cdot C_3^2\cdot C_8^3$ на 2 меньше

Суммарное кол-во способов: $I + II + III = 1440 + 2016 + 336 = 3456 + 336 =$
$= 3792$

Ответ: 3792

№2 Посчитаем сначала по отдельности длины дуг полумесяца.



Обозначим их за w_1 и w_2, тогда длина $w_1 = C_{w_1} =$ $\frac{1}{2}$ длины окр-ти с центром O радиуса $1 = \pi$

$C_{w_2} = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{2}$ (т.к $\angle ABC = 90^\circ$ => четверть длины и радиус $\sqrt{2}$) $= \pi/\sqrt{2}$

=> суммарная длина $= C = \pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Поскольку $|DT| = 2-\sqrt{2} < 0{,}6 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то суммарную площадь получившейся фигуры можно получить как сумма площади полумесяца и прямоугольника, построенного на отрезке длины C высотой $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $= S_{\text{полум.}} + S_{\text{прямоуг.}}$

$$S_{\text{полум.}} = \underbrace{\frac{\pi\cdot 1^2}{2} - \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{1}\right.}_{\text{площади секторов}} - \left.\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2}_{S_{\triangle ABC}}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 1$$

$$S_{\text{прямоуг}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\text{фигуры}} = \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1 = \boxed{\frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2}+1}$$

№3 Запишем равносильно: $\begin{cases} (x-1)(y+2)|y-x-10| = (x-4)|x-1||y+2| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$

Чистовик

Из второго условия решения существуют при $y \geq 5$, тогда
$y+2>0 \quad |y+2| = y+2$

$\begin{cases} (x-1)|y-x-10| = (x-4)|x-1| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$

1) $x>1 \quad |y-x-10| = x-4$

1.1) $y-x \geq 10 \quad y-x-10 = x-4 \quad y \overset{*}{=} 2x+6 \Rightarrow \sqrt{y-x+8} = y-5 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x+14} = 2x+1 \Leftrightarrow 4x^2+3x-13=0 \Leftrightarrow x = \frac{-4+\sqrt{217}}{8}$, $x>1$

$\Rightarrow y \overset{*}{=} 5+\frac{\sqrt{217}}{4}$, $y-x = x+6 < 9$ т.к $\sqrt{217} < 28$ тогда это не решение

1.2) $y-x<10 \quad 10+x-y = x-4 \quad y=14 \quad \sqrt{22-x} = 9 \quad x=-59<1$

2) $\boxed{x=1} \quad \sqrt{y+7} = y-5 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 5 \\ y+7 = y^2-10y+25 \end{cases}$ $(y-2)(y-9)=0 \Rightarrow \boxed{y=9}$

3) $x<1 \quad |y-x-10| = 4-x$

3.1) $y-x \geq 10 \quad y-x-10 = 4-x \quad \boxed{y=14} \quad \sqrt{22-x} = 9 \quad \boxed{x=-59} < 1$

(Проверка: $y-x = 73 > 10$)

3.2) $y-x<10 \quad 10+x-y = 4-x \quad y=2x+6$

$\sqrt{x+14} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+3x-13=0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$ т.к $x = \frac{-4 \pm \sqrt{217}}{8}$

Первый корень $< -\frac{1}{2}$ т.к $-\sqrt{217} < -4$, второй >1 решений нет.

Ответ: $(1,9)$, $(-59,14)$

N5 $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2} \iff f\left(1+2\cdot\frac{2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$ Чистовик

Пусть $\frac{x+2}{x-2}=t$, тогда $f(t)=\frac{t-1}{2}$ $\forall t$ из области определения

По индукции докажем, что $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n}=\frac{t-2^n+1}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$

1) $n=1$ $f(t)=\frac{t-1}{2}=\frac{t-2^1+1}{2^1}$

2) $\forall n\in\mathbb{N}$ $P(n)\overset{?}{\Rightarrow}P(n+1)$ $\underbrace{f(\ldots f(x))}_{n+1}=\frac{\frac{x-2^n+1}{2^n}-1}{2}=\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}$

Тогда $\underbrace{f(\ldots f(x))}_{12}=\frac{x-2^{12}+1}{2^{12}}=g(x)$

Тангенс наклона в точке $x_0=0$ — производная в этой точке

$g'(x)\equiv\frac{1}{2^{12}} \Rightarrow g'(x_0)=\frac{1}{2^{12}}$

Ответ: $\frac{1}{2^{12}}$

N7 Докажем, что наибольшее 90-значное число $\underbrace{9\ldots9}_{90}$, удовлетворяет условию задачи

По индукции докажем, что любое число из K девяток удовл. условию!

1) $k=1$ посмотрим на таблицу умножения чисел от 1 до 9 на 9 и заметим, что суммы цифр равны 9

2) $\forall k\in\mathbb{N}$ $P(k)\overset{?}{\Rightarrow}P(k+1)$ Пусть число $A_k=\underbrace{9\ldots9}_{k}$

Тогда $A_{k+1}=10\cdot A_k+9$

$\forall m$ $1\leq m\leq k+1$ $S(A_{k+1}\cdot m)\overset{?}{=}S(A_{k+1})$

$m\cdot A_{k+1}=m\cdot10\cdot A_k+9\cdot m$ $S(A_k)=S(10m\cdot A_k)=k\cdot9$

$S(A_{k+1})=9(k+1)$

Т.к ~~m~~ лежит от 1 до $k+1$, то сумма цифр при добавлении $9m$ изменится на $9k$

Тогда доказано утверждение задачи, найдено максимальное число

Ответ: число из 90 девяток

Чистовик

№4 Путь по дуге AC равен 40 км.

$t_{\breve{AB}} = 5$ мин $\quad t_{BC} = 13$ мин $\quad t_{AC} = 19$ мин

$t_{пути} = 95$ мин $\quad$ Путь $= S - ?$

Ясно, что из условия задачи путь автомобиля состоит из некоторого числа дуг α, β, γ – кол-во пройденных дуг AB, AC, BC соотв. Тогда можно записать целочисленное уравнение $5\alpha + 19\beta + 13\gamma = 95$ (мин) на кол-во минут

Начнем перебор по β. $\beta \neq 5$ т.к в этом случае тройка решений $(0,5,0)$ т.е он прошел нечетное число раз по большому кольцу, а значит не мог попасть обратно в точку A

1) $\beta = 0 \quad 5\alpha + 13\gamma = 95 \overset{13}{\equiv} 4, \overset{5}{\equiv} 0$ отсюда число $\gamma \vdots 5$

и $\gamma \in [0, 7]$ При $\gamma = 0$ противоречие как в случае $\beta = 5$

тогда $\gamma = 5$ тройка $(6,0,5)$

2) $\beta = 1 \quad 5\alpha + 13\gamma = 76 \overset{13}{\equiv} 11 \quad \alpha \in [0, 15]$

Перебором возможных α получим решение $(10,1,2)$ (смотрим на изменение остатка правой части)

3) $\beta = 2 \quad 5\alpha + 13\gamma = 57 \overset{13}{\equiv} 5$ Аналогично выпишем изменение остатка правой части

$\alpha = \overline{1,12}$: $0, -5, -10, -15, -25, -30, \ldots, -55$

Остаток должен быть 0 по $\mathrm{mod}\ 13 \Rightarrow \alpha = 1$

Тройка $(1,2,4)$

4) $\beta = 3 \quad 5\alpha + 13\gamma = 38 \overset{13}{\equiv} -1 \quad \alpha = \overline{1,7}$: $-6, -11, -16, -21, \boxed{-26}$

$\Rightarrow$ Тройка $(5,3,1)$

5) $\beta = 4 \quad 5\alpha + 13\gamma = 19 \overset{13}{\equiv} 6 \quad \alpha = \overline{1,4}$ $\quad 1, -4, -9, -14$ нет реш.

Перебором вариантов, пользуясь четностью степеней то чек ед. реш. $(5,3,1)$, тогда ответ

$65 + 120 + 27 = 212$ – пройденный путь

Ответ: 212 км

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

64 (шестьдесят четыре)

78-17-61-68 (40.51)

Черновик

$(x-1)\cancel{(y+2)}|y-x-10| = (x-4)|x-1|\cancel{|y+2|}$

$y \geq 5$

1) $x > 1$ $\quad |y-x-10| = x-4$

$\sqrt{y-x+8} = y-5 \quad y-x+8=(y-5)^2$

$|(y-5)^2-18| = x-4$

I) $y-x \geq 10 \quad y-x-10 = x-4 \quad \hat{y} = 2\hat{x}+6$ (18, 8)

$\sqrt{x+14} = 2x+1 \quad x+14 = 4x^2+4x+1 \quad 4x^2+3x-13=0 \quad D = 9+8\cdot26 = 217$

$x = \frac{-4+\sqrt{217}}{8} > 12 > 1 \quad y = \frac{-4+\sqrt{217}}{4}+6 = 5+\frac{\sqrt{217}}{4}$

$y-x = \hat{x}+6 \quad \sqrt{217} < 28$ (3)

II) $y-x<10 \quad 10+\cancel{x}-y = \cancel{x}-4 \quad y=14 \quad \sqrt{22-x} = 9 \quad x \cancel{\times} -$

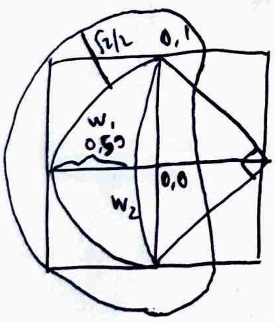
2) $\boxed{x=1} \quad \sqrt{y+7} = y-5 \iff \begin{cases} y+7 = y^2-10y+25 \\ y \geq 5 \end{cases} \quad y^2-11y+18 \quad (y-2)(y-9)=0 \quad \boxed{y=9}$

3) $x<1 \quad |y-x-10| = 4-x \quad \boxed{y=14} \quad \sqrt{22-x} = 9 \quad \boxed{x=-59}$

I) $y-x \geq 10 \quad y-x-10 = 4-x$

II) $y-x<10 \quad 10+x-y = 4-x \quad 2x = y-6 \quad y = 2x+6$

$\sqrt{x+14} = 2x+1 \iff \begin{cases} x+14 = 4x^2+4x+1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \frac{-4-\sqrt{217}}{8} < -1/2$



$C_{w_1} = \frac{1}{2}C_{w_{полн}1} = \frac{1}{2}2\pi\cdot1 = \pi \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

$C_{w_2} = \frac{1}{4}C_{w_{полн}2} = \frac{1}{4}2\pi\cdot\sqrt{2} = \pi/\sqrt{2}$

$g(x) = \frac{f(f(f...f(x)}{12} \quad x_0 = 0 \quad tg\,\alpha - ?$

$g'(x_0) -$

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x-2} = \frac{x+2-x}{x-2} = \frac{x+2}{x-2} - \frac{x}{x-2}$

$f(t) = \frac{t-1}{2} \quad f(f(t)) = \frac{\frac{t-1}{2}-1}{2} = \frac{t-3}{4}$

$f\Big(\underbrace{1+\frac{4}{x-2}}_{t}\Big) = \frac{2}{x-2} = \frac{t-1}{2}$

$\frac{x+2}{x-2} = t$

$f(f(f(t))) = \frac{\frac{t-3}{4}-1}{2} = \frac{t-7}{8}$

$f(f(f(f(t)))) = \frac{\frac{t-7}{8}-1}{2} = \frac{t-15}{16}$

$f^{12}(t) = \frac{t-2^{12}+1}{2^{12}} \quad (f^{12}(t))' = \frac{1}{2^{12}}$

$f^n(t) = \frac{t-2^n+1}{2^n} \quad \frac{\frac{t-2^n+1}{2^n}-1}{2} = \frac{t-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}$

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{\frac{x+2}{x-2}-1}{2} = \frac{x+2-x+2}{2(x-2)} = \frac{2}{x-2}$

$f(x) = \frac{x-1}{2}$

Черновик!

$C_B^A - ?$

выбрать:	Ящик:
1 вратарь	26р.
2 защитника	4 защ.
3 напад	7 напад.
	3 универсал (~~вр~~ защ & нап)

A

Вр: $2 \cdot C_4^2 \cdot C_{10}^3$
+ защ (true)
×2

Вр: $2 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_9^3$
+ защ (у)
защ. (True)

B

Вр: $2 \cdot C_3^2 \cdot C_8^3$
+ защ (у)
+ защ (у)

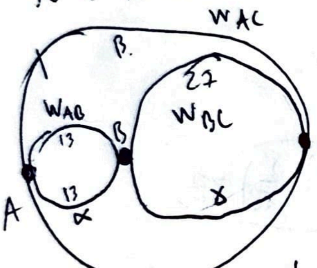
$2 \cdot \frac{24}{2 \cdot 2} \cdot \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 12 \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$
$720 \cdot 2 = 1440$

$\cancel{2 \cdot 3} \cdot \frac{8!}{\cancel{3!} \cdot 5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 56 \cdot 6 = 336$

$\cancel{2 \cdot 3} \cdot 4 \cdot \frac{9!}{\cancel{3!} \cdot 6!} = 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 72 \cdot 28 = 2016$

$$\begin{array}{r} \times 72 \\ 28 \\ \hline 576 \\ 144 \\ \hline 2016 \end{array}$$

N4 плавно



$V_{AB} \neq V_{BC} \neq V_{AC}$

$C_{AB} = 26$ $\quad t_{\breve{AB}} = 5$ мин $\quad t_{AC} = 19$ мин

$t_{\breve{BC}} = 13$ мин

$C_{BC} = 54$ $\quad (26 = 2\pi r_{AB}$ $\quad d_{AB} = 26/\pi$ $\quad d_{AC} = \frac{80}{\pi})$

$C_{AC} = 80?$ $\quad \cancel{54} = 2\pi r_{BC}$ $\quad d_{BC} = 54/\pi$

(40)

$t_{пути} = 95$ мин $\quad S - ?$ - состоит из дуг

$5\alpha + 19\beta + 13\gamma = 95$ $\quad \alpha, \beta, \gamma \in N$

~~$\alpha = 19, \beta = 5$~~ (нелеп) ~~I~~ 1) $\alpha = 1$ $\quad 19\beta + 13\gamma = 90$
$\boxed{\beta = 2 \; \gamma = 4}$ ед. реш.

2) $\alpha = 2$ $\quad 19\beta + 13\gamma = 85$
$-85 \; 66 \; 38 \; 57 \; 72$
-19
~~$\beta = 4 \; \gamma = 1$~~

$\beta = 0$ $\quad 5\alpha + 13\gamma = 95 \overset{13}{\equiv} 4 \overset{5}{\equiv} 0$

~~40~~ −10 −20
~~4~~ −13 −26 −39 −52 −65
$\gamma = 5$ $\alpha = 6$

3) $\alpha = 3$ $\quad 19\beta + 13\gamma = 80$ $\quad$ 4) $\alpha = 4$
× × ~~57~~ ×

1) $\beta = 1$ $\quad 5\alpha + 13\gamma = 76 \overset{13}{\equiv} 11$

2) $\beta = 2$ $\quad 5\alpha + 13\gamma = 57 \overset{13}{\equiv} 5$

3) $\beta = 3$ $\quad 5\alpha + 13\gamma = 38$ $\quad$ (0) $\alpha = 1$
11113 −1 $\quad$ −5 −10 −15 −20 −25 −30

4) $\beta = 4$
$5\alpha + 13\gamma = 19 \overset{13}{\equiv} 6$
1 −4 −9 −14

−6 −11 −16 −21 −26 $\alpha = 5$

$\alpha \in [0, 15]$

6	1
1	2
−4	1
−9	1
−14	5
−19	5
−24	7
−29	8
−34	7
−39	10
−44	
−49	
−54	
−59	

$\alpha = 10$

6	0	5
10	1	2
1	2	4
5	3	1

× → +2k или 2-п (γ)

$65 + 120 + 27$
$185 + 27 = 212$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$S(n) = \Sigma$ цифр n $\quad S(m \cdot n) = S(n)$ $\quad$ Черновик

max 90-значное ! $\forall m = \overline{1,n}$! 9

$S(n) = S(n) \quad S(2 \cdot n) = S(n) \dots S(n \cdot n) = S(n)$

$\underbrace{9..9}_{90} \cdot 2 \quad 1.. \quad 2.. \quad 19..8$

$99 \cdot 99 = 9801$

$m(100-1) = \overline{m00} - m$

1) m = 1знач. $\quad m \cdot 100 : \overline{m00} - m = \overline{m}(100-m)$ $\quad \Sigma$ цифр $m + \Sigma$ цифр $(100-m)$

$m = \bar{a}$

$\overline{m\,9\,(10-\bar{a})}$ $\quad \Sigma$ цифр $= \bar{a} + 9 + 10 - \bar{a} = 19$

$\overline{(\bar{a}-1)\,9\,(10-\bar{a})}$ $\quad 18$

$\forall m \in [1, 99..9]$ $\quad 9..9 = 10..0 - 1$ $\quad \overline{m00..0} - m =$

$k \quad k+1 = k \cdot 10 + 9$

$\underbrace{9..9}_{k}$ ✓ $\quad \underbrace{99..90}_{k} + 9 \quad m(9..90) + 9$ ✓ $\quad S(k)$

№1 Разобьем возможные шестерки на три группы:

~~Чистовик~~

Черновик

Вратарь, два нападающих НЕ универсала

Вратарь, универсал + нападающий НЕ универсал

Вратарь, два универсала