0 223717 060000

22-37-17-06
(39.10)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Белозубовой Виктории Евгеньевной
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
22-37-17-06	56	4	0	12	12	8	12	0	8

22-37-17-06
(39.10)

Черновик

56 (Пятьдесят шесть)
И.Пацура

№1

$C_3^1 = \frac{3!}{1!2!} = 3$

Все универсалы у защитников

1) $C_8^2 = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$

$C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 20$

→ $3\cdot20\cdot28$

1 2 3

$28 \times 3 = 84$
$84 \times 20 = 1680$

2) 2 у защитников 1 у нападающих

$C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot5!} = 21$

$C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot4!} = 35$

$3\cdot21\cdot35\cdot3$

21×35: 105, 63, 735
$735 \times 9 = 6615$

3) 1 у защитников 2 у нападающих

$C_6^2 = \frac{6!}{4!\cdot2!} = 15$

$C_8^3 = \frac{8!}{5!\cdot3!} = 56$

$3\cdot15\cdot56\cdot3$

15×56: 90, 75, 840
$840 \times 9 = 7560$

4) 3 универсала у нападающих

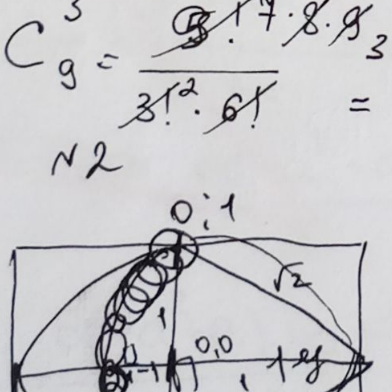
$C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot3!} = 10$

$C_9^3 = \frac{9!}{3!\cdot6!} = 12\cdot7 = 84$

$10\cdot84\cdot3$

$84 \times 3 = 252$, 2520
~~+ 840, 1092, + 735, 1827, + 84, 1911~~

№2



$\pi R^2 = \pi$ $\quad \frac{\pi}{4}$

$\pi - \frac{\pi}{4} + 1 = \frac{3\pi}{4} + 1$

2520 + 7560 = 10080
10080 + 6615 = 16695
16695 + 1680 = 18375

Черновик

$$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0$$

$$\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}+2\le 0$$

$\frac{|y|}{y}$ может принимать значении только 1 либо −1 $\frac{|x|}{x}$ аналогично

это 1 и это 1 => не может и −1, −1 аналогично

=> только если $y<0 \Rightarrow \frac{|y|}{y}=-1$, $x>0 \Rightarrow$

$\frac{|x|}{x}=1 \Rightarrow -1-1+2=0$ =

=> тогда модули должны быть равны 0, а $y<0$, $x>0$

$~~|x^3+y^3-19|~~=$

$x^3+y^3=19$

$x^2y+xy^2=-6$

$$\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2)=19\\ xy(x+y)=-6\end{cases}$$

Пусть $xy=v$; $x+y=t$

$x^2+2xy+y^2=t^2$

$x^2+y^2=t^2-2v$

22-37-17-06 (39.10)

Черновик

$$\begin{cases}t(t^2-3v)=19\\ vt=-6\end{cases}$$

$$\begin{cases}t^3-3vt=19\\ 3vt=-18\end{cases}$$

$t^3=1$

$t=1 \Rightarrow v=-6$

$$\begin{cases}xy=-6\\ x+y=1\end{cases}\quad\begin{cases}xy=-6\\ x=1-y\end{cases}$$

$y(1-y)=-6$

$y-y^2+6=0$

$y^2-y-6=0$

$y=3$

$\checkmark\ y=-2 \Rightarrow x=-2$

$x=3$ подходит 2 паре

Ответ: −2; 3

№5

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}$$

$$\frac{bc-a^2+a}{a}+\frac{ac-b^2+b}{b}+\frac{ab-c^2+c}{c}\quad a,b,c>0$$

$$\frac{(bc-a^2+a)bc+(ac-b^2+b)ac+(ab-c^2+c)ab}{abc}$$

$$\frac{(bc)^2-a^2bc+abc+(ac)^2-ab^2c+abc+(ab)^2-abc^2+abc}{abc}$$

$b^2(c^2-ac)$

черновик

$\frac{bc}{a} - a + 1 + \frac{ac}{b} + 1 - b + \frac{ab}{c} - c + 1 =$

$-a-b-c<0$

$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} > 0$

$\frac{ac}{b} - a = \frac{ac-ab}{b}$

5 3 1

$60+25 = 85$ мин

$\times \frac{15}{5} \; 75$

~~AB+1+1~~ BC AC

$7a + 11b + 17c = 85$

1) 7
2) 4
3) 1
4) 8
5
6) 2
7) 9
8) 6
9) 3

(537)
537 √п

$5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 80 \cdot 1 =$

$= 75 + 75 + 80 =$

$= 150 + 80 =$

$= 230$ км

77

$17 \times 5 = 85$

$63 + 22 = 85$

$7 + 33 + 34 =$

$= 40 + 34 = 84$

1) $7 + 44 + 34 =$

$=$

$17 \times 4 = 68$

$34 + 44 = 78$

$78 + 7 = 85$

$43 + 22 + 34$

$28 + 33 +$

3) $28 + 33 + 34 = 28 + 67 = 95 -$

$17 \times 4 = 68$

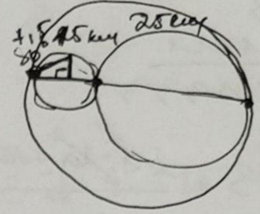
4) $28 + 66 / 37 / 85$

$35 + 22 + 17 \cdot 4$

$35 + 33 + 17 = 85$

22-37-17-06
(39.10)

черновик



$2\pi R = 15$ км

$R_1 = \frac{15}{2\pi}$

$R_2 = \frac{25}{2\pi}$

$D_б = \frac{15+25}{4\pi} = \frac{40}{4\pi} = \frac{10}{\pi}$

$R = \frac{5}{\pi}$

$2\pi \cdot \frac{5}{\pi} = 10 = 5$ км

$2\pi R = 30$

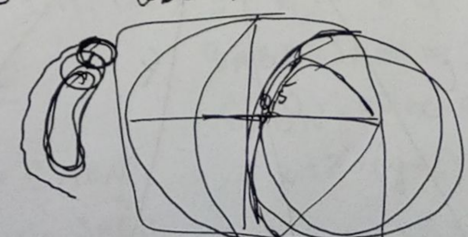
$R_1 = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi}$

$R_2 = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}$

$D_б = 2R_1 + 2R_2 = \frac{30}{\pi} + \frac{50}{\pi} = \frac{80}{\pi} \Rightarrow R_б = \frac{40}{\pi}$

$L = 2\pi \cdot \frac{40}{\pi} = 80$ км

m – ПСВ



$\times\; 999$

$999 \times 11 = 10989$

$999 \times 2 = 1998$

$999 + 3$

2997

$18 + 9 = 27$

Черновик

$\underbrace{\qquad\qquad}_{100 \text{ цифр}}$

$n\cdot 10^0 + n\cdot 10^1$ 2 4 6 12

$\frac{bn-9}{\cancel{10}9^n}$ $\frac{2+22}{6}$

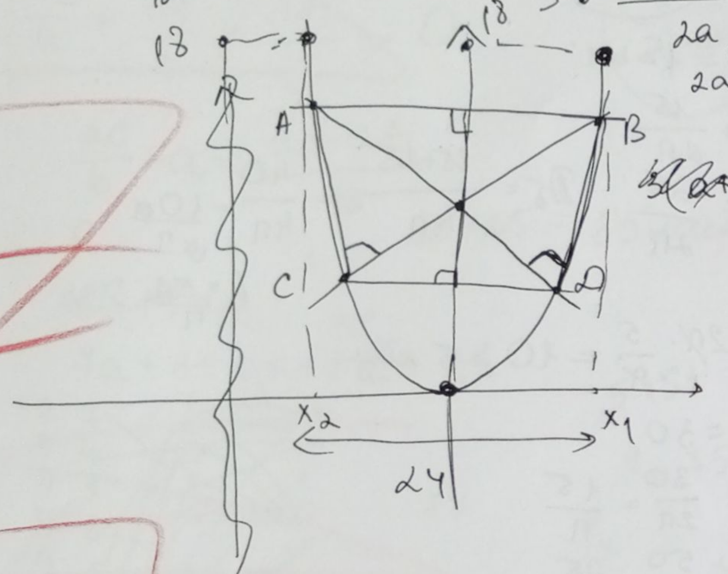
$S(mn) = n$

33 × 11111

3333333

$3\cdot\frac{2a^2-2a^2+2a}{2a} + \frac{2a^2-2a^2+2a}{2a}$

$\frac{2a}{2a^2-2a}$

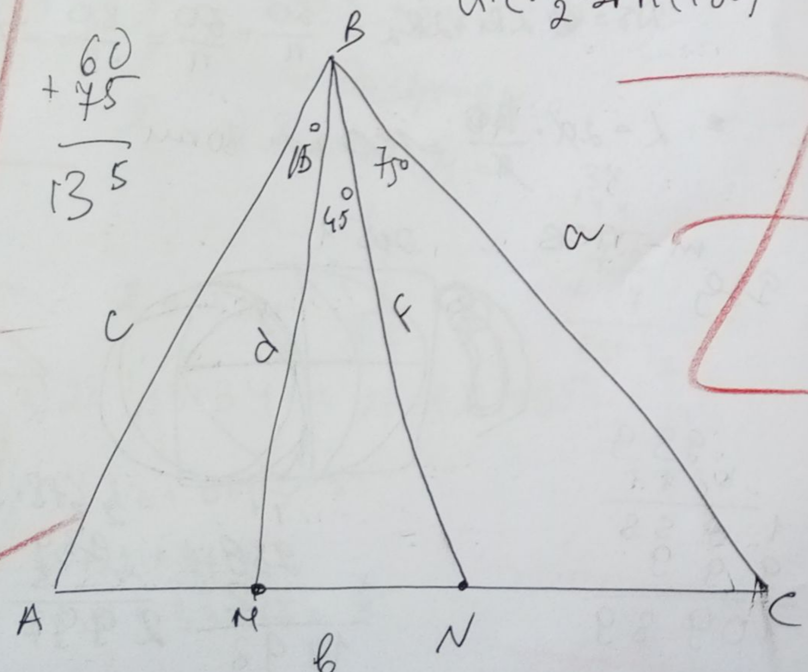


$\cancel{3(2a}$ $3\cdot 1 = 3$

$x_1 - x_2 = 24$

$a\cdot c\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(135) =$

$60 + 75 = 135$



Черновик

$\begin{cases} ABM + NBC = 5 \\ ABM\cdot NBC = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5-y \\ xy = 3 \end{cases}$

$y(5-y) = 3$

$5y - y^2 = 3$

$y^2 - 5y + 3 = 0$

$D = 25 - 12 = 13$

$y = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$S_{ABM} = c\cdot d\cdot\sin 15\cdot\frac{1}{2}$

$S_{NBC} = a\cdot f\cdot\sin 75\cdot\frac{1}{2}$

$acdf\cdot 2\sin 15\cdot\sin 75\cdot\frac{1}{8} = \cancel{4}SS$

$2\sin 15\sin 75 = \cancel{\cos(15+75)}$

$= \cos(15-75) - \cos(15+75) =$

$= \cos(60) - \cos(90^\circ) =$

$= \frac{1}{2}$

$45 + 45 = 120$

$acdf\cdot\frac{1}{16} = \cancel{4}SS = 3$

$acdf = 48$

$S_{ABN} = c\cdot f\cdot\sin 60\cdot\frac{1}{2} = c\cdot f\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_{MBN} = d\cdot f\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 45 = d\cdot f\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$

$S_{MBC} = d\cdot a\cdot\sin(120)\cdot\frac{1}{2} = d\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABN}\cdot S_{MBC} = adfc\cdot\frac{3}{16}$

$\frac{S_{ABN}}{S_{MBN}} = \frac{c}{a}$

$S_{ABN}\cdot S_{MBC} = 9$

$S_{ABN} = S_{NBC} + S_{MBN}$

$(x+z)(y+z) = 9$

$S_{MBN} = S_{NBN} + S_{ABM}$

$xy + xz + yz + z^2 = 9$

$S_{ABN} + S_{ABN} = 5 - 2S_{MBN}$

$z^2 + z(x+y) + xy = 9$

$z^2 + 5z + 3 - 9 = 0$

$z^2 + 5z - 6 = 0$

$z = 1 \Rightarrow z = 1$

$z = -6$

Чистовик

N5

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ac-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}$$

$a,b,c>0$

a, b, c – взаимозаменяемые, то есть если мы поменяем местами их значения, то выражение будет иметь такой же результат. Значит минимум будет достигаться, если $a=b=c$

$\Downarrow$

$$3\cdot\frac{2a^2-2a^2+2a}{2a}=3$$

Ответ: 3

N8

Проверим наибольшее 100 значное число

$\underbrace{999\ldots999}_{n=100}$ при умножении на любое число, если произведение больше 10, то тот остаток будет прибавляться к следующему разряду, то есть сумма цифр будет все равно оставаться равной $9\cdot n$

например

$999\times2=1998$ $\quad 1+1+8=19$ в след разряд $\quad 8+1=9$

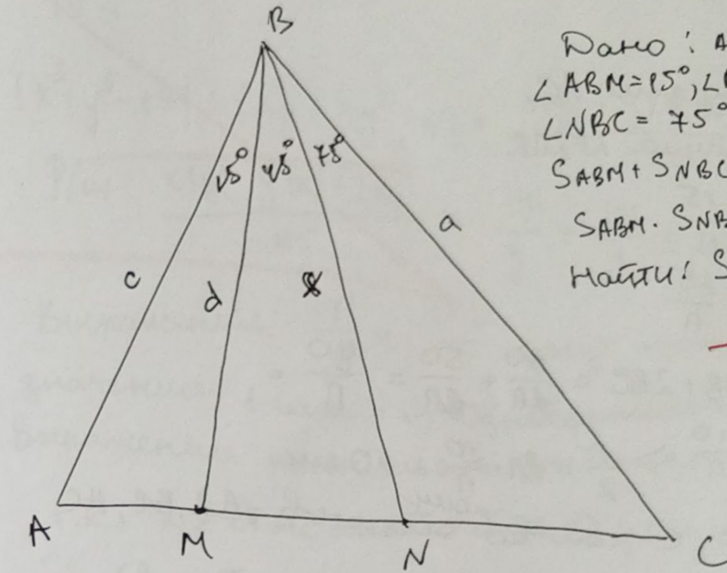
При умножение не на однозначное число мы можем умножать на простые множители либо при сложении будут также суммироваться

999×11: $999+9990=10989$ $\quad 999\cdot20=999\cdot4\cdot5$

Ответ: $\underbrace{999\ldots999}_{n=100}$

Чистовик

N4



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABM=15^\circ$, $\angle MBN=45^\circ$, $\angle NBC=75^\circ$, $S_{ABM}+S_{NBC}=5$, $S_{ABM}\cdot S_{NBC}=3$

Найти: S_{ABC}

Пусть $S_{AMB}=x$, $S_{NBC}=y$, $S_{MBN}=z$, $AC=c$, $BC=a$, $BM=d$, $BN=f$ $\Rightarrow \begin{cases}x+y=5\\ xy=3\end{cases}$

1) $x=c\cdot d\cdot\sin15\cdot\frac{1}{2}$

$y=a\cdot f\cdot\sin75\cdot\frac{1}{2}$

$acdf\cdot\underbrace{2\cdot\sin15\cdot\sin75}_{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{8}=xy$

$acdf\cdot\frac{1}{16}=3\Rightarrow acdf=48$

2) $S_{ABN}=c\cdot f\cdot\sin60\cdot\frac{1}{2}=c\cdot f\cdot\frac{\sqrt3}{4}$

$\cancel{S_{MBN}=d\cdot f}$ $S_{MBC}=d\cdot a\cdot\sin120\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt3}{4}$

$S_{ABN}\cdot S_{MBC}=adcf\cdot\frac{3}{16}\Rightarrow S_{ABN}\cdot S_{MBC}=9$

$adcf=48$

$S_{ABN}=x+z$, $S_{MBC}=y+z$ $\Rightarrow (x+z)(y+z)=9$

$xy+zx+zy+z^2=9$

$z^2+z(x+y)+xy=9$

$(x+y)=5$, $xy=3\Rightarrow z^2+5z-6=0$

$z=-6$ не подходит

$z=1$

3) $S_{ABC}=x+y+z$, $z=1$, $x+y=5$ $\Rightarrow S_{ABC}=6$

Ответ: 6

Чистовик

№6

Найдем длину дуги AC

Общая формула $L=2\pi R$

$R_{AB} = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi}$

$R_{BC} = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}$

$D\,AC = 2AB + 2BC = \frac{30}{\cancel{2}\pi} + \frac{50}{\cancel{2}\pi} = \frac{80}{\pi} =$

$\Rightarrow R_{AC} = \frac{40}{\pi} \Rightarrow \frac{L}{2} = \cancel{2}\pi \cdot \frac{40}{\pi} = 40$ км

Пусть a, b, c кол-во полуоборотов в AB, BC, AC

$7a + 11b + 17c = 85$ (кол-во полуоборотов)

Таблица в колонке множитель в строке 7, 11, 17, заполняем чтобы в клетках была последняя цифра при умножении

	7	11	17
1	7	1	7
2	4	2	4
3	1	3	1
4	8	4	8
5	5	5	~~5~~
6	2	~~6~~	~~2~~
7	9	~~7~~	~~9~~
8	6	~~8~~	~~6~~
9	3	~~9~~	~~3~~

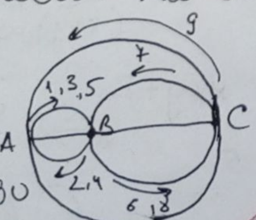
проверяем только те цифры(x) сумма которых дает остаток 5 при делении 10 т.к. ($x \equiv_{10} 85$)

Вычеркиваем цифры ~~зн~~ которые будут очень близки или больше 85 произведение

В итоге находим цифры которые подойдут и будет возможно с ними построить путь

~~это~~ Подходящие множители $a=5, b=3, c=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (35+33+17=85)$ проверим на окружностях



длина пути: $15\cdot 5 + 25\cdot 3 + 40 = 150 + 40 = 190$

Ответ: 190 км

Чистовик

N3

$$|x^3+y^3-19| + |x^2y+xy^2+6| + \frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy} = 0$$

Р/м $\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy} = \frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} + 2 \le 0$ (т.к. модули больше 0)

Выражение $\frac{|y|}{y}$ и $\frac{|x|}{x}$ могут принимать только значение 1 или −1. Одновременно и то, и то выражение принимать значение 1 и −1 не может, т.к. $2 \le 0$ не может быть $\Rightarrow y<0$, $\frac{|y|}{y}=-1$, $x>0$, $\frac{|x|}{x}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1-1+2=0$

$$\begin{cases} x^3+y^3-19=0 \\ x^2y+xy^2=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)(x^2-\cancel{2}xy+y^2)=19 \\ xy(x+y)=-6 \end{cases}$$

Пусть $xy=v$; $x+y=t$

$x^2+2xy+y^2=t^2$

$x^2+y^2=t^2-2v$

$$\begin{cases} t(t^2-3v)=19 \\ vt=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} t^3-3vt=19 \\ 3vt=-18 \end{cases}$$

$t^3=1 \Rightarrow v=-6$

$$\begin{cases} xy=-6 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-6 \\ x=1-y \end{cases}$$

$y(1-y)=-6$

$y^2-y-6=0$

$y=3$, $y=-2 \Rightarrow x=-2$, $x=3 \Rightarrow$ подходит пара $y=-2, x=3$

Ответ: $x=3, y=-2$

Чистовик

№1

Вратарей у нас 3 поэтому каждый рассмотренный случай будем умножать на 3

1) Все универсалы у защитников

$C_8^2 = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$

$C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ => кол-во комбинаций = $= 28\cdot 20\cdot 3 = 1680$

2) 2 универсала у защитников и 1 у нападающих

Будем домножать ещё на 3 чтобы каждый универсал побыл нападающим.

$C_7^2 = 21$

$C_7^3 = 35$ => $21\cdot 35\cdot 3\cdot 3 = 6615$

3) 1 универсал у защитников и 2 у нападающих аналогично как и в 2 будем умножать на 3

$C_6^2 = 15$

$C_8^3 = 56$ => $15\cdot 56\cdot 3\cdot 3 = 7560$

4) 3 универсала у нападающих

$C_5^2 = 10$

$C_9^3 = 84$ => $84\cdot 3\cdot 10 = 2520$

Общее кол-во комбинаций: $1680 + 6615 + 7560 + 2520 = 18375$

Ответ: 18375