



0 3 1 2 0 6 0 0 1 0 0 0 5

31-20-60-01

(40.41)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 3

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «ЛОМОНОСОВ»
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

БИЗЮКОВОЙ АННЫ АЛЕКСАНДРОВНЫ
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» ФЕВРАЛЯ 2024 года

Подпись участника

Бизюкова

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	12	12	12	12	0	8	0	56
-	+	+	+	+	-	+	=	

Handwritten signatures and marks.

31-20-60-01
(40,41)

ЧИСТОВИК

Задача 1

1" B" 2" 3" H" - необходимо выбрать

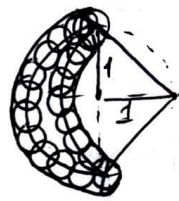
2" B" 5" 3" 6" H" 3" Y" - существует из ком. каро
выбрать

- \exists 2 способа выбрать вратаря
- \exists $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способов выбрать 2х защитников (без универсалов)
- \exists $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$ способов выбрать 3х нападав. (без универсалов)

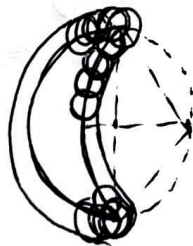
Т.о. всего способов $2 \cdot 10 \cdot 20 + 36 = 436$

Ответ: 436

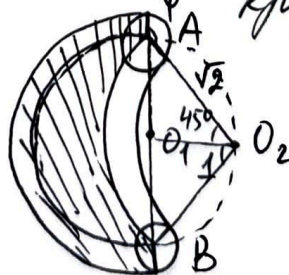
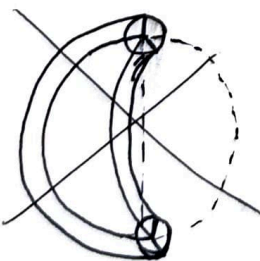
Задача 2



радиус кривизны первой дуги $R=1$, второй $R_2 = \sqrt{2}$ (или с общим центром, после того как краска расстелится, фигуру можно представить как два полукруга радиусами $r = \frac{1}{3}$ и сектора с радиусом



$r = \frac{1}{3}$ (на конусах полушара), исходной полушара и две "тонких" дуги (шириной $r = \frac{1}{3}$)



Кривизны секторами кругов с общ. угол

$$\varphi = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\varphi}{360} \cdot \frac{3\pi r^2}{4} = \frac{135}{360} \cdot \frac{3\pi \cdot \frac{1}{9}}{4} = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{9} = \frac{\pi}{24}$$

S_1 - площадь заштрих. фигура

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi (R_1 + r)^2}{2} - \left(\frac{\pi R_2^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2R_1 \cdot R_1 \right) =$$

$$= \frac{\pi \cdot 16}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{8\pi \cdot 2 - 9\pi}{18} + 1 = \frac{7\pi}{18} + 1 \text{ выш.}$$

S_2 - площадь дуги толщиной $\frac{1}{3}$ и радиус кривизны $\sqrt{2}$,

а ^{ЧИСТОВЫЙ} внутренняя - $(\sqrt{2}-\frac{1}{3})$. Тогда $S_2 = \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4} - \frac{\pi(\sqrt{2}-\frac{1}{3})^2}{4} =$
 $= \frac{2\pi\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}}{4} - \frac{\pi\cdot\frac{1}{9}}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} - \frac{\pi}{36}$

Т.о. суммарная площадь получится
 фигура: $S = 2 \cdot S_{\text{сект.}} + S_1 + S_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{18} + 1 + \frac{\sqrt{2}\pi}{6} - \frac{\pi}{36} =$
 $= \frac{3\pi + 14\pi + 6\sqrt{2}\pi - \pi}{36} + 1 = \frac{16\pi + 6\sqrt{2}\pi}{36} + 1 = \frac{(3\sqrt{2}+8)\pi}{18} + 1$

Ответ: $S = \frac{(3\sqrt{2}+8)\pi}{18} + 1$

Задача 3

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| & (1) \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)(y+4)|y-x-8| = (x-4)|(x-1)(y+4)| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$$

Заметим, что из (2) следует, что $y \geq 3$ и $y-x \geq -10 \Leftrightarrow x \leq y+10$. Т.е. $\begin{cases} y \geq 3 \\ x \leq 13 \end{cases} (*)$

Из (1): $(x-1)(y+4)|y-x-8| = (x-4)|(x-1)(y+4)| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |y-x-8| = (x-4) \frac{|(x-1)(y+4)|}{|(x-1)(y+4)|} \\ x \neq 1 \\ y \neq -4 \\ x=1 \\ y=-4 \text{ - не годит, } (*)! \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |y-x-8| = (x-4) \\ x > 1 \\ y \neq -4 \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} |y-x-8| = 4-x \\ x < 1 \\ y \neq -4 \\ x=1 \end{cases} \quad (b)$$

1. при $x=1$: $\sqrt{y+9} = y-3 \Leftrightarrow y+9 = y^2-6y+9 \Leftrightarrow y^2-7y=0 \Leftrightarrow y=7$
 при $y \geq 3$

Т.е. $(1; 7)$ - решение

2. При реализации случая (a):

31-20-60-01
(40.41)

ЧИСТО ВКЛ

$$\begin{cases} x > 4 \\ y \neq -4 \\ |y - x - 8| = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ y \neq -4 \\ \begin{cases} y - x - 8 = x - 4 \\ y \geq x + 8 \\ -y + x + 8 = x - 4 \\ y \leq x + 8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ y \neq -4 \\ \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y \geq x + 8 \\ y = 12 \\ y \leq x + 8 \end{cases} \end{cases}$$

Омсюра получ. 2 случая:

- $y = 12$
- $\sqrt{2x - x} = 9 \Leftrightarrow 2x - x = 81 \Leftrightarrow x = 22 - 81 = -59$
при этом тогда не вом. усл. $y \leq x + 8$!

2). $y = 2x + 4$

(2): $\sqrt{x+14} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+14 = 4x^2+4x+1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+3x-13=0 \text{ (C)} \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$

Заметим, что корни вом. усл.

$x - y - 10 \leq 0 \Leftrightarrow x - 2x - 14 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$ а также усл. $x > 4$. Но корни ур-я (C) меньше 4, следовательно не подходит (верши параболы $-\frac{3}{8}$ и при подстановке $x = 4$ $f(x) = 4x^2 + 3x - 13$ получится отриц. знач.)

Т.о. случай (a) не дает решений.

3. при реализации случая (b):

$$\begin{cases} x < 1 \\ y \neq -4 \\ |y - x - 8| = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ y \neq -4 \\ \begin{cases} y - x - 8 = 4 - x \\ y \geq x - 8 \\ -y + x + 8 = 4 - x \\ y \leq x - 8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ y \neq -4 \\ \begin{cases} y = 12 \\ y \geq x - 8 \\ y = -2x + 4 \\ y \leq x - 8 \end{cases} \end{cases}$$

Омсюра 2 случая:

1). $y = 12$ при этом все необход. усл. вом.
 2). $x = -59$

2). $y = 2x + 4$

(2): $\begin{cases} 4x^2 + 3x - 13 = 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$ При этом $x < 1$. Т.е. $x \in [-\frac{1}{2}; 1)$
 $f(x) = 4x^2 + 3x - 13$. $x = -\frac{3}{8}$ - верши параб.
 $f(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{4} - 13 < 0$ $f(1) = -6 < 0$

Из этого след, что все корни $f(x) = 0$ меньше $-\frac{1}{2}$, а больший - больше 1, тогда случай не дает решений.

Т.о. 2 реше.: $(1; 7)$ и $(-59; 12)$. Рассмотрим все случаи

Ответ: $\{(1; 7); (-59; 12)\}$

Задача 5

$f(x) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1} = f\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$

$\int \frac{1}{x+1} = t \quad f(1+2t) = -t$

$\int 1+2t = a \Rightarrow t = \frac{a-1}{2}$ Т.о. $f(a) = -\frac{a-1}{2}$

$f(f(a)) = f\left(\frac{a-1}{2}\right) = -\frac{\frac{a-1}{2}-1}{\frac{a-1}{2}} = -\frac{a-1-2}{a-1} = -\frac{a-3}{a-1}$

$f(f(f(a))) = f\left(\frac{a-3}{a-1}\right) = -\frac{\frac{a-3}{a-1}-1}{\frac{a-3}{a-1}} = -\frac{a-3-a+1}{a-3} = -\frac{a-2}{a-3}$

ЧИСЛОВИК

$$f(f(f(f(a)))) = f\left(\frac{a-7}{8}\right) = \frac{\frac{a-7}{8}-1}{2} = \frac{a-15}{16} \text{ и т.д.}$$

$$\text{T.O. } \underbrace{f(\dots f(a))}_n = \frac{a-2^{n+1}}{2^n}$$

$$\underbrace{f \dots f(a)}_9 = \frac{a-511}{512} = g(a)$$

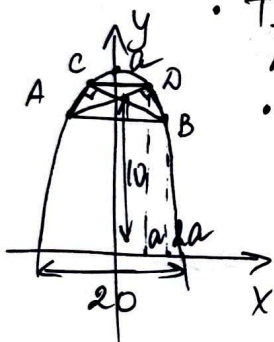
Обратная функция:

$$\begin{aligned} a &= 1+2t \\ t &= \frac{-1}{x+1} \end{aligned} \Rightarrow a = 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

Произв. $g'(a) = \frac{1}{512}$ и $g'(0) = \frac{1}{512}$

Ответ: $\frac{1}{512}$

Задача 6



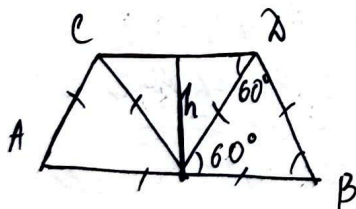
• Т.к. $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, то $ACDB$ - впис. 4х-уг.,
причем AB - диаметр опис. окр-ти

$$y = 10 - bx^2 = -bx^2 + 10 = (\sqrt{10} - \sqrt{b}x)(\sqrt{10} + \sqrt{b}x)$$

$$D = \sqrt{40b} = 20 \text{ (расстояние между корнями)}$$

$$40b = 400 \Rightarrow b = 10$$

Т.е. $y = -\frac{x^2}{2} + 10$ Т.о. $y = 10 - 10x^2$



Т.к. $(AB) \parallel (CD)$, $ACDB$ - впис. 4х-уг., то
 AB - диам. опис. окр.
 $ACDB$ - равнобедр. трап. с углами
при основ. 60° .

3 коорд. (.) D: $(a; 10(1-a^2)) \Rightarrow$

(.) C: $(-a; 10(1-a^2))$

(.) B: $(10; 10(1-1)) \Rightarrow$

(.) A: $(-10; 10(1-1))$

С одной стороны,

$$CD = 2a$$

С другой, $CD = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}}$

$$2a = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}a$$

Заметим, что т.к. $|CD| = |AB|$, то $2a = c \Rightarrow a = \frac{c}{2}$

$$h = y_A - y_B = 10 - 10a^2 - 10 + 10c^2 = 10c^2 - 10a^2 = 40a^2 - 10a^2 = 30a^2$$

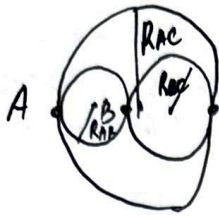
Т.е. $2\sqrt{3}a = 30a^2 \quad a \neq 0 \Rightarrow 30a = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{15}$

Тогда $h = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{15} = \frac{2 \cdot 3}{15} = \frac{2}{5} = 0,4$

Ответ: $\frac{2}{5} = h$

31-20-60-01
(40.41)

Задача 4 ЧИСЛОВИК!



$|AB| = 13 \text{ км}$ $t_{AB} = 7 \text{ мин}$
 $|BC| = 21 \text{ км}$ $t_{BC} = 11 \text{ мин}$
 $|AC| = ?$ $t_{AC} = 17 \text{ мин}$

$T = 1 \text{ час } 25 \text{ мин} = 85 \text{ мин}$

• Длина дуги AC:

$|AC| = \pi R_{AC}$; $R_{AC} = \frac{1}{2} R_{AB} + \frac{1}{2} R_{BC}$

$|BC| = \pi R_{BC} \Rightarrow R_{BC} = \frac{|BC|}{\pi}$; Аналогично, $R_{AB} = \frac{|AB|}{\pi}$

Т.е. $R_{AC} = \frac{1}{2} \left(\frac{|BC|}{\pi} + \frac{|AB|}{\pi} \right)$

$|AC| = \frac{1}{2} (|BC| + |AB|)$

$|AC| = 34 \text{ км}$

Путь автомобиля равен целому ко-во времени, и каждая дуга в окружности равна целому ко-во минут \Rightarrow ко-во пройденных дуг целое. Заметим, что оно не больше, чем $\left[\frac{85}{7} \right] = 12$ и не меньше, чем $\left[\frac{85}{17} \right] = 5$ при том случае с 5-ю дугами реализуется: шлое автом. остановится бол в (C).

$85 = a \cdot 7 + b \cdot 11 + c \cdot 17$, при этом $a+b+c$ - целое. Рассмотрим возможные значения a, b, c :

$a \cdot 7 < 85 \Rightarrow a < 12$ <small>$a \in \mathbb{Z}$</small>	$b \cdot 11 < 85 \Rightarrow b \leq 7$ <small>$b \in \mathbb{Z}$</small>	$c \cdot 17 < 85 \Rightarrow c \leq 5$ <small>$c \in \mathbb{Z}$</small>
$a=1$ 7	$b=1$ 11	$c=1$ 17
$a=2$ 14	$b=2$ 22	$c=2$ 34
$a=3$ 21	$b=3$ 33	$c=3$ 51
$a=4$ 28	$b=4$ 44	$c=4$ 68
$a=5$ 35	$b=5$ 55	
$a=6$ 42	$b=6$ 66	
$a=7$ 49	$b=7$ 77	
$a=8$ 56		
$a=9$ 63		
$a=10$ 70		
$a=11$ 77		
$a=12$ 84		

$\} b$ и c фиксированы. Тогда $7a = 85 - 11b - 17c$, где $85 - 11b - 17c$ делится на 7
 $85 - 11b - 17c \equiv 1 - 4b - 10c \equiv 0 \pmod{7} \equiv 10c + 4b - 1$
 Для каждого b найдём какое-то c :
 ~~$b=1$ $c=1$ $c=11$ и т.д. и т.д.~~

ЧИСТОВИК) $10c + 4b - 1 \equiv 0 \pmod{7}$

$b=2 \quad c=0$

Тогда $a=9$ и $4 \cdot 9 + 2 \cdot 11 = 85$

Такой спираль не реализуется, т.к. по возвращению в
 (1) в авто останется некая четная кол-во
 цифр АВ и они не позволят остановиться
 в А.

$b=3 \quad c=1$

Тогда $a=75$

Пример спирали:



~~AB~~ $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A$

Автомобиль проехал $5 \cdot 13 + 3 \cdot 21 + 1 \cdot 34 = 65 + 63 + 34 = 128 + 34 = 162 \text{ км}$

$b=4 \quad c=2$

$\Rightarrow a=1$

Такой спираль реализовать не может
 (если спираль реализуется, то $a+c$ будет
 четно) (в противоположной спирали авто
 будет в (1) В или (1) С т.к. для каждой
 пары цифр "пробегает" авто от (1) А
 к (1) В, которая "пробегает" от (1) В
 к (1) А!!! неверно. но обратно к (1) А)

$b=6 \quad c=4$

$a < 0!!!$

$b=7 \quad c=5$

$a < 0!!!$

$b=1 \quad c=6$ не корх. т.к. $c \leq 4$

Ответ: 162 км.

Задание 7

$$N = 10^{84} a_{84} + 10^{83} a_{83} + \dots + 10 \cdot a_1 + a_0, \text{ где } a_{83} \dots a_0 \in \{0; 9\}, a_{84} \in [1; 9] \cup \mathbb{N}$$

$$S(N) = a_{84} + a_{83} + \dots + a_1 + a_0$$

$$M \cdot N = 10^{84} m_{84} + 10^{83} m_{83} + \dots + 10 m_1 + m_0$$

$$N = \overline{a_{84} \dots a_0}$$

$m \cdot n = \overline{b_{169} \dots b_0}$ при этом первые $b_{168} \dots b_{84}$ могут обр.
 в 0

$$M(10^{84} \cdot a_{84} + \dots + 10 \cdot a_1 + a_0) = \overline{10^{169} b_{169} + \dots + 10 b_{84} b_0}$$

Заметим, что при умножении 9 на
 более гласно, меньшее или равное 9,
 сумма цифр остается равной 9.

числовик

$99 \cdot 2 = 198$

$99 \cdot 3 = 297$

В общем случае:

$$\underbrace{999 \dots 9}_n = 10^n \cdot 9 + 10^{n-1} \cdot 9 + \dots + 9$$

$$m \cdot \underbrace{999 \dots 9}_n = 10^n \cdot m \cdot 9 + 10^{n-1} \cdot m \cdot 9 + \dots + 9 \cdot m \quad (*)$$

Для $m \cdot 9$:

при $m=1$: 9

при $m=2$: $18 = 10 + (10 - m) = 20 - m = m \cdot 10 - m$

при $m=3$: $27 = 30 - m = m \cdot 10 - m$

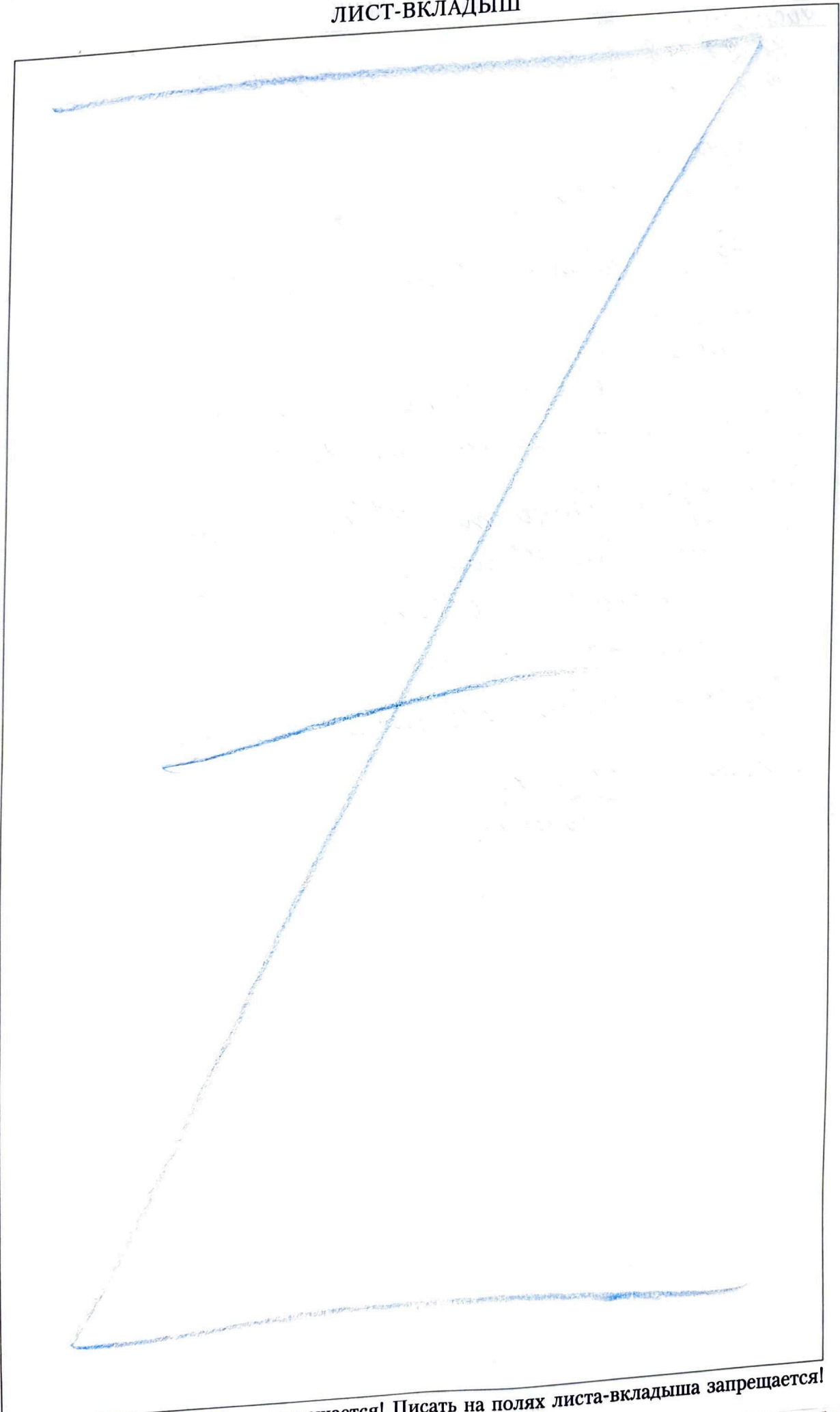
$$\begin{aligned} \text{Т.е. } (*) &= 10^n (m \cdot 10 - m) + 10^{n-1} (m \cdot 10 - m) + \dots + 10m - m = \\ &= 10^{n+1} m - 10^n m + 10^n m - 10^{n-1} m + \dots + 10m - m = \\ &= 10^{n+1} m - m = m (10^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

~~$99 \cdot 3 = 90 \cdot 3 + 9 \cdot 3 = 270 + 27$~~

$$\underbrace{9 \dots 9}_n \cdot m = 9 \cdot 10^n \cdot m + 9 \cdot 10^{n-1} m + \dots + 9 \cdot 10m + m \cdot 9$$

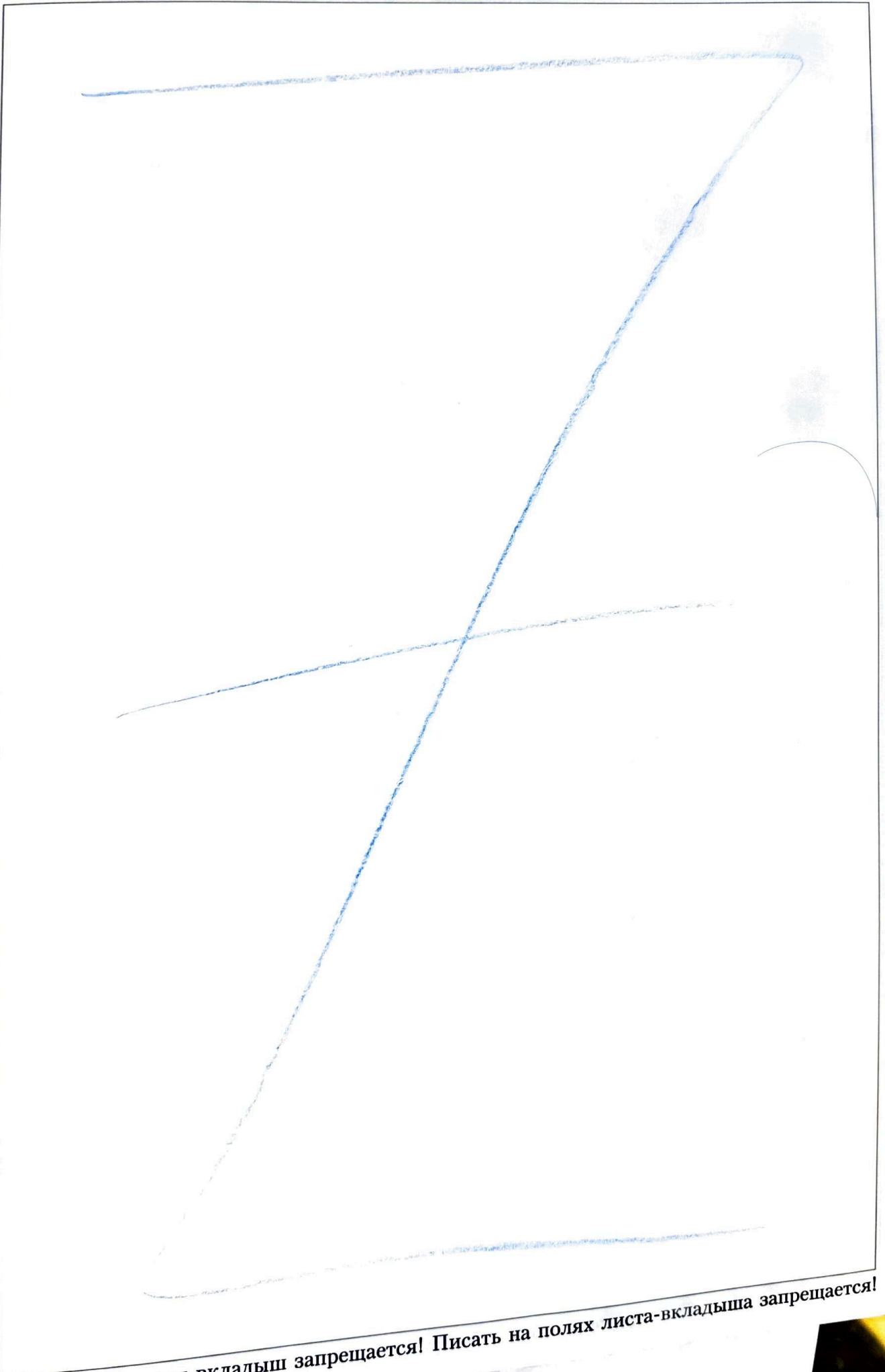
Ответ: 999 ... 99
85 цифр.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



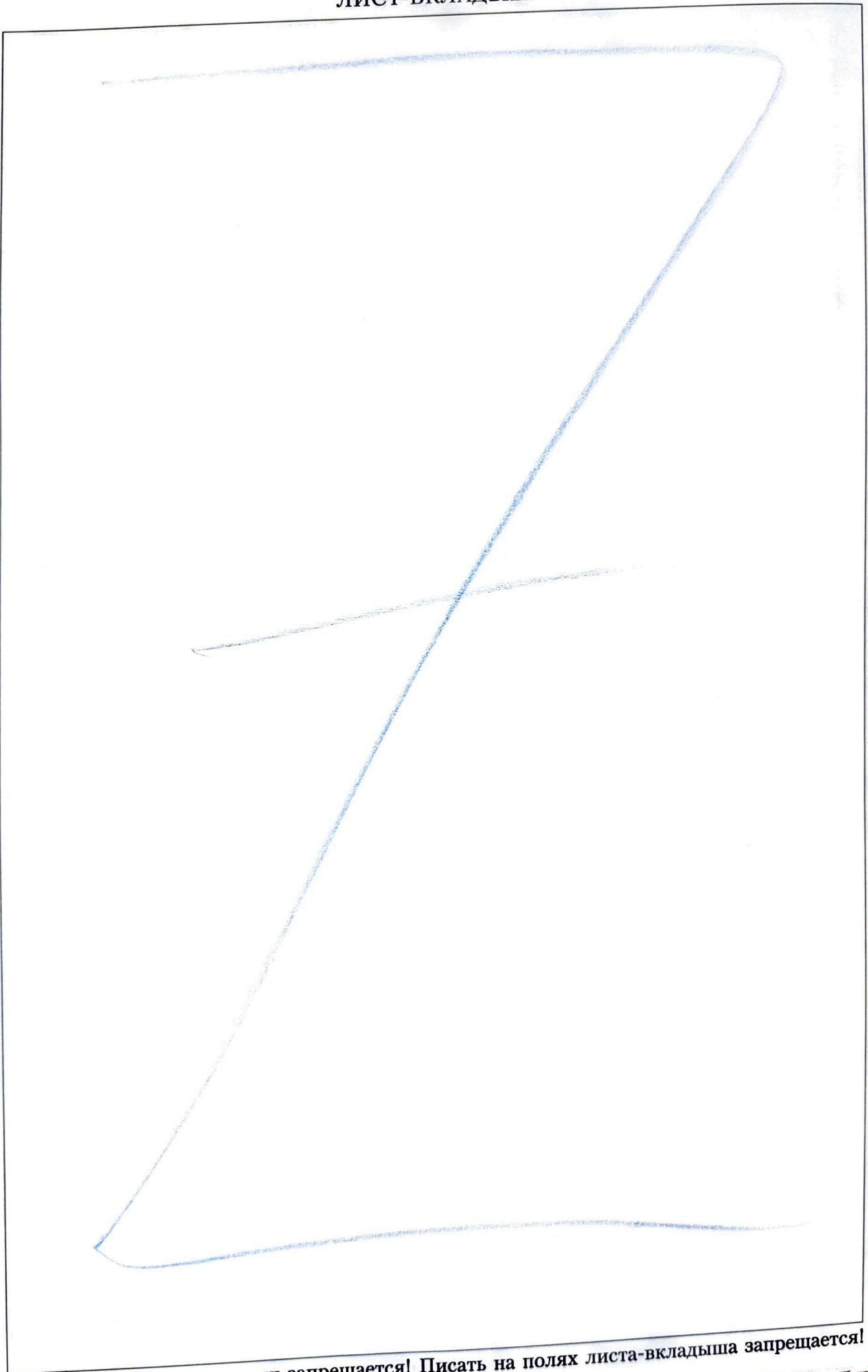
Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



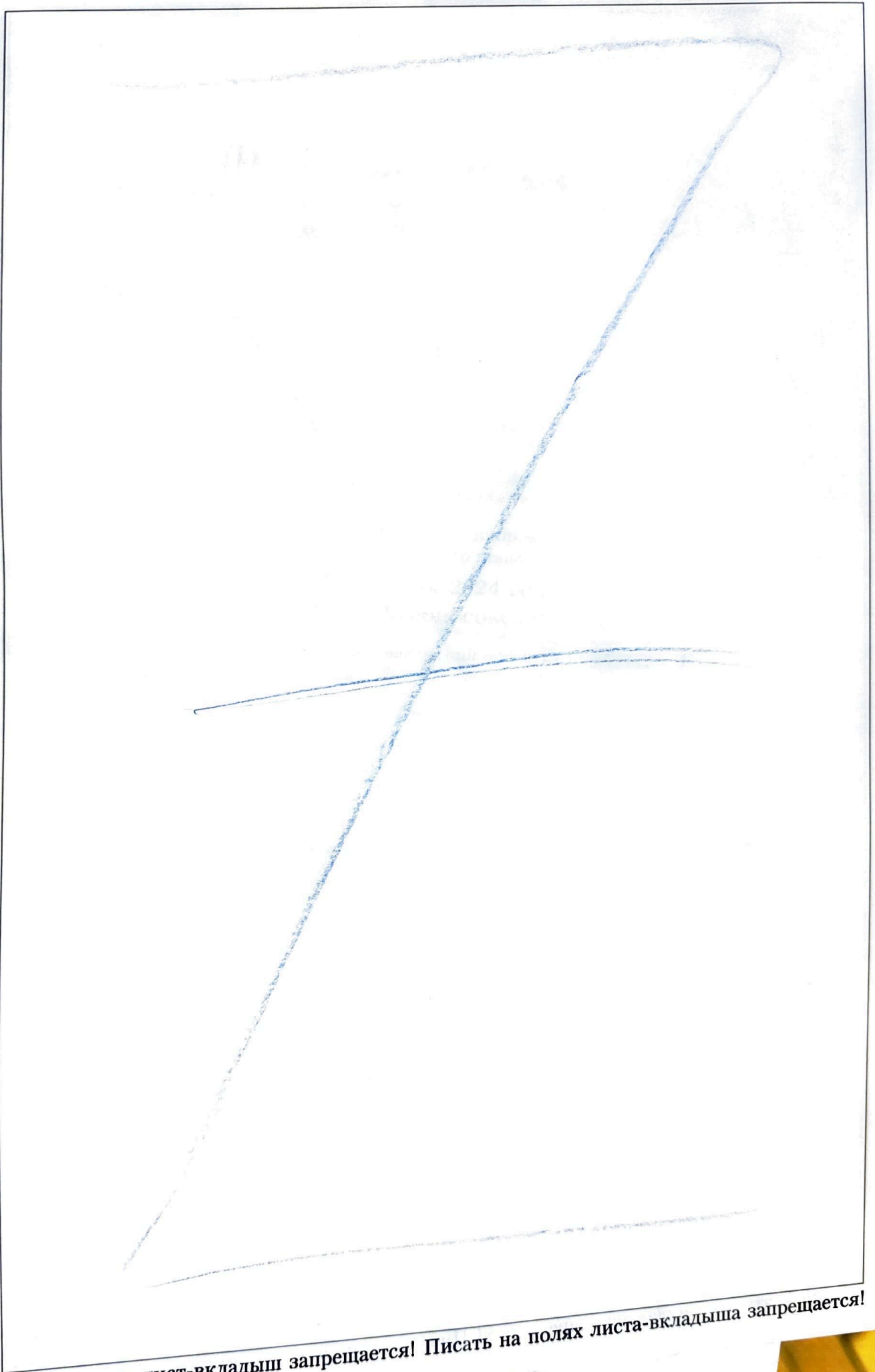
Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



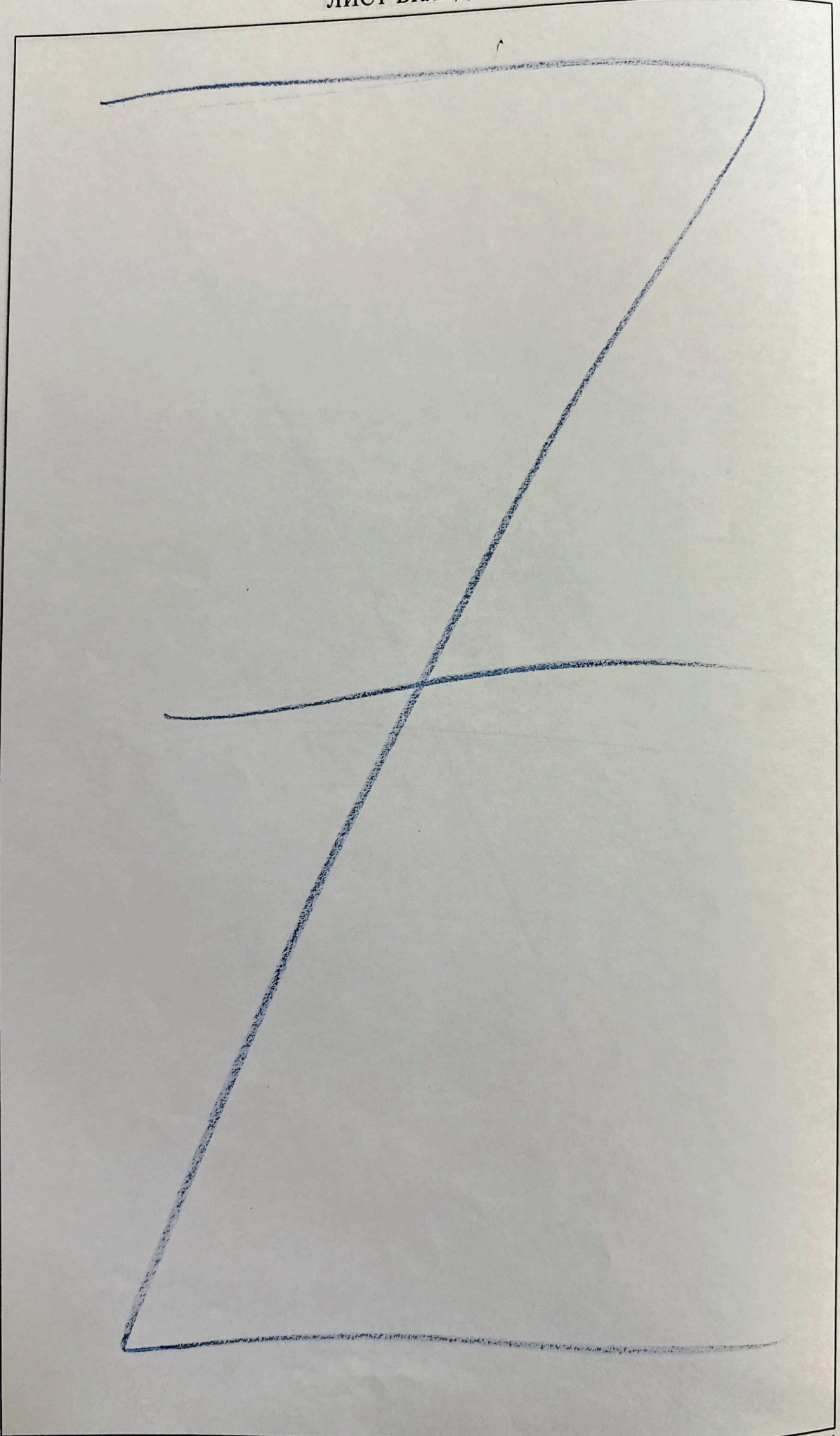
Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!