ЛИСТ ВКЛАДЫШ

0 669647 330002

66-96-47-33
(40.40)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бобриковой Анны Владимировны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника
Бобр

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	0	4	12	12	12	12	0	64

Чистовик

№ 1

Рассмотрим выбор ~~вратаря~~ защитников и нападающих

Нарисуем таблицу где в столбце К количество универсалов нападающих, а в столбце З количество универсалов защитников, а в последнем ~~спо~~ столбце кол-во способов выбрать ~~игрок~~ при таком условии защитников и нападающих

К	З	способы
1	2	$3\cdot\frac{2\cdot1}{2}\cdot\frac{6\cdot5}{2}$
0	2	$\frac{3\cdot2}{2}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}$
2	1	$\frac{3\cdot2}{2}\cdot6\cdot1\cdot5$
1	1	$3\cdot2\cdot\frac{6\cdot5}{2}\cdot5$
0	1	$\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot3\cdot5$
3	0	$\frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{5\cdot4}{2}$
2	0	$\frac{3\cdot2}{2}\cdot6\cdot\frac{5\cdot4}{2}$
1	0	$3\cdot\frac{6\cdot5}{2}\cdot\frac{5\cdot4}{2}$
0	0	$\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{5\cdot4}{2}$

Всего $45+60+90+25\cdot18+25\cdot12+10+180+$
$+450+200=195+750+190+650=$
$=1400+385=1785$

и еще 3 способа выбрать вратаря всего

$\cancel{1785}\ 1785\cdot3=3000+2100+240+15=5355$

Ответ: 5355

Чистовик

№ 3

$xy-3+3x-y=(x-1)(y+3)$

I Если ~~когда~~ $xy-3+3x-y=0$, то

1) Либо $x=1$

$\sqrt{y+8}=y-4$ $y\geq 4$ $y+8=y^2-8y+16$ $y^2-9y+8=0$ $y=8$

~~$y=1$ или $y=8$~~

$y-4=-3$ не подходит

$x=1$ $y=8$

2) Либо $y=-3$

$\sqrt{6-x}=-7$ но корень не может быть <0

II Если $xy-3+3x-y>0$, то

можно сократить на него в первом уравнении

$|y-x-9|=x-4$

1) $y-x-9\geq 0$ $y\geq x+9$

$y-x-9=x-4$

$y=2x+5$

$\sqrt{x+14}=2x+1$ $2x+5\geq 0$

$x+14=4x^2+4x+1$

~~$4x^2+3x+\ldots=0$ $D=361-176=185$~~

$4x^2+3x-13=0$ $D=9+208=217$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$

$2\cdot\frac{-3-\sqrt{217}}{8}+5>0$

$-3-\sqrt{217}+20>0$

$17>\sqrt{217}$

$2x+5<x+9$ т.к. ~~$x<0$~~ ~~$x<4$~~

$x<4$ т.к.

4 $\frac{-3+\sqrt{217}}{8}$ 4 ~~$\sqrt{217}<$~~

$-3+\sqrt{217}$ 32 $\sqrt{217}<35$,

значит эти корни не подходят

2) $y-x-9<0$

$y-x-9=4-x$ $y=13$

Чистовик

№3 продолжение

$\sqrt{22-x} = 9$

$22-x=81$ $x=-59$ $y=13$

$13+59-9>0 \Rightarrow$ противоречие

Ответ: $(1,11), (4,8)$

№4

1ч 25 минут = 85 минут

$85 : 17$ рассмотрим как можно получить 85 из чисел 7, 11 и 17

Надо получить число делящееся на 17 из чисел 7 и 11 это либо 0, ~~ка~~ $85=5\times17$

либо $17\times1=17$, но $7+11>17$ $7<17$, $11<17$ не подходит

либо $17\times2=34$, но $34-11=23 \not\vdots\, 7$, $34 \not\vdots\, 7$, $34-22 \not\vdots\, 7$

$34-33=1 \not\vdots\, 7$ $\Rightarrow$ ~~тоже~~ $34-44<0 \Rightarrow$ тоже нельзя получить из 7 и 11

либо $17\times3=51$ $51-11=40 \not\vdots\, 7$ $51-22=29 \not\vdots\, 7$ $51-55<0 \Rightarrow$

$51-33=18 \not\vdots\, 7$ $51-44=7 \vdots 7$ ✓

можно получить одним способ одн $7\times1+11\times4$

либо $17\times4=68$ $68-11=57 \not\vdots\, 7$, $68-22=46 \not\vdots\, 7$, $68-55=13 \not\vdots\, 7$, $68-66=2 \not\vdots\, 7$,

$68-33=35 \vdots 7$ ✓, $68-44=24 \not\vdots\, 7$

$68-77<0 \Rightarrow$ можно получить одним способом

$7\times5+11\times3$

либо $17\times5=85$ $85-11=74 \not\vdots\, 7$, $85-22=63 \vdots 7$, $85-55=30 \not\vdots\, 7$ $85-66=19 \not\vdots\, 7$,

$85-33=52 \not\vdots\, 7$, $85-44=41 \not\vdots\, 7$, $85-88<0$ $85=7\cdot9+11\cdot2$

$85-77=8 \not\vdots\, 7$,

И можно получить 85 из 17, 11 и 7 как $85=5\times17$, но тогда автомобиль ездит только по AC и за 5 раз приедет в C, а не в A $\Rightarrow$ не подходит.

Чистовик

~~тогда он вначале едет~~

$85 = 17\times2 + 11\times4 + 7$

~~либо по AC, тогда~~ тогда его варианты пути-

1) AC – CB – BA тогда дальше он может только по AC один раз и потом по BC, то есть в A не вернётся

или 2) AC – CA – тогда дальше он может только по AB, а потом по BC и в A не вернётся

или 3) AC – CB – BC – CA – тогда дальше по AB потом BC и в A не вернётся

или 4) AC – CB – BC – CB – BA аналогично 1) варианту

или 5) AC – CB – BC – CB – BC – CA – аналогично 3) варианту

или 6) AB – BC – CA – дальше он может только по AC, а потом по BC и в не вернётся

или 7) AB – BC – CB дальше только по BC нечётное число раз потом только CA и AC => в A не вернётся => этот вариант не ~~подходит~~ подходит

$85 = 7\times5 + 11\times\cancel{5}3 + 17$ пример

AB – BA – AB – BA – AB – BC – CB – BC – CA –

всего ~~[illegible]~~ AB в $\frac{5}{3}$ раз меньше BC т.к. длина полуокружности в 5 раз меньше маленькой => т.к. AB проходит через центры AB и большой трассы и BC проходит через центр среднего BC и большой трассы и В на прямой между центрами маленькой и большой трасс => A, B, C на одной прямой => длина AC в $\frac{8}{3}$ раз меньше дуги AB => длина AC = ~~30~~40 => на это и пути пройдено

$\cancel{30}40 + \cancel{[illegible]}75 + \cancel{[illegible]}75 = \cancel{[illegible]}$ 190 км

и подходит вариант $85 = 7\cdot9 + 11\cdot2$ также может быть если ~~[illegible]~~

Чистовик

такого не может быть т.к.
Автомобиль мог ехать только по AB и BC и
чтобы вернуться в A он должен проезжать
по AB чётное число раз но $9 \div 2$.

Ответ: 180 км

№5

пусть ~~$y = \frac{x+1}{x+1}$~~ $z = \frac{x+1}{x-1}$ $f(z) = \frac{1}{x-1}$

$z \cdot (x-1) = x+1$

$x = \frac{z+1}{z-1}$ $z \neq 1$ $f(z) = \frac{1}{\frac{z+1}{z-1} - 1} =$

$= \frac{z-1}{2} \Rightarrow$

$g(x) = \underbrace{f(f(f \ldots f(x)))}_{10} = \frac{z}{2^{10}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \ldots - \frac{1}{2^{10}} \Rightarrow$

$g'(x) = \frac{1}{2^{10}} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2^{10}}$ это и есть
тангенс угла наклона касательной

Ответ: $\frac{1}{2^{10}}$

№2

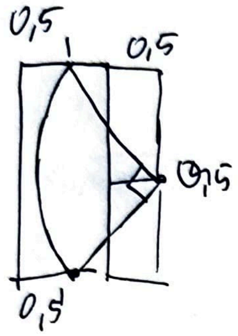
Получится вот такая фигура

Получившаяся фигура
будет иметь один край
от окружности с центром
в 0,0 и радиусом 1,5 два края
от окружностей радиусом 0,5 и
центрами (0,-1), (0,1) и один от ~~хр~~ окружности
окружности.

Чистовик

С центром 1,5 0 и радиусом $\sqrt{2}$ тогда

на площадь это $\frac{\pi\cdot 1{,}5^2}{2} + 2\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}5^2}{4} +$



$1{,}5^2\cdot 2 - \frac{1\cdot 1}{2}\cdot 2 - \frac{\pi\cdot\sqrt{2}^2}{4} =$

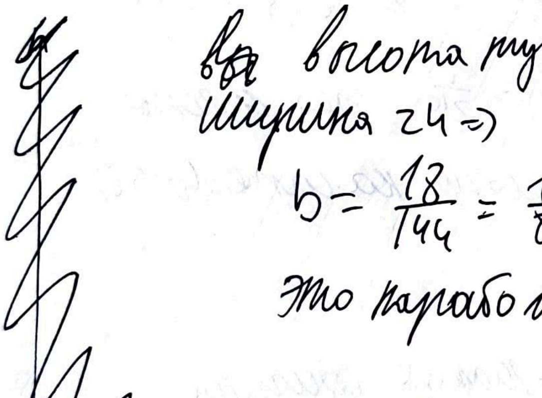
$= \pi\cdot\left(\frac{1{,}5^2}{2}+\frac{0{,}5^2}{2}-\frac{1}{2}\right)+3-1=$

$= \pi\cdot\left(\frac{2{,}25}{2}+\frac{0{,}25}{2}-0{,}5\right)+2=$

$= 0{,}75\cdot\pi+2$

Ответ: $0{,}75\pi+2$

N = ~~8~~6

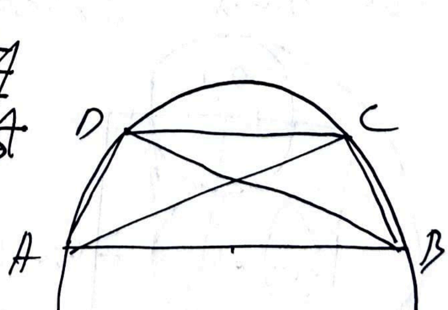


высота тунеля $=18 \Rightarrow a=18$

ширина $24 \Rightarrow 18-\left(\frac{24}{2}\right)^2\cdot b=0 \Rightarrow$

$b=\frac{18}{144}=\frac{1}{8}$

это парабола $24-\frac{x^2}{8}$



т.к. $\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$ −

ABCD − ~~это~~ это четырёхугольник вписанный в окружность

с диаметром AB пусть середина AB − O с координатами x и y координата A − x_1 y

$(x_1-x)^2=(X-x)^2+(Y-y)^2$ верно для D и, C, и B и

Черновик

$(x_1-x)^2=(X-x)^2+(Y-y)^2$ для ~~В~~ для D и

$y=\cancel{24-18x_1^2}$ и $\cancel{X=24-18X^2}$

$\cancel{(x_1-x)^2=(X-x)^2+(18x_1^2-18X^2)}$

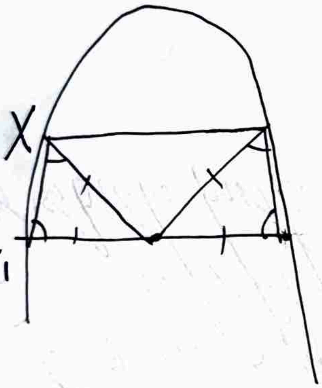
$(Y-y)^2=\sqrt{(x_1-x)^2-(X-x)^2}=$

$=\cancel{Y-y}=\sqrt{(x_1+X-2x)(x_1-X)}$

Y-y — расстояние между AB и CD

X=0 т.к. он посередине

$Y-y=\sqrt{x_1^2-X^2}$



$x_1^2=X^2+(Y-y)^2$ $\quad Y=24-\frac{X^2}{8}$ $\quad y=24-\frac{x_1^2}{8}$

$x_1^2=X^2+\left(24-\frac{X^2}{8}\right)^2+\left(24-\frac{x_1^2}{8}\right)^2-2\left(24-\frac{X^2}{8}\right)\left(24-\frac{x_1^2}{8}\right)$

$\cancel{X^2=t \quad x_1^2=n}$

$(x_1^2-X^2)=\left(\frac{x_1^2-X^2}{8}\right)^2$

$x_1^2-X^2=64 \Rightarrow$

$Y-y=\sqrt{64}=8$

$\cancel{Y-y=\sqrt{n-t}}$

$\cancel{n=t+\left(\frac{n-t}{8}\right)^2}$

$\cancel{n=t+\frac{n^2}{64}+\frac{t^2}{64}-\frac{nt}{32}}$

$\cancel{t^2+t(64+2n)+n^2-64n=0}$

$\cancel{D=4n^2-256n+4096-4n^2+4\cdot 64\cdot 4n}$

$\cancel{=2^{12}}$ $\quad t=\frac{2n-64+64}{2}=n-64$

Ответ: 8

№7 Чистовик

$S(mn)=S(n)$ Если $S(n) \vdots 9$, то $n \vdots 9 \Rightarrow$

т.к. $n>9 \Rightarrow m$ может быть равно $9 \Rightarrow$

$9mn \vdots 9 \Rightarrow S(mn) \vdots 9 \Rightarrow S(n) \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 9$

$n=\underbrace{9\ldots9}_{100}$ — ~~это~~ это в принципе наибольшее натуральное 100 значное число

$n=10^{100}-1$ и число будет выглядеть

~~Надо~~ ~~как~~ ~~т.к.~~ как пусть $m=\overline{a_1a_2\ldots a_b}$

как

$\overline{a_1a_2\ldots a_b\underbrace{00\ldots0}_{100}} - m$

~~при вычитании ... остальные ... будут ... друг друга до 9 в ... с ... последней ... $\overline{a_1a_2\ldots(a_b-1)}$ ... т.к. всего $b+100-b=100$ девяток, что и требовалось. Доказательство друг друга они будут т.к. если a_b a_b 0~~

Если в m есть 0, то просто сократим на 10

сумма $S(mn)=S(\frac{m}{10}n)$ т.к. мы просто ~~убрали 0 ...~~ убрали 0.

Теперь можем считать, что в m нет нулей.

тогда ~~всегда~~ пусть $m=\overline{a_1a_2\ldots a_b}$

$m\cdot(\underbrace{99\ldots99}_{100})=\overline{a_1a_2\ldots(a_b-1)\underbrace{99\ldots9}_{100-b}(9-a_1)(9-a_2)(9-a_3)\ldots(10-a_b)}$

$\Rightarrow$ можно сложить $(a_1+9-a_1)+(a_2+9-a_2)+\ldots+(10-a_b+a_b-1)+9(100-b)=9\cdot100$, что и требовалось.

везде $9-a_i$ т.к. предыдущее 0 при вычитании из него забрал 1

Ответ: $\underbrace{99\ldots9}_{100}$

№8 Листовик

рассмотрим сначала точки на сторонах их нет т.к. 3, 11 и 5 попарно взаимно просты, вершин 3

~~уже~~ 3, 11, 5

№3 продолжение

Если $(xy-3+3x-\cancel{9}y)<0$

$(x-1)(y+3)$

$|y-x-9|=4-x$

при $y-x-9\geq 0$ $y\geq x+9$

$y-x-9=4-x$

$y-9=4$

$y=13$

$x=-59$ подходит

~~Уу~~ при $y-x-9<0$

~~уэ~~ $9+x-\cancel{9}y=4-x$

$y=2x+5$

~~уже было~~

$\cancel{x}=$

$\cancel{1}\sqrt{x+14}=2x+1$

$x+14=4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-13=0$

$D=9+16\cdot 13=9+130+60+18=207$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{207}}{8}$

$(x-1)(2x+8)$ $\Leftarrow \frac{-3+\sqrt{207}}{8}>1$ это больше 0, а предполагалось обратное

$\frac{-3-\sqrt{207}}{4}+8>0$

$-\sqrt{207}>-29$

$2x+5<x+9$

~~точки~~ ~~АВ~~ $(-59,13)$

29 Ответ: ~~[illegible]~~ $(1,8)$, $\left(\frac{-3-\sqrt{207}}{8};\ \frac{17-\sqrt{207}}{4}\right)$

66-96-47-33 (40.40)

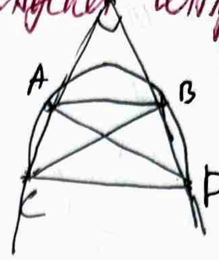
Черновик 64 (шестьдесят четыре)

$y=a-bx^2$

$S(mn)=S(n)$

3.

$a=18$



$x=12$ $x=1$ $y=-3$

$a-bx^2$

$18-b\cdot 144=0$

$b=\frac{18}{144}$ $xy-3+3x-y=0$

$y(x-1)+3(x-1)=0$

$b=\frac{2}{16}$

$(x-1)(y+3)=0$

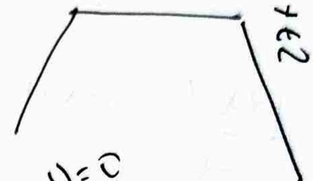
$b=\frac{1}{8}$

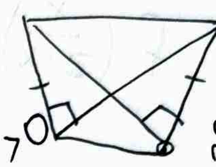
$x>1$ $y>-3$

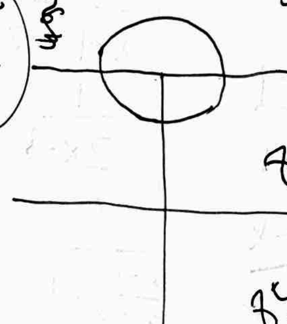
$y-x+9>0$

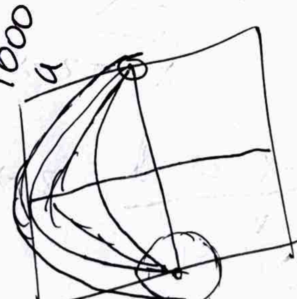
$y+9>x$

7, 11, 17









85

85 : 17

85 : 27 = 5

11, 17, 51, 68

7, 11, 18, 14

51 − 11 = 40

51 − 22 = 29

51 − 33 = 18

51 − 44 = 7

$\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$

99 · 10

990 1000

10 000

2500 00

Черновик

$\frac{x+1}{x-1}=y$

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{x-1}$ $\quad x+1=yx-y \quad y\neq 1$

$f\left(\frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{1}{x-1}-1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-1}-1}$ $\quad x(y-1)=1+y$

$x=\frac{1+y}{y-1}$ $\quad f(y)=\frac{y-1}{2}$

$f(f(y))=$

$\frac{1+x-1}{2-x}=1-x+1$ $\quad \frac{1}{\frac{1+y}{y-1}-1}$ $\quad f\left(\frac{y-1}{2}\right)=\frac{\frac{y-1}{2}-1}{2}$

$f\left(\frac{x}{2-x}\right)=\frac{1x-1}{2-x}$ $\quad \frac{1}{\frac{y-1}{1+y-y+1}}=\frac{y-1}{2}$

$\frac{x-1+2-x}{x-1-2+x}$ $\quad \frac{y-1}{2}$

81-22

61-2 59

$\frac{\frac{x-1}{2-x}+1}{\frac{x-1}{2-x}-1}$ $\quad \frac{1}{2x-3}$ $\quad \frac{2-x}{2x-3}$

$-\frac{261}{76}$
185

$\frac{1}{2x-3}=\frac{2-x}{}$ $\quad \frac{1}{\frac{x-1}{2-x}-1}$

$\frac{2-x}{x-1-2+x}$

$f\left(\frac{\frac{2-x}{2x-3}+1}{\frac{2-x}{2x-3}-1}\right)$

$44\cdot 4=160+16=$
176
19

$\frac{2-x+2x-3}{\frac{2-x}{2x-3}-1}$ $\quad 2-x-2x+3$

$(20-1)^2=400+1-40=361$

$16\cdot 13=160+48$

$\frac{x-1}{5-3x}=\frac{2x-3}{2-x-2}$

$2x+5 \quad 2x+9 \quad 208$

$x=4$ $\quad \frac{-3+\sqrt{217}}{8} \quad 4$

$-3+\sqrt{217} \quad 32$

2