0 143591 160002

14-35-91-16
(40.27)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бобровникова Ивана Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника
Бобр

14 - 35 - 91 - 16

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	12	4	12	12	12	8	0	64

 64 (шестьдесят четыре)

14-35-91-16 (40.27)

Чистовик

№1

Существует 4 способа распределения „универсалов". Посчитаю кол-во способов для каждого из них

Вратари	Защитники	Нападающие	Кол-во вариантов
2	5	6+3=9	$2\cdot C_5^2\cdot C_9^3$
2	5+1=6	6+2=8	$2\cdot3\cdot C_6^2\cdot C_8^3$
2	5+2=7	6+1=7	$2\cdot3\cdot C_7^2\cdot C_7^3$
2	5+3=8	6+0=6	$2\cdot C_8^2\cdot C_6^3$

$$\cancel{2}\cdot C_5^2\cdot C_9^3=\frac{5!\cdot9!}{2!\,3!\cdot3!\,6!}=\frac{5!\cdot9\cdot8\cdot7}{2\cdot6\cdot6}=\frac{5!\cdot14}{2}$$

$$3C_6^2\cdot C_8^3=\frac{3\cdot6!\,8!}{2!\,3!\cdot4!\cdot5!}=\frac{3\cdot8!}{2\cdot4!}=\frac{8!}{2\cdot8}=\frac{7!}{2}$$

$$3C_7^2\cdot C_7^3=\frac{3\cdot7!\cdot7!}{2!\cdot3!\cdot5!\cdot4!}=\frac{3\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot\cancel{6}}=\frac{21\cdot7!}{2\cdot4!}$$

$$C_8^2\cdot C_6^3=\frac{8!\,6!}{2!\cdot3!\cdot6!\cdot3!}=\frac{8!}{2\cdot36}$$

$$=\frac{5!}{2}\left(14+7\cdot6+\frac{21\cdot7\cdot6}{4\cdot6}+\frac{8\cdot7\cdot6}{36}\right)=$$

$$=\frac{5!}{2}\left(56+\frac{147}{4}+\frac{28}{3}\right)=\frac{5\cdot2}{2}(56\cdot12+147\cdot3+28\cdot4)=$$

$$=\cancel{3}\cdot5(8\cdot12+21\cdot3+4\cdot4)=35(96+63+16)=172\cdot35=$$

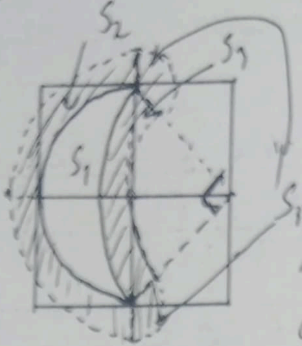
Итого будет количество вариантов $=2\cdot172\cdot35=$
$=172\cdot70=12040$

Ответ: 12040

Черновик

№2

Чтобы того как фигура располагается:



1) Дуга вписанная окр. ~~радиус~~ радиусом 1 станет дугой окружности с радиусом $\frac{4}{3}$

2) Дуга окружности радиусом $\sqrt{2}$ станет дугой радиуса $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$

3) Появятся скруглённые „концы" месяца радиусом $\frac{1}{3}$ и угловой мерой 135°

S_1 − площадь исходного месяца

S_2 − добавленная площадь от окружности радиусом 1

S_3 − добавленная площадь от окр. радиусом $\sqrt{2}$

S_4 − площади концов месяца

$S_1+S_2+S_3+2S_4 = S$ − конечная площадь

$S_1+S_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\right) =$

$= \frac{8}{9}\pi - \frac{1}{2}\pi + 1) = \frac{7}{18}\pi + 1$

$S_3 = \frac{1}{4}\pi\cdot(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+\frac{1}{3}\right) =$

$= \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)$

$2S_4 = 2\cdot\frac{135°}{360°}\cdot\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}\cdot\pi\cdot\frac{1}{9} = \frac{\pi}{12}$

$S = S_1+S_2+S_3+2S_4 = \frac{7}{18}\pi + 1 + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right) =$

$= \frac{7}{18}\pi + \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2}+\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{7}{18}\pi + \frac{\pi\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{18} + 1 = \frac{4\pi}{9} + \frac{\pi\sqrt{2}}{6} + 1 =$

$= \frac{8\pi + 3\pi\sqrt{2} + 18}{18}$

Ответ: $\frac{8\pi+3\pi\sqrt{2}+18}{18}$

14-35-91-16

Чистовик

№5

$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{2}$, $f(1-\frac{2}{x+1}) = -\frac{1}{x+1}$

$f(x) = \frac{x-1}{2}$

$\underbrace{f(f(x))}_{2} = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$

$\underbrace{f(f(f(x)))}_{3} = \frac{\frac{x-3}{4}-1}{2} = \frac{x-7}{8}$

...

$\underbrace{f(f(f(x)))}_{n} = \frac{x-2^n+1}{2^n}$

$\underbrace{f(f(...f(x)))}_{9} = \frac{x-511}{512} = \frac{x}{512} - \frac{511}{512} = g(x)$

$g'(x) = \frac{1}{512}$; $tg\,\alpha(0) = g'(0) = \frac{1}{512}$

Ответ: $\frac{1}{512}$

№4

1 час 25 мин = 85 мин

Данное время возможно при следующем маршруте: АВ–ВС–СА–АВ–ВС–СА–ВА–АВ–ВС

АВ–ВС–СА = 7+11+17 = 35 мин

АВ = 7 мин

ВС–СВ = 11·2 = 22 мин

ВА–АВ–ВС = 3·7 = 21 мин

$\Rightarrow$ 35+23+26 = 85 мин

~~Тогда расстояние, которое он проехал будет~~

равно: ~~13+22+~~. $R_{AB} = \frac{13}{\pi}$; $R_{BC} = \frac{21}{\pi}$

$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} = \frac{34}{\pi}$; $l_{AC} = AC = CA = \pi R_{AC} = 34$

Тогда расстояние, которое он проехал будет

равно: 13+22+34+17+21·2+13·3 = 17·2+11·2+34·2 =

= 34·4+26 = 136+26 = 162 км

Ответ: 162 км.

Чистовик

№3

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| & (1) \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 & (2) \end{cases}$$

(2) $\sqrt{y-x+10} = y-3$ $y-3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{y \geq 3}$

$\begin{cases} y-x+10 = (y-3)^2 \\ y-x+10 \geq 0 \end{cases}$; $y-x=(y-3)^2-10$; $\boxed{x = y+10-(y-3)^2}$

$y \geq x-10$

(1) $(x(y+4)-(y+4))|y-x-8| = (x-4)|x(y+4)-(y+4)|$

$(x-4)(y+4)|y-x-8| = (x-4)|(x-4)(y+4)|$

$(x-4)\left((y+4)|y-x-8| - |x-4||y+4|\right) = 0$

$(y+4)|y-x-8| = |x-4||y+4|$ или $x=4$

При $x=4$, то $\begin{cases} y+6=(y-3)^2 \\ y \geq -6 \end{cases}$ $y+6=y^2-6y+9$; $y^2-7y+3=0$

$D=49-12=37$; $y=\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$

$\sqrt{37} < 7 \Rightarrow$ оба корня подходят. $(4; \frac{7+\sqrt{37}}{2})$, $(4; \frac{7-\sqrt{37}}{2})$

$\frac{7-\sqrt{37}}{2} < \frac{7-\sqrt{25}}{2} = 1 < 3 \Rightarrow$ не подходит.

$(4; \frac{7-\sqrt{37}}{2})$ не подходит

$(y+4)|y-x-8| = |x-4||y+4|$

$(y+4)|(y-3)^2-18| = |x-4||y+4|$ т.к. $y \geq 3$:

$(y+4)\left(|(y-3)^2-18| - |x-4|\right) = 0$

$|(y-3)^2-18| = |x-4|$ или $y=-4$ — не подходит.

$|(y-3)^2-18| = |y+6-(y-3)^2|$

$(y-3)^2-18 = y+6-(y-3)^2$ или $(y-3)^2-18 = (y-3)^2-y-6$

$2y^2-12y+18-18-y-6=0$ $y=12$

$2y^2-13y-6=0$ $x=12+10-9^2=22-81=-59$

$D=169-48=121=11^2$ $(-59; 12)$

$y=\frac{13 \pm 11}{4} = \left[\begin{array}{l} 6 \\ \frac{1}{2} \text{ — не подходит} \end{array}\right.$

$y=6$

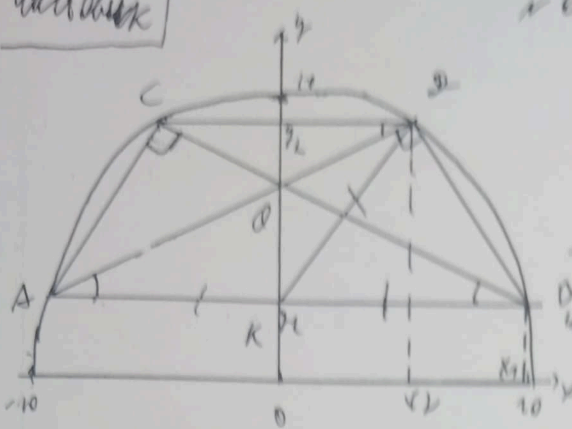
$x=6+10-3^2=16-9=7$

$(7;6)$

Ответ: $(7;6)$, $(-59;12)$, $(4; \frac{7+\sqrt{37}}{2})$.

$\boxed{\text{Чистовик}}$

№ 6



$CD \parallel AB \Rightarrow ACDB$ – трап.
$\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow$
$\Rightarrow ACDB$ – вписанная
$\Rightarrow ACDB$ – р/б трапеция $\Rightarrow$
$\Rightarrow AD \cap CB = O$, $O \in Oy$ и
$Oy \cap AB$ в середине
$Oy \cap CD$ – в середине

$AD \cap Oy = K$ – сер. $AB \Rightarrow KD$ – медиана
ΔADB – прямоугольный $\Rightarrow AK = KD = KB$.

$(0;10)$ – вершина параболы $\Rightarrow a = 10$
$(10;0)$ $0 = 10 - b \cdot 10^2$; $b = \frac{1}{10}$

$y = 10 - \frac{1}{10}x^2$

пусть $C(x_1;y_1)$ и $D(x_2;y_2)$, $0 \le x_1 \le 10$, $0 \le x_2 \le 10$

$y_1 = 10 - \frac{1}{10}x_1^2$

$y_2 = 10 - \frac{1}{10}x_2^2$

$KB = x_1$; $KD = \sqrt{(y_2-y_1)^2 + x_2^2}$

$x_1^2 = (y_2-y_1)^2 + x_2^2$

$x_1^2 - x_2^2 = \left(\frac{1}{10}x_1^2 - \frac{1}{10}x_2^2\right)^2$

$\cancel{x_1^2 - x_2^2} = \frac{1}{100}(x_1^2 - x_2^2)^2$

$x_1^2 - x_2^2 = 100 \Rightarrow x_1 = 10$, $x_2 = 0$

$y_2 - y_1 = \frac{1}{10}(x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{10} \cdot 100 = 10$

Ответ: 10

№ 7

Если к числу прибавить девятку, то его сумма цифр не изменится $\overline{ab}$ $S(\overline{ab}) = a + b$

$\overline{ab} + 9 = \overline{(a+1)(b-1)}$ $S(\overline{ab}+9) = a+1+b-1 = a+b$

Следовательно ~~наибольшее~~ если число будет состоять только из девяток, то при умножении его на что-либо его сумма цифр не изменится значит наибольшее число будет равно $\underbrace{99\ldots9}_{85}$

Ответ: $\underbrace{99\ldots9}_{85}$

Черновик

$7+77+72=35$

~~25·5=125 мин~~

85 мин

50 мин

14 — 28
22
34

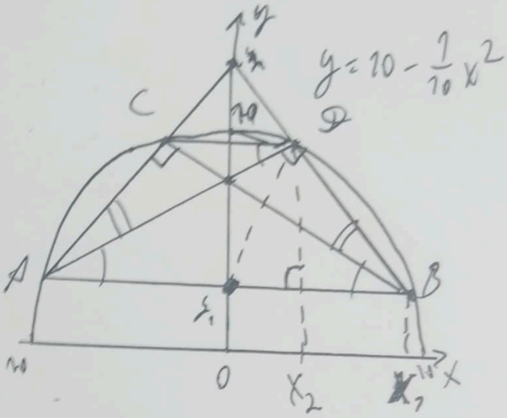
$$\overbrace{AD - BC - CA}^{35} - \overset{7}{AB} - \overset{22}{DCB} -$$
$$- \underbrace{DA - AD - DA}_{21}$$

$35+22+28=35+50=85.$

~~$2\left(3C_6^3 + 3\cdot C_5^2 + 6A_3^2 + C_6^3\cdot C_5^2\right)$~~

~~9000...000~~
~~85~~

~~27 36~~
~~950000...00~~
~~85~~



$x_1,\ y_1=10-\frac{1}{10}x_1^2$

$x_2;\ y_2=10-\frac{1}{10}x_2^2$

$x_1^2=(y_2-y_1)^2+x_2^2$

$x_1^2-x_2^2=\left(\frac{1}{10}x_1^2-\frac{1}{10}x_2^2\right)^2$

~~$x_1^2-x_2^2$~~ $=\frac{1}{100}(x_1^2-x_2^2)^{2}$

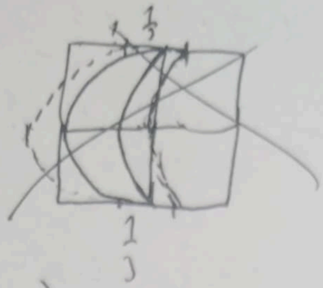
$x_1^2-x_2^2=100$

$0\le x_1^2\le 100$

$0\le x_2^2\le 100$

$\boxed{\begin{array}{l}x_1=10\\ x_2=0\end{array}}$

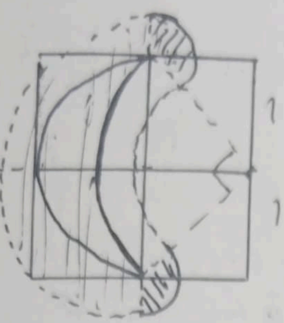
черновик



$\frac{135}{180} = \frac{3}{4}$

172

$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{2\cdot 9}\pi = \frac{8}{9}\pi$



53 + 63 + 56 + 16 = 172

$\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{\pi}{2} - 1$

$\frac{8}{9}\pi - \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{7}{18}\pi + 1$

$\frac{1}{4}\pi\cdot(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2$

$2\cdot\frac{135}{360}\cdot\pi\cdot\frac{1}{9} - \frac{3}{4}\cdot\pi\cdot\frac{1}{9} = \frac{\pi}{12}$

$\frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{12}\pi\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)$

2 3
5 9
6 8 · 3
7 7 · 3
66

$\frac{7}{18}\pi + 1 + \frac{1}{12}\pi\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{\pi}{12}$

$\frac{7}{18}\pi + 1 + \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2} + \frac{2}{3}\right) =$

$\frac{7}{18}\pi + 1 + \frac{\pi\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{18} = \frac{4\pi}{9} + \frac{\pi\sqrt{2}}{6} + 1 =$

$= \boxed{\frac{8\pi + 3\pi\sqrt{2} + 18}{18}}$

96 + 63 + 16

$C_5^2 \cdot C_9^3 = \frac{5!\cdot 9!}{3!\cdot 6!} = \frac{9!}{6\cdot 6}$

$3C_6^2\cdot C_8^3 = \frac{3\cdot 6!\cdot 8!}{4!\cdot 5!} = \frac{3\cdot 6\cdot 8!}{4!}$

$3C_7^2\cdot C_7^3 = 3\cdot 7!\cdot 2!$

$C_5^2\cdot C_9^3 = \frac{5!\cdot 9!}{2!\,3!\cdot 3!\cdot 6!} = \frac{5!\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2\cdot 6\cdot 6} = \frac{14\cdot 5!}{2}$

$3C_6^2\cdot C_8^3 = \frac{3\cdot 6!\,8!}{2!\,3!\,4!\cdot 5!}$

$3C_7^2\cdot C_7^3 = \frac{3\cdot 7!\cdot 7!}{2!\,3!\,5!\cdot 4!}$

$\frac{3\cdot 7!\cdot 7!\cdot 8}{2!\,3!\,4!\,6!\cdot 2} = \frac{3\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 6\cdot 8}{7\cdot 6\cdot 7} = \frac{7!}{2}$

$C_8^2\cdot C_6^3 = \frac{8!\cdot 6!}{2!\,3!\cdot 4!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 6} = \frac{5\cdot 8!}{2\cdot 3!}$

$5\cdot 4\cdot 3\cdot 7\cdot 47 = \boxed{19740}$

47 × 21 = 47 + 94 = 987; 987 · 20 = 19740

$\frac{5!}{2}\left(7 + 7\cdot 6 + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6}\right) = \frac{5!\cdot 7}{2}(1 + 6 + 40) = \frac{5!\cdot 7\cdot 47}{2}$

Черновик

~~$2\cdot(5\cdot 9 + 6\cdot 8\cdot 3 + 7\cdot 7\cdot 3 + 8\cdot 6) = 6\cdot 8\cdot 4 + 15\cdot 3 + 49\cdot 3 = 64\cdot 4 + 64\cdot 3 = 64\cdot 3 + (4\cdot)2$~~

$64\cdot 6\cdot 2 = 128\cdot 6 = 256\cdot 3 = 512 + 256 = \boxed{768}$

$$b = \frac{-1-5x+6}{x+1}, \quad \frac{a-1-ax}{x+1}, \quad y = 7x - 10$$

$$\underbrace{999\ldots 555}_{85} \quad S = 85\cdot 5$$

$$\underbrace{1999\ldots 9998}_{86} \quad S = 85\cdot 9$$

$$\underbrace{2999\ldots 9997}_{86}$$

$$\underbrace{899\ldots 99999991}_{86} \quad S = 85\cdot 5$$

$$\underbrace{5555555555\ldots 50}_{85}$$

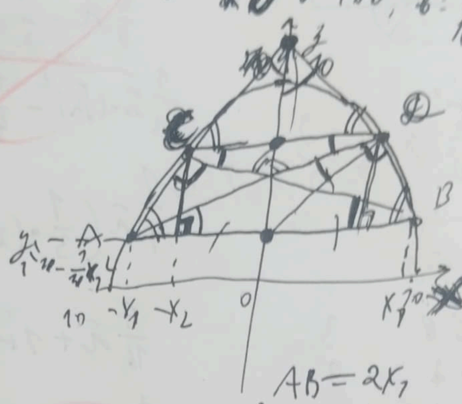
$$\underbrace{10999\ldots 9989}_{87} \quad S = 85\cdot 5$$

$$AC^2 + BC^2 = 2(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{50}(x_2^2 - x_1^2)^2 = 4x_1^2$$

$a = 20$

$0 = 10 - b\cdot 100;\ b = \frac{1}{10}$

$y = 10 - \frac{1}{10}x^2$



$AB = 2x_1$

$$AC^2 = (x_1 - x_2)^2 + (10 - \frac{1}{10}x_1^2) - (10 - \frac{1}{10}x_2^2)^2 =$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{100}(x_2^2 - x_1^2)^2 =$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + \frac{1}{100}x_2^4 + \frac{1}{100}x_1^4 - \frac{1}{50}x_1^2x_2^2$$

$$CD^2 = (x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{100}(x_2 - x_1)^2$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$f(f(x)) = \frac{\left(\frac{x-1}{2} - 1\right)}{2} = \frac{x-3}{4}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \frac{x-7}{8}$$

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{\frac{x-7}{8} - 1}{2} = \frac{x-15}{16}$$

$3,\ +4,\ 7,\ -3,\ +8,\ 15,\ -4$

$$s(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots f(x))))}_{9} = \frac{x-511}{512} = \frac{x}{512} - \frac{511}{512}$$

$$\frac{x - 2^n + 1}{2^n}$$

$$s'(x) = \boxed{\frac{1}{512}}$$