81-43-72-76
(42.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов" 2023/24
наменование олимпиады
учебного года

по математике
профиль олимпиады

Боровинского Тимофея Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
81-43-72-76	80	15	15	15	15	15	5		

81-43-72-76
(42.1)

-3 -2 -1 -3 -2 -1

n восемьдесят 80 ~~Atoo~~ черновик

$\frac{1}{2} - \frac{3}{3}$ $\frac{1}{m} - 2$ $\frac{1}{n} - 2$ $x^2 + ax + b$ $\frac{n+m}{nm}$ было цел.

$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} =$ $m \neq n$ $-a = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 4$

$b = \left(\frac{1}{m} - 2\right) x \left(\frac{1}{n} - 2\right)$

$a + b = \frac{1}{mn} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + 4 + 4 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} =$ $\frac{1}{m} + 1$

$a = 4 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{mn} - \frac{3}{m} - \frac{3}{n} + 8$ 1 -1 $mn = 1$ цел

$\frac{1}{m} - 2$ всегда отриц. -1

$- \frac{m+n}{mn}$

$n = -1$ $\frac{1}{n} - 2$

$+ \frac{1}{mn} - \frac{3}{m} - \frac{3}{n}$ цел. $= \frac{1}{mn} - 2\left(\frac{m+n}{mn}\right) + 4$

b - всегда пол.

a - всегда пол.

$\frac{1 - 3n - 3m}{mn} + 8$ $-a + \sqrt{a^2 - 4b} = \frac{2}{m} - 4$ $n = -1$ $m = 1$

$n = 1$ $-\frac{2}{m}$ -1 2

$a^2 - 4b + a^2$

$\frac{1}{m} - \frac{3}{m} + 8 =$

$n = -1$ $m = -1$ $n = -1$ $m = 1$

$a = 4$ сумма 7

$b = 3$

$x^2 + 4x + 3 = 0$ -3

4 - 5 - 6 1

3 — 5 — 6 1

3 — 6 - не подходит

2 — 3 — 5, 6; 4 — 6, 5 4

1 — 2 — 3 4 6; 3 — 5 6; 4 — 5 6; 5 — 6 8

Чистовик

Задача 1

1) Выразим a и b с помощью Теоремы Виета:

$$\begin{cases} a = 4 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = 4 - \frac{m+n}{mn}, \text{ так как } a - \text{целое}, 4 - \text{целое} \\ b = \left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right) = \frac{1}{mn} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + 4 = \frac{1}{mn} - 2\left(\frac{m+n}{mn}\right) + 4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\frac{m+n}{mn}$ - целое

так как b - целое, 4 - целое

$\frac{m+n}{mn}$ - целое, так как мы доказали это для коэффициента a, а эти коэффициенты составляют систему

$\Downarrow$

$-2\left(\frac{m+n}{mn}\right)$ - целое

$\Downarrow$

$\frac{1}{mn}$ - целое

$\Downarrow$

$m\cdot n = 1$ или $m\cdot n = -1$.

$\underbrace{m\cdot n = 1 \quad m, n - \text{целые}}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$ $\begin{cases} m=-1 \\ n=-1 \end{cases}$

Но, по условию $m \neq n$

$\Downarrow$

$m\cdot n = 1$ нас не устраивает

$\underbrace{m\cdot n = -1 \quad m, n - \text{целые}}$

$\begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases}$

Подставляем эти значения в исходные формулы для коэффициентов, получаем

$a + b = 7$, в обоих случаях

Ответ: 7.

81-43-72-76
(42.1)

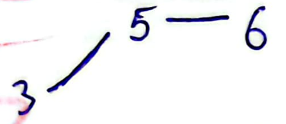
Чистовик

Задача 2

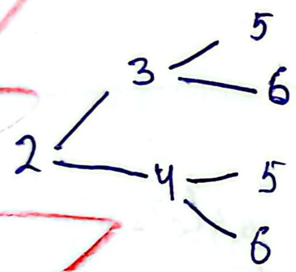
Понимаем, что стоит рассматривать варианты, если первый результат ≤ 4, а также второй результат $\neq 6$ и сумма соседних результатов не равна 7.

4 — 5 — 6

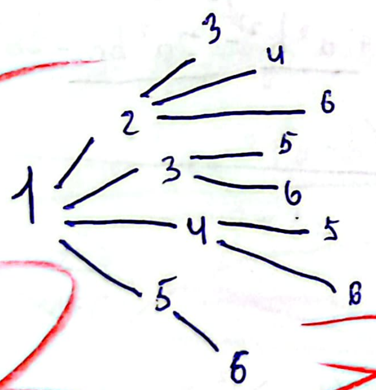
1 вариант



1 вариант



4 варианта



8 вариантов

Складываем все варианты:

14 вариантов.

Ответ: 14 вариантов.

Черновик

$\frac{bc}{a} - a + 1 + \frac{ca}{b} - b + 1 + \frac{ab}{c} - c + 1 =$

$= 3 + \frac{a^2c^2}{abc} +$ $\frac{6abc + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 +}{2abc}$

$\frac{-2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab}{} = \frac{}{}$

$\frac{a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc - 2c^2ab}{}$

$c^2(a^2 + b^2 - 2ab)$

$c^2(a-b)^2$ $a^2(c^2 + b^2 - 2bc)$

$b^2($

$\frac{6abc + a^2c^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + a^2b^2 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab}{2abc}$

$a = b = c$ $\frac{6abc}{2abc} = 3$

$$\frac{c^2(a-b)^2 + a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + 6abc}{2abc}$$

81-43-72-76 (42.1)

Чистовик

Задача 3

Внесём всё под общий знаменатель:

$$\frac{6abc+2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2b^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab}{2abc}=$$

$$=\frac{6abc+a^2c^2+a^2c^2+b^2c^2+b^2c^2+a^2b^2+a^2b^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab}{2abc}$$

Теперь сформируем группы:

$$\frac{a^2c^2+a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2+b^2c^2-2c^2ab+b^2c^2+a^2b^2-2b^2ac+6abc}{2abc}$$

Заметим формулы квадрата разности:

$$\frac{a^2(b-c)^2+c^2(a-b)^2+b^2(c-a)^2+6abc}{2abc}$$

здесь находится умножение квадратов

$\Downarrow$

минимальное значение будет 0

$\Downarrow$

один из множителей равен 0, т.к. $a,b,c>0$

$\Downarrow$

$b-c=0 \Rightarrow b=c$

Проделываем также с каждым, получаем:

$a=b=c$, тогда вся сумма этих умножений квадратов будет равна 0,

$$\frac{0+6abc}{2abc}=3$$

Ответ: 3.

$\times 120$
120

Черновик

$20 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \times 6 = 720$

$\times 720$
120

5 5 4 4 3 3 2 2 1 1

5 5 4 4 3 3 2 2 1 1

6 +

Д М П Д М Д У Д М Д

Д И Д И Д Н Д Н Д Н

Д И Н Д И П Н Д Н Д

$\times 12$
72
24
84
86400

1

Н Д Н Н Д И Д И Д Д

Ч Д Ч Н

5

Д И Д И Н Д Н Д Н Д

Д _ _ Д Н Н Д _ _ Д

5 5 4 4 3 3 2 2 1 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

2 3 4

4 1

Чистовик

Задача 4

Рассмотрим 2 варианта, когда на первом месте сидит девочка или не девочка; и когда девочка и не девочка чередуются

кол-во девочек, которые могут сесть на первое место

кол-во не девочек которые могут сюда сесть

I 5 5 4 4 3 3 2 2 1 1

II 5 5 4 4 3 3 2 2 1 1

Однако также стоит рассмотреть варианты, когда 2 „недевочки" сидят рядом:

Тогда 2 девочки стоят на краях, иначе тогда на ~~месте~~ серединных местах будет три недевочки и три девочки, причём 2 недевочки будут сидеть рядом, что при данных условиях быть невозможно.

Также пары недевочек могут сидеть только на местах: 2-3; 4-5; 6-7; 8-9, потому что иначе одна девочка попадает либо на второе место, либо на девятое, чего быть не может, так как, как мы уже выяснили: на первом и на десятом месте стоит девочка.

Получается ещё таких же 4 варианта:

5 5 4 ~~3~~4 3 3 2 2 1 1

Теперь перемножаем варианты, получаем: 86 400 вариантов.

Ответ: 86 400.

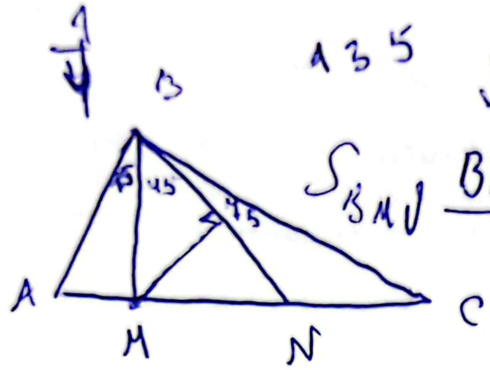
Черновик

$\sqrt{0-2}$

$\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}$ $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}$

135

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$



$S_{BMN} = \frac{BN \cdot \sin 45 \cdot BN}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{AB \cdot BC \cdot BM \cdot BN \cdot \sin 45}{7 \cdot 2}$ 2

$S_{\triangle ABM} = \frac{AB \cdot BM \cdot \sin 15^\circ}{2}$

$\frac{\sqrt{7}}{4}$

$S_{\triangle BNC} = \frac{BN \cdot BC \cdot \sin 75^\circ}{2}$

$\triangle ABC - 5 = \triangle BMN$

$\triangle ABC^2 - 5\triangle ABC = 6$

$\frac{AB \cdot BC \cdot BM \cdot BN}{8}$

6 - 1

12

$5 = \frac{\sqrt{7} \cdot AB \cdot BC \cdot BM \cdot BN}{4}$

$\frac{20}{\sqrt{7}}$

48

24 6

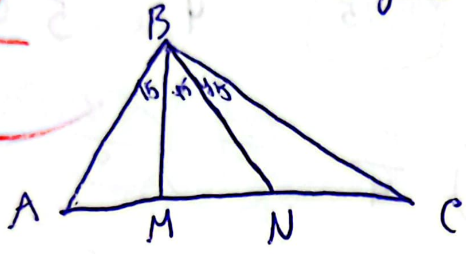
$20 = \sqrt{7}$

$3 = \frac{AB \cdot BC \cdot BM \cdot BN}{4 \cdot 2}$

$24 = AB \cdot BC \cdot BN \cdot BM$

Чистовик

Задача 5



1) $S_{\triangle ABM} = \frac{AB \cdot BM \cdot \sin 15^\circ}{2}$

2) $S_{\triangle NBC} = \frac{BN \cdot BC \cdot \sin 75^\circ}{2}$

3) $S_{\triangle ABM} \cdot S_{\triangle NBC} = 3$

$\Downarrow$

$$\frac{AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ}{4} = 3$$

$$\frac{AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC}{16} = 3$$

$$AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC = 48$$

$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin 135^\circ}{2}$; $S_{\triangle BMN} = \frac{BM \cdot BN \cdot \sin 45^\circ}{2}$

$$S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle BMN} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin 135^\circ \cdot BM \cdot BN \cdot \sin 45^\circ}{4} = 6$$

$$S_{\triangle BMN} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BNC}) = S_{\triangle ABC} - 5$$

$\Downarrow$

$$S_{\triangle ABC} \cdot (S_{\triangle ABC} - 5) = 6$$

$S_{\triangle ABC} > 0$:

$$S_{\triangle ABC}^2 - 5 S_{\triangle ABC} - 6 = 0$$

$\underline{S_{\triangle ABC} = 6}$ $\quad S_{\triangle ABC} = -1$

Ответ: 6.

$\frac{4,5}{4}$

Черновик

$+\frac{1,5n}{2^{n-}}$ 1 1,5 $\frac{17}{14}$ 17 0,75

8,5 4,25 9,25 4,625 0,

$\frac{37}{4}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{17}{2} \cdot 7$ $\frac{17}{2}$ $\frac{17}{4}$ $\frac{34}{4}$ $\frac{37}{8}$ 9,625

1 1 9,~~225~~

8,5 $\frac{47}{8}$ $7+\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{r|l} -92,5 & 85 \\ \underline{85} & \overline{1,0} \\ 750 & \end{array}$$

7

$$\frac{92,5}{85} = \frac{18,5}{17}$$

1

$\frac{17}{2}$ $\frac{37}{4}$ $\frac{77}{8}$

$$7 \cdot \frac{\overset{14}{\cancel{}} \cdot 2^{n-1} + 6(n-1)}{\underset{14}{\cancel{}} \cdot 2^{n-1} + 3(n-1)}$$

$\frac{37}{4}$ $\frac{37}{34}$ $\cdot 2+3$ $\cdot 2+6$ $\frac{77}{74}$ $\frac{77 \cdot 4}{8 \cdot 37}$

$\frac{47}{16}$ $\frac{157}{\cancel{16}\ 154}$ $\frac{157}{32}$ $\frac{317}{32}$

$\frac{17}{2}$

$7 \cdot \frac{40}{31}$ $\frac{56}{5}$ $\frac{314}{314}$

$$7 \cdot \frac{2^n+6}{2^n+3}$$ $7 \cdot \frac{8}{5} =$ n

$$7 \quad \frac{\cancel{8,5} \cdot 2 + 6 \cdot n}{n \cdot 2 + 3}$$

9,625

Чистовик

Задача 6

а) 10 л, т.к. если он доберётся до этой отметки, то получается в кувшин залили 5 л и там должно было быть больше или равно 5 л, чего быть не может, потому что тогда в предыдущий день было минимум 10 л, а уровень воды всегда повышается.