0 033285 390009

03-32-85-39
(42.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Боузина Иннокентия Валентиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
03-32-85-39	70	15	15	10	10	0	5	15	

03-32-85-39 (42.2)

Черновик

70 Семьдесят

Т. о рац. корне:

$\frac{q}{p} \Rightarrow \frac{\pm \text{делители } b}{\pm 1}$

$\left(\frac{1}{m}-2\right)^2 + a\left(\frac{1}{m}-2\right) + k = 0$ $\frac{1}{m^2} - \frac{4}{m} + 4 + \frac{a}{m} - 2a + b = 0$

$\left(\frac{1}{n}-2\right)^2 + a\left(\frac{1}{n}-2\right) + b = 0$

$b \vdots \frac{1}{m} - 2 \Rightarrow b = k\left(\frac{1}{m}-2\right)$

$b = t\left(\frac{1}{n}-2\right)$

$\begin{cases} m = 1 \\ n = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} m = -1 \\ n = -1 \end{cases}$

$\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{m}-2+a+k\right)=0$

$\cancel{\text{II}}$ $\quad$ II

0 $\quad$ 0

$\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-2+a+t\right)=0$

$\frac{1}{n} - \cancel{2} + \cancel{a} + t = \frac{1}{m} - \cancel{2} + \cancel{a} + k$

$\frac{1}{n} + t = \frac{1}{m} + k$

$t - k = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$

$\pm 3 \ \pm 1$

$3x + 2x - 1 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{3}{3} \end{cases}$

$4 + 12 = 16$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \frac{-1 \pm 2}{3}$

№1. Чистовик

По теореме о рациональном корне, если у квадратного уравнения есть к-либо рациональный корень, то он представим в виде $\frac{p}{q}$, где p — делитель свободного члена, а q — старшего, тогда:

$b \,\vdots\, (\frac{1}{m}-2)$; $b \,\vdots\, (\frac{1}{n}-2) \Rightarrow b = k(\frac{1}{m}-2)$; $b = t(\frac{1}{n}-2)$,

где k и t — целые коэффициенты, но тогда $\frac{1}{m}-2$ и $\frac{1}{n}-2$ тоже целые, т.к. b — целое.

Тогда есть только 2 варианта, при которых $\frac{1}{m} \neq \frac{1}{n}$

1). $\frac{1}{m}-2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=1$

$\frac{1}{n}-2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow n=-1$

2). $\frac{1}{m}-2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=-1$

$\frac{1}{n}-2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow n=1$

(Т.к. при больших по модулю значениях $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$ — не целые $\Rightarrow \frac{1}{m}/\frac{1}{n}-2$ — тоже не целое)

И есть ещё 2 варианта, когда $\frac{1}{m}=\frac{1}{n}$, но по условию

[redacted] $m \neq n \Rightarrow \frac{1}{m} \neq \frac{1}{n}$.

Тогда рассматриваем случаи:

1). $\begin{cases} (\frac{1}{1}-2)^2 + a(\frac{1}{1}-2)+b=0 \text{ —''— } 1-a+b=0 \\ ((\frac{1}{-1})-2)^2 + a(\frac{1}{-1}-2)+b=0 \text{ —''— } 9-3a+b=0 \end{cases}$

$+\begin{cases} 1-a+b=0 \\ 9-3a+b=0 \end{cases}$

$10-4a+2b=0$

$-\begin{cases} 1-a+b=0 \\ 9-3a+b=0 \end{cases}$

$-8+2a=0$

$2a=8$

$a=4 \Rightarrow b=3 \Rightarrow a+b=7$

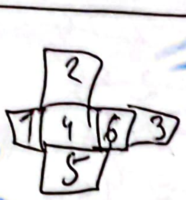
продолжение Чистовика

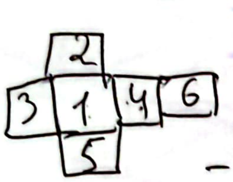
2) $\begin{cases}(-1-2)^2+a(-1-2)+b=0\\(1-2)^2+a(\cancel{-1}-2)+b=0\end{cases}$

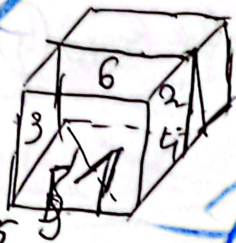
Мы получили ту же систему, значит, что $a+b$ тоже $=7$.

Ответ: $a+b=7$

№2 – черновик







$9,9025 \,|\, 2$; $4,95125$

-8, $1,9$, $-1,8$, 10, 2, 5

$9,95125 \,|\, 2$; $4,9$

-8, 19

6 – 0

5 – 0

4 – 1 (4,5,6)

3 – 1 (3,5,6)

2 – 4

1 – 8

3: ~~346~~, ~~345~~, 356

2: ~~234~~, 235, 236, 245, 246, ~~256~~

1: 123, 124, ~~125~~, 126, ~~134~~, 135, 136, 145, 146, 156

№2 – Чистовик:

Рассмотрим все возможные случаи воз-~~в~~растающих комбинаций из 3-чисел от 1 до 6, зная как они расположены на кубе:

Продолжение чистовика 12

1). выпало: 6 – 0 комбинаций

2) выпало: 5 – 0 к.

3). вып.: 4 – всего 1 – 456

4). вып.: 3 – всего 3 комб. ~~345~~ ~~346~~ 356

но только 1 подходящая, т.к. 3+4=7, то они противоположны → не соседние

5). вып.: 2 – всего 6 комбинаций

$\Sigma=7$

~~234~~

235

236

245

246

~~256~~

$\Sigma=7$

но подходящих всего 4

6). вып. 1: – всего комбинаций 10:

123

124

~~125~~ $\Sigma=7$

126

~~134~~ $\Sigma=7$

135

136

145

146

156

но подходящих всего 8

Тогда всего разных комбинаций:

$1+1+4+8=14$

Ответ: 14 последовательностей.

Задача 3 – черновик

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}$$

$$\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ca}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1=\frac{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}{abc}-(a+b+c)+3$$

03-32-85-39 (42.2)

$9{,}9878125 : 2 = 4{,}996$ $\quad$ $9{,}906\,25 : 2 = 4{,}95\,3125$

$9{,}9$

$\min\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c\right)$

$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-a^2bc-ab^2c-abc^2$ $\quad$ $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

$b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\geq a^2bc+ab^2c+abc^2$

$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$

$\frac{bc}{a}-b$

$(a+b+c)^3\geq 3abc$

$bc^2(b-a)+a^2c(c-b)+$

$\frac{(bc-ab)bc}{abc}$ $\quad$ $\frac{(ac-ab)(ac)}{b}$

$bc-ab$

$\frac{ab-ac(ab)}{abc}$

$c-a$

$bc \quad ac$

$a-b$

$\frac{bc-ab}{a}+\frac{ca-cb}{b}+\frac{bc-ac}{c}$

$b-c$

$b-a$

$(c-b)a^2c+(c-a)b^2c+(b-c)a^2b$

$a-b$ $\quad$ $c>b$ $\quad$ $b-a$

$9{,}953125 : 2 = 4{,}9765625$ $\quad$ $9{,}9765625 : 2 = 4{,}98828125$ $\quad$ abc

23 чистовик

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c+3$$

Нетрудно заметить, что $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c\geq 0$, при этом равенство достигается только тогда, когда $a=b=c \Rightarrow \min$ изначального выражения -3.

Ответ: минимум $=3$; достигается он, когда $a=b=c$.

№4 – черновик

5 D_1 3-м

$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{3!} = 20$

$\frac{1}{2}$ (a·b·x) · sin ...

3м 1ч 1с

$C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 =$

9,625 | 2
16 | 4,8125

3D $\frac{2}{10}$

$\frac{(7+5)}{2} = 6 + 5 = \frac{7}{2} + 5 = \frac{8,5}{2} + 5$

9,8125 | 2
18 | 4,90625
12

6м

6

$C_3^2 \cdot C_1^1 = \frac{3\cdot2}{2}$

9,8185 | 2
18 | 4,90925
18

2D

9,99

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1/.		g		g	g	g		g		g
2/.	g		a		a		a		g	
3/.	g			g		g		g		g
4/.	g		g			g		g		g
5/.	g		g		g			g		g
6/.	g		g		g		g		g	g
~~7/.~~	~~g~~			~~g~~		~~g~~		~~g~~		~~g~~

9,25

9,25 | 2
8 | 4,625
12
5

9,625
4

$S_{ABC} = 12$

A M N

$S_{ABM} \cdot S_{MBC}$

$S_{ABM} + S_{MBC} = 5$

5

9,90925 | 2
8 | 4,95...
19
18
10
9
12

№4 – чистовик

Сначала пронумеруем все места в кинотеатре от 1 до 10 и будем рисовать все возможные расстановки девочек.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1).	д		д		д		д		д	
2).		д		д		д		д		д
3).	д			д		д		д		д
4).	д		д			д		д		д
5).	д		д		д			д		д
6).	д		д		д		д			д

всего 6 способов (в других они будут идти рядом)

Тогда нам остаюсь только выбрать из 5 места для 3 мальчиков, 1 учительницы и 1 пустого это:

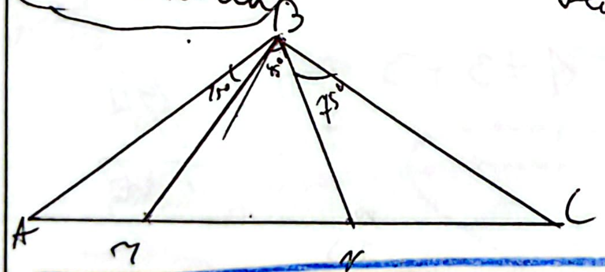
$$C_5^3 \cdot C_{5-3}^1 \cdot C_{5-3-1}^1 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3!\cdot1!\cdot1!} = 20$$

Для каждой из 6 расстановок девочек существует всего 20 расстановок. Тогда всего возможных посадок:

$20+20+20+20+20+20 = 6\cdot20 = 120$

Ответ: 120

№5 – чистовик



Решение:

$\angle B = 135°$

$\angle M = 180° - 15° - \angle A = 45° + \angle BNA = 75° + \angle C$

(внеш. угол)

Ответ: $S_{ABC} =$

черновик

$1+4+4 \to 2 \to 6 \to 3 \to 0$

$14 + 10 = 11$

$5 \xrightarrow{+4} 9 \equiv 2 \xrightarrow{+4} 6 \xrightarrow{+4} 10 \equiv 4 \to 1$

$25 \cdot 7$, $35 + 140 = 175$

$60 + 25 = 85$

$43 - 22 = 21$, $21 - 21 = 0$

$6 \to 2 \to 5 \to$

35

175? 165 $3+3+3+3+3+3+3$

$43 \equiv_7 1 \equiv 6$

$1+3+3\ 1$

$48 + 22 = 70$

77

5 по 7

3 по 11

1 по 17

$85 \equiv_2 1$

$21 + 17$

$85 - 17 = 68$, $68 - 11 = 57$, $-17 = 40$, $40 - 11 = 39$, -7

$85 - 28 = 57$

$57 - 50$

$85 - 44 = 41$, $41 - 34 = 7$

$35 + 33$

$68 + 17$

$1 + 4$

4Bc, 2 Ac, AB

$1+4+3+3+3+4+3 \to 0$

9,99

$\boxed{17 \equiv_7 3 \equiv -4}$

68

$1+0+3+0+3+0+0+0+0$

$\boxed{11 \equiv_7 4 \equiv_7 -3}$

$1+3+3 \equiv_7 0$

$\boxed{7 \equiv_7 0}$

$85 - 22 = 63$

$85 - 33$

$34 + 42 = 76$

9

$1+3+3+4$

$1+21+1$

$\equiv_7$

$\equiv_2$

28

14

1: 4,7 → 8,5 ~ 204

2: 8,5 → 9,25

3: 9,25 → 9,625

4: 9,625 → ~~9,8125~~ 9,8125

5: 9,8125 → 9,90625

6: 9,90625 → 9,953125

7: 9,953125 → 9,9765625

8: 6 → 9,98778125 9: 6 → 9,99...

№7 - шестовик 1ч 25 мин = 85 мин

Рассмотрим остатки по модулю 7:

$85 \underset{7}{\equiv} 1 \underset{7}{\equiv} -6$

$17 \underset{7}{\equiv} 3 \underset{7}{\equiv} -4$

$11 \underset{7}{\equiv} 4 \underset{7}{\equiv} -3$

$7 \underset{7}{\equiv} 0$

нетрудно заметить, что мы должны выехать из A и приехать в него, но тогда количество всех дуг должно быть чётно т.к. у каждая дуга из A должна вернуться в A

Тогда нетрудно заметить, что он проехал:

5 дуг по 7 минут (35 мин)
3 дуги по 11 минут (33 мин)
1 дугу по 17 минут (17 мин)

$\Sigma = 85$ мин

Тогда он проехал: длина дуги AC

$5 \cdot 15 + 25 \cdot 3 + x \cdot 1 =$

$= 150 + x$

~~т.к. он проезжает AC за 7 мин, то его скорость $\frac{15}{7}$ (км/мин)~~

~~Тогда длина дуги AC:~~

~~$\frac{x}{17} = \frac{15}{7}$~~

~~$7x = 15 \cdot 17$~~

~~x~~

(продолжение листовых №7)

Рассмотрим окружности с дугами AB, BC, AC:

$C_{окр.AC} = 2\pi r = \pi d = \pi d_{окр.AB} + \pi d_{окр.BC} =$

$= \frac{\pi r_{AB}}{2} + \frac{\pi r_{BC}}{2} =$

$= \smile AB + \smile BC = 40$км.

Тогда всего он проехал:

$150 + x = 150 + 40 = 190$

Ответ: 190 км.

№6. - листовки

Нетрудно заметить, что $\frac{1}{2} + 5 \to \frac{6,5}{2} + 5 \to \frac{9,25}{2} + 5 \to \ldots$

$\to \ldots$ в пределе оно будет около 10 л, но меньше $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ а). нужно взять кувшин $V = 10$ л.

б). на 10-ый день в кувшине окажется 9,99...

Ответ: а) $V = 10$ л

б) на 10-ый день