0 228614 200009

22-86-14-20
(40.38)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Ломоносов»
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Буровская Евгения Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» 02 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	12	8	12	12	12	0	0	68

22-86-14-20 (40.38)

68/шестьдесят восемь)

Черновик

№1. 2 вратаря, 5 защ., 6 нап., 3 универс.

2 · выбрать вратаря

1) в защ. не вы...

$12 \cdot 7 = 70 + 14 = 84$

$56 \times 3 = 168$ $35 \times 6 = 210$

1680

$1680 \times 2 = 3360$

$3360 + 210 = 3570$

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$$

$y \geq 3$ $y-x+10 \geq 0$

$y \geq x-10$

$y-x-8$

$y \geq x-10 \leq x+8$

$x(y+4) - (y+4) = (y+4)(x-1)$

$y-x+10 = y^2-6y+9$

$y^2-7y+(x-1)=0 \to D = 49-4(x-1)^2 \geq 0$

$|x-1| \leq \frac{7}{2}$

$\boxed{x \in [-\frac{5}{2}; \frac{9}{2}]}$

$\cancel{(x-1)^2 \leq 49}$

$\cancel{|x-1| \leq 7}$

$\cancel{x \in [-6; 8]}$

$(y+4)(x-1)(x-4) \geq 0$

$(xy+4x-y-4)^2(\underbrace{x^2-8x+16}_{(x-4)^2} - (y-x-8)^2)$

$(xy+4x-y-4)(x-4-y+x+8)(x-4+y-x-8)=0$

$(y+4)^2(x-1)^2(2x-y+4)(y-12)=0$

$f(x): f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = f\left(\frac{(x+1)-2}{x+1}\right) = f\left(1-\frac{2}{x+1}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x+1}$

$g(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{g}(x)$

$\frac{2}{x+1} \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$f\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{3}\right) =$ $t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$= \frac{m}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1-t) = -\frac{t}{2}$

$1+\frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$ $-\frac{1}{x+1} = 1 - \frac{x+2}{x+1}$

$\cancel{\frac{x+1-x+2}{x+1} = -\frac{1}{x+1}}$ $\frac{1}{x+1}$

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 - \frac{x+2}{x+1}$

$m = 1-t$

$-\frac{t}{2} = \frac{1-t}{2} - \frac{1}{2}$

$f(m) = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}$

Чистовик

Задача №1

Собрать 2 вр., 5 защ., 6 нап. и 3 „универс."
1 2 3

(в (..) будет идти кол. универс.)

Разбием 3 случая:

1) В защитники не выбрали ни одного „унив.":

$C_2^1 \cdot (C_5^2) \cdot C_{(6+3)}^3 = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 20 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 20 \cdot 12 \cdot 7 = 1680$

вратарь, защитники, нападающие (мы выбрали напад. из 6 нап. и 3 „ун.")

2) В защитники выбрали 1 универсала:

$C_2^1 \cdot (C_3^1 \cdot C_5^1) \cdot C_{(6+2)}^3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 30 \cdot 56 = 1680$

вр., 1 ун. в защ. (из 3 выбрали 1 в защиту), ост. защ., нападение

3) В защитники выбрали 2 универсала:

$C_2^1 \cdot (C_3^2) \cdot C_{(6+1)}^3 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 6 \cdot 35 = 210$

вр., выбор унив.

Все эти 3 случая полностью покрывают ~~пространство~~ все возможные выборки в команду => их сумма является ответом (поскольку они несовместимы)

$1680 + 1680 + 210 = 3570$

Ответ: 3570 способов.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

22-86-14-20 (40.38)

чистовик

Задача №5

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = f\left(1-\frac{2}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$

$-\frac{1}{x+1} \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Пусть $-\frac{2}{x+1} = t$, тогда $(1+t)\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, где $t\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$f(1+t) = \frac{t}{2}$

Пусть $m = 1+t$

$f(m) = \frac{m}{2}-\frac{1}{2}$ $\forall m\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, но нас же интересует $x=0$, т.е. то, что ф-ия возможно недифференцируема в т. $x=1$ нам неважно.

Тогда: (здесь и далее $x\neq1$)

$f(x) = \frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

$\underbrace{f\circ f}_{2}(x) = \frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2} = \frac{x}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

$\underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{n}(x) = \frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\ldots-\frac{1}{2}$

$g(x) = \underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{9}(x) = \frac{x}{512}-\frac{1}{512}-\frac{1}{256}-\ldots-\frac{1}{2}$

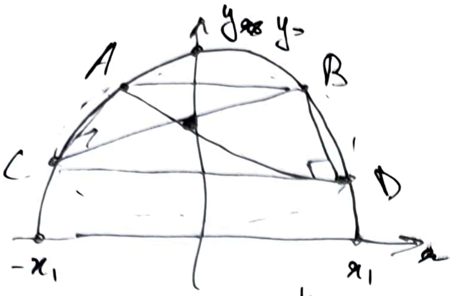
Тангенс угла наклона касательной к $g(x)$ в точке $x=0$ является значение производной $g(x)$ в т. $x=0$

$g'(x) = \frac{1}{512}$

$g'(0) = \frac{1}{512}$

Ответ: $\frac{1}{512}$.

черновик



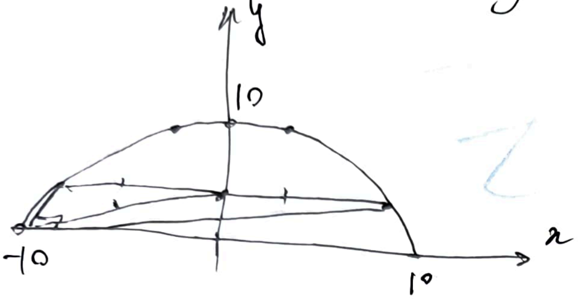
$f(x) = y = a - bx^2$

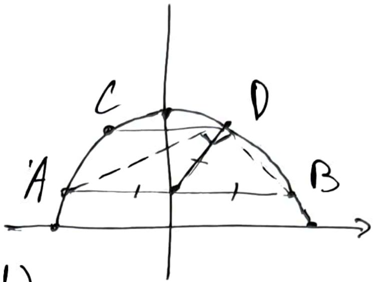
$f(0) = 10 \Rightarrow a = 10$

$f(10) = 0 \Rightarrow 10 - b \cdot 100 = 0$

$\angle ACB = \angle ADB = 90°$ $\quad b = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

$\rho(AB; CD)$ $\quad y_A - y_C = ?$





$r = x_B$ $\quad O(0; y_B)$ $\quad y_B = 10 - \frac{x_B^2}{10}$

$\begin{cases} x^2 + (y - y_B)^2 = x_B^2 \\ y = 10 - \frac{1}{10}x^2 \end{cases}$

$\frac{1}{10}x^2 = 10 - y$ $\quad x_B^2 = 100 - 10y_B$

$x^2 = 100 - 10y$

$100 - 10y + y^2 - 2y_B \cdot y + y_B^2 = x_B^2$

$\cancel{100} - 10y + y^2 - 2y_B \cdot y + y_B^2 = \cancel{100} - 10y_B$

$y^2 - 2(5 + y_B)y + (y_B^2 + 10y_B) = 0$

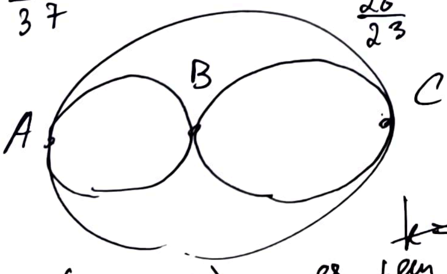
$D/4 = (5 + y_B)^2 - y_B^2 - 10y_B = 25 + \cancel{10y_B} + \cancel{y_B^2} - \cancel{y_B^2} - \cancel{10y_B} = 25$

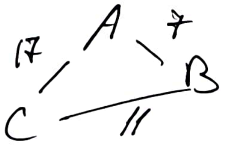
$y = \frac{5 + y_B \pm 5}{1} = y_B;\ y_B + 10$

210, 25, −56, 29

210, 51, −14, 37

1,210, 51, −28, 23





$AB = 13$ $\quad n$

$BC = 21$ $\quad m$

$AC = ?$ $\quad k$

$7n + 11m + 17k = 85$

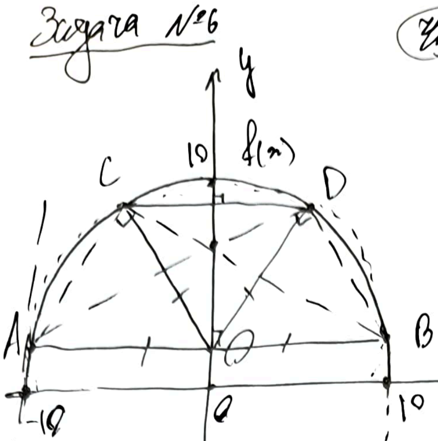
$\cancel{k = 8}$: (n, m, k)

$(n, m, 5)$ — ед. реш. $(0; 0; 5)$.

$(n, m, 4)$: $\quad 7n + 11m =$

22-86-14-20
(40.38)

Задача №6 чистовик



$f(x) = a - bx^2$

Из условия:

$\begin{cases} f(0)=10 \\ f(\pm 10)=0 \end{cases}$

(т.к. расстояние между корнями 20, а вершина в $x=0$).

$\begin{cases} a=10 \\ \cancel{a}\ 10 - b\cdot 100 = 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{b}\ \begin{matrix} a=10 \\ b=\frac{1}{10} \end{matrix}$

Заметим, что боковая AB ниже боковой CD, т.к. иначе $\angle ACB < 90^\circ$ $\forall$ точек A, C и B, поскольку касательная к графику $f(x)$ никогда не перпендикулярна оси OX, а наибольший угол в данной части параболы — между касательной и осью OX, т.е. он $< 90^\circ$ $\Rightarrow$ AB ~~AB~~ ниже CD.

$\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow$ ACDB вписан, причём ~~A~~ A, B, C и D равноудалены от середины боковой AB, т.к. она явл. диаметром.

Таким образом задача свелась к нахождению расстояния между ~~м~~ параллельными хордами AB и CD окружности, опис. около ABCD, где A, B, C и D лежат на параболе ~~у~~ $f(x) = 10 - \frac{x^2}{10}$.

Пусть $B(x_в; y_в)$, $D(x_d; y_d)$. Тогда нам нужно найти $y_d - y_в = ?$ ~~$y_в - y_d = ?$~~

~~П~~ Пары чисел-коорд. A, B, C и D являются решениями системы (причём всеми решениями):

$\begin{cases} x^2 + (y-y_в)^2 = x_в^2 & \text{— ур-не окр. с } O(0;y_в) \text{ и } r = x_в = OB. \\ y = 10 - \frac{x^2}{10} & \text{— ур-не параболы} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = 100 - 10y \\ 100 - 10y + y^2 - 2y_в\cdot y + y_в^2 = 100 - 10y_в \end{cases}$ — нам интересно только y, поэтому работаем лишь со 2-ым ур-нием системы.

$y^2 - 2(5+y_в)y + (y_в^2 + 10y_в) = 0$ — мы уже знаем 1 корень $y_в \Rightarrow$ по т. Виета

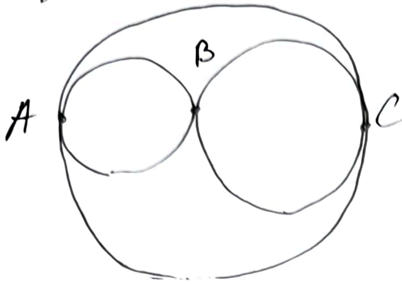
$(y - y_в)(y - (y_в+10)) = 0$

решения $y_в$ и $(y_в+10) \Rightarrow \rho(AB; CD) = 10$

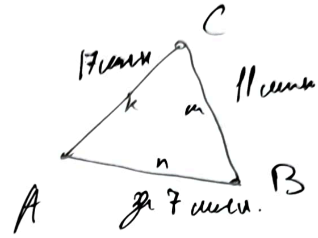
Ответ: 10.

Черновик

Задача №4



$\Longleftrightarrow$



Заметим, что с точки зрения сложности данная трасса ~~...~~ эквивалентна треугольнику ABC, стороны которого равны: $AB = 13$ км; $BC = 21$ км и AC – позже найдём из геом. ~~..~~ соображений.

Пусть по ~~трассе AC~~ дуге ~~AC~~ AB он проехал n раз, по BC – m раз, и по AC ~~–~~ – k раз. $(n, m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

Тогда нам известно из условия, что:

$$7n + 11m + 17k = 1 \text{ час } 25 \text{ мин} = 85$$ ~~Также заметим, что~~

(Также заметим, что ~~A~~ автомобилист, выехав из A, снова вернулся в A $\Rightarrow$ ~~k ≠ 0 и n ≠ 0~~ и при этом $k+n$ – чётное число). ~~k+n ≠ 0~~ $(k^2 + n^2 \neq 0)$

Начнём перебор: $(k \leq 5$, ведь при $k > 5$ $17k > 85)$

k=5: $85 = 85 + 7n + 11m \Rightarrow n = m = 0$

~~то~~ $(n; m; k) = (0; 0; 5)$ – $n+k = 5$ – нечёт. – не подходит

k=4: $85 = 68 + 7n + 11m$

$7n + 11m = 17$, $k = 4 \Rightarrow k + n =$ ~~2k~~ чёт $\Rightarrow n$ – чёт

~~k≠~~ $n \neq 0$, ведь $17 \not\vdots\, 11$,

$n \neq 2$, ведь $3 \not\vdots\, 11$ $\Rightarrow k \neq 4$

$n \geq 4$ – явно > 85

k=3: $\Rightarrow n$ – нечёт.

$7n + 11m = 85 - 3 \cdot 17 = 34$ ~~k≠~~

$n \neq 1$: $27 \not\vdots\, 11$

$n \neq 3$: $13 \not\vdots\, 11$ $\Rightarrow k \neq 3$

$n \neq 5$: ведь уже > 85

k=2: $7n + 11m = 85 - 2 \cdot 17 = 3 \cdot 17 = 51$ также n – чёт

$n \neq 0$: $51 \not\vdots\, 11$

$n \neq 2$: $37 \not\vdots\, 11$ $\Rightarrow k \neq 2$

$n \neq 4$: $23 \not\vdots\, 11$

$n \neq 6$: $9 \not\vdots\, 11$ $n \neq 8$, ведь уже ~~..~~ > 85.

чистовик (продолжение зад. №4)

$k=1$: $7n+11m=68$ и n – неч.

$n\neq1$: $61 \not\vdots\, 11$

$n\neq3$: $47 \not\vdots\, 11$

$\cancel{n\neq4}$ $n=5$: $33=11\cdot3$ – решение $(5;3;1)$.

$n\neq7$: $19 \not\vdots\, 11$

$n\neq9$: $5 \not\vdots\, 11$

$n\neq11$: уже >85

$k=0$: $7n+11m=85$ также n – чётное

$n\neq0$: $85 \not\vdots\, 11$

$n\neq2$: $71 \not\vdots\, 11$

$n\neq4$: $57 \not\vdots\, 11$

$n\neq6$: $43 \not\vdots\, 11$

$n\neq8$: $29 \not\vdots\, 11$

$n\neq10$: $15 \not\vdots\, 11$

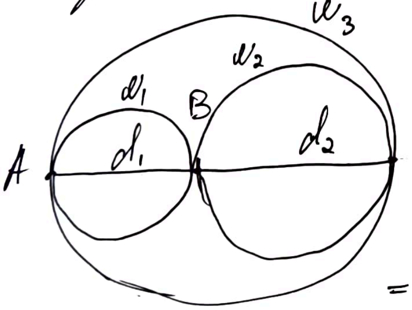
$n\neq12$: $1 \not\vdots\, 11$

$n\neq14$: уже >85.

У нас остался единственный вариант $n=5$; $m=3$ и $k=1$.

Пример: $A\xrightarrow[n]{}B\xrightarrow[n]{}A\xrightarrow[n]{}B\xrightarrow[m]{}C\xrightarrow[m]{}B\xrightarrow[m]{}C\xrightarrow[k]{}A\xrightarrow[n]{}B\xrightarrow[n]{}A$.

Теперь найдём длину дуги AC:



$AC=\frac{\pi d_3}{2}=\frac{\pi(d_1+d_2)}{2}$

в км

$2AB=26=\pi d_1$

$2BC=42=\pi d_2$

$AC=\frac{\pi d_1+\pi d_2}{2}=\frac{26+42}{2}=13+21=$

$=\underline{34\text{ км}}$

Тогда автомобиль всего проехал: $n\cdot AB+m\cdot BC+k\cdot AC=$

$=5\cdot13+3\cdot21+1\cdot34=65+63+34=128+34=\underline{162\text{ км}}$

Ответ: 162 км.

Черновик

$S(mn) = S(n)$

1) $(x-1)(y+4) < 0$: $x-4<0$ $x<4$

$y \geq 3$

$\underbrace{(x-1)(y+4)}_{<0} |y-x-8| = \underbrace{(x-4)}_{<0}\underbrace{|\ldots|}_{>0}$

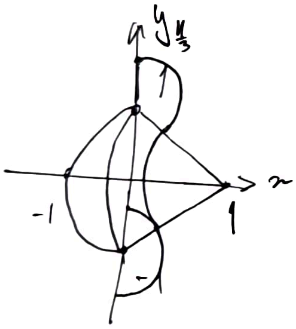
$(x-1)(y+4)(|y-x-8| + x-4) = 0$

2) $(x-1)(y+4) > 0$: $x-4>0$

$(x-1)(y+4)(|y-x-8| - (x-4)) = 0$

$\times 13$, 6, 104

$S(mn) = S(n)$. $\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$



$S(mn) = S(n)$

Шифр

Задача №3

$$\begin{cases}(xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| & (1)\\ \cancel{y+x+}\sqrt{y-x+10} = y-3 & (2)\end{cases}$$

(1): $(xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4|$

$$\begin{cases}(xy+4x-y-4)^2(y-x-8)^2 = (x-4)^2(xy+4x-y-4)^2\\ (x-4)(xy+4x-y-4)\geq 0 \text{ — обе части одного и того же знак.}\end{cases}$$

$(x-1)^2(y+4)^2(y-x-8-x+4)(y-\cancel{x}-8+\cancel{x}-4)=0$

$(x-1)^2(y+4)^2(y-2x-4)(y-12)=0$

$$\left[\begin{array}{l}x=1\\ y=-4\\ y=2x+4\\ y=12\end{array}\right.$$

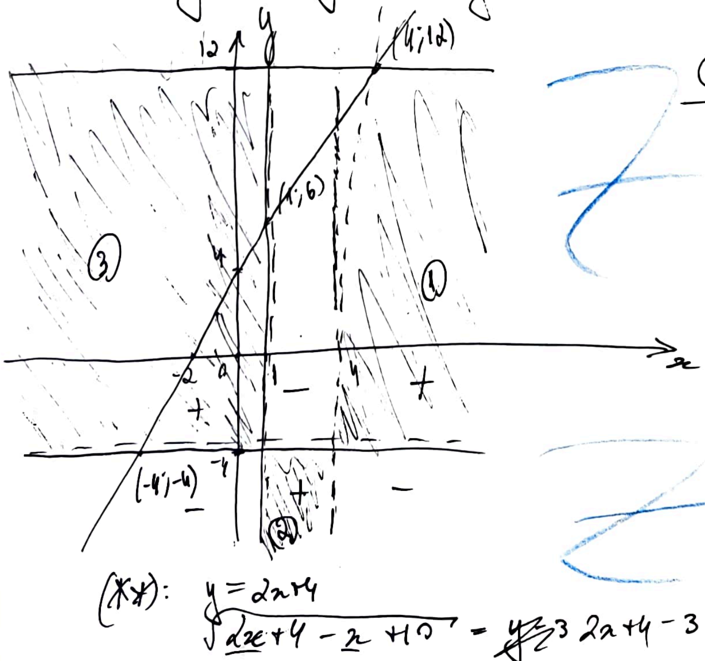
$(x-4)(xy+4x-y-4) = (x-4)(x-1)(y+4)\geq 0$

Сразу разберём случай $x=4$:

$$\begin{cases}(4y+16-y-4)|y-4-8|=0\\ \sqrt{y-4+10}=y-3\end{cases}\qquad \begin{cases}(3y+12)|y-12|=0\\ \sqrt{y+6}=y-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-4\\ y=12\end{array}\right.\\ \sqrt{y+6}=y-3\end{cases}$$ — $y=-4$ не подходит, т.к. $y-3<0$.

$y=12$: $\sqrt{18}\neq 9$ — нет реш. $\Rightarrow x\neq 4$.



①: $$\begin{cases}x>4\\ y\geq -4\\ \left[\begin{array}{ll}y=12 & (1)\ (*)\\ y=2x+4 & (2)\ (**)\\ y=-4 & (3)\ (***)\end{array}\right.\end{cases}$$

(*) Подставим в (2):

$y=12$:

$\sqrt{12-x+10}=9$

$\sqrt{22-x}=9$

$22-x=81$

$x=-59<4$

не подходит

(**): $y=2x+4$

$\sqrt{2x+4-x+10} = \cancel{y-3}\ 2x+4-3$

$\sqrt{x+14} = 2x+1$

Чистовик

Продолжение задачи №3:

$x+14 = 4x^2+4x+1$ — равносильный переход, ведь $x>4$ в (1).

$4x^2+3x-13=0$ $\quad D = 9+13\cdot 8 = 113$

$x = \frac{-3\pm\sqrt{113}}{8} \overset{<}{\vee} 4$ — не подходит.

помним, что $x>4$

$-3+\sqrt{113} \vee 32$

$\sqrt{113} \overset{<}{\vee} 35$

(***) $y = -4$ — сразу не подходит, ведь в (2)

$y-3 = \underbrace{\sqrt{y-x+10}}_{\geq 0}$, т.е. $y \geq 3$.

В области (1) решений нет.

(2): $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{— уже разобрали} \\ \begin{cases} x\in[1;4) \\ y\in(-\infty;-4] \end{cases} \end{array}\right.$ — сразу видим, что в области (2) нет решений, поскольку $y\geq 3$, а здесь $y \leq -4$.

(3): $\begin{cases} x\leq 1 \\ y\geq -4 \text{ (даже больше, } y\geq 3\text{).} \\ \left[\begin{array}{ll} y=2x+4 & (*) \\ x=1 & (**) \\ y=12 & (***) \\ y=-4 & \text{— уже разобрали, нет реш.} \end{array}\right. \end{cases}$

(*) $y=2x+4$ — мы уже решили это ур-ие в области (1) под пунктом (**) (см. выше). Мы получили корни $x = \frac{-3\pm\sqrt{113}}{8} \overset{<}{\vee} 1$

$-3 \pm\sqrt{113} \vee 8$

$\pm\sqrt{113} \overset{<}{\vee} 11$ — оба подходят по x, проверим по y:

1. $y = 2x+4 = \frac{-3-\sqrt{113}}{4}+4 \overset{<}{\vee} 3$

$-3-\sqrt{113} \vee -4$

$-\sqrt{113} \overset{<}{\vee} -1$ — не подходит.

2. $\frac{-3+\sqrt{113}}{4}+4 \vee 3$

$-3+\sqrt{113} \vee -4$ $\qquad$ $\sqrt{113} > -1$ — подходит, нашли решение $\left(\frac{-3+\sqrt{113}}{8}; \frac{13+\sqrt{113}}{4}\right)$.

продолжение (чистовик) №3:

(**) $x=1$:

$\sqrt{y-1+10} = y-3$

$\sqrt{y+9} = y-3$ $\quad \begin{cases} y+9 = y^2-6y+9 \\ y \geq 3 \end{cases} \to y^2-7y=0$

$y(y-7)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=0<3 \\ y=7\geq 3 \end{array}\right.$

Ещё одно решение $(1;7)$.

(***) $y=12$:

$\sqrt{12-x+10} = 12-3$

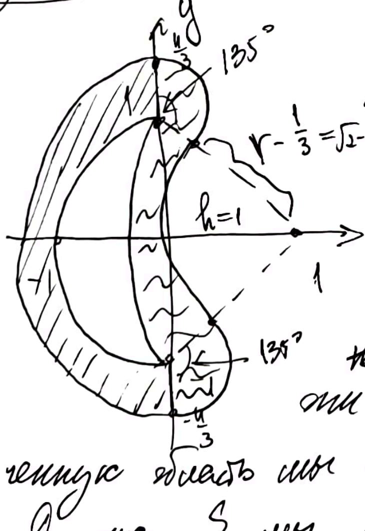
$\sqrt{22-x} = 9 \to 81 = 22-x \to x=-59<1$ подходит.

Ещё 1 решение $(-59;12)$.

Мы рассмотрели все возможные ~~о~~ области решений (1), подставили решения в (2) и нашли 3 решения $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ эти 3 реш. — единственные.

Ответ: $(x;y) = \left(\frac{-3+\sqrt{113}}{8};\ \frac{13+\sqrt{113}}{4}\right)$, $(1;7)$ и $(-59;12)$.

Задача №2



На самом деле получившийся рисунок строится следующим образом: от каждой граничной точки „полумесяца" построим ~~н~~ перпендикуляр к кривой, на которой лежит данная точка, длиной $\frac{1}{3}$ (кроме точек $(0;1)$ и $(0;-1)$ просто описали окружность радиуса $\frac{1}{3}$. Получившуюся область мы и считаем новой фигурой.

Площадь S мы посчитаем следующим образом: возьмём половину от пл-ди. круга с центром $(0;0)$ и $R = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, мы получим левую часть данной фигуры. После по-отдельности посчитаем пл-дь. 2-х секторов ~~окружностей~~ кругов, описанных около $(0;1)$ и $(0;-1)$ с радиусом $\frac{1}{3}$, после ко всему прибавим S треугольника с вершинами $(0;1)$, $(0;-1)$ и $(1;0)$, а из полученного вычтем S сектора ~~о~~ круга

~~ТЧ~~ (чистовик)

~~продолж. зад. 2:~~

... с центром $(1;0)$ и $r = \sqrt{2} - \frac{1}{3}$

диагональ клетки 1×1.

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi\left(R + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{16}{9}^{2} = \frac{8\pi}{9}.$$

$$S_2 = 2 \cdot \pi\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{135^\circ}{360^\circ} = 2\pi \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{\pi}{12}$$

сектор

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2 = \underline{h = 1} \text{ — площадь треугольника}$$

$$S_4(\text{вокр.}) = \frac{1}{4} \cdot \pi\left(r - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 =$$

сектор 90°

$$= \frac{\pi}{4}\left(2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{9}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{19}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Итак: $S_{общ.} = S_1 + S_2 + S_3 - S_4 = \frac{8\pi}{9} + \frac{\pi}{12} + 1 - \frac{\pi}{4}\left(\frac{19}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$$= 1 + \pi\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{12} - \frac{19}{36} + \frac{2\sqrt{2}}{12}\right) =$$

$$= 1 + \pi\left(\frac{32}{36} + \frac{3}{36} - \frac{19}{36} + \frac{6\sqrt{2}}{36}\right) = 1 + \pi\left(\frac{16 + 6\sqrt{2}}{36}\right) =$$

$$= 1 + \pi\,\frac{8 + 3\sqrt{2}}{18} = \frac{(8 + 3\sqrt{2})\pi}{18} + 1$$

Ответ: $S = \frac{(8 + 3\sqrt{2})\pi}{18} + 1.$

Задача №7 $n \in [10^{24}; 10^{25})$.

Заметим, что $n \vdots 9$, иначе возьмём $m \vdots 9$, тогда $mn \vdots 9$ и по признаку делимости на 9 $S(mn) \vdots 9$, а $S(n) \not\vdots 9$ — противоречие $\Rightarrow$ $n = 9k$

~~Также $n \vdots 11$, ведь по признаку делимости на 11, значит~~