97-81-94-52
(40.48)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант № 2

Место проведения МОСКВА
город

дешифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „ЛОМОНОСОВ"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

ВАРЕНЦОВОЙ МАРИИ НИКОЛАЕВНЫ
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника
Варенцова

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	0	12	12	12	8	12	0	68

ЧИСТОВИК

$\boxed{№5}$ $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$

$\frac{x-2}{x+2} = \frac{(x+2)-4}{x+2} = 1 + 2\left(-\frac{2}{x+2}\right) = 1 + 2\cdot f\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ $\forall x$, кроме $x=-2$

Пусть $\frac{x-2}{x+2} = t$. Тогда $t = 1 + 2f(t) \Rightarrow f(t) = \frac{t-1}{2}$.

Докажем по индукции, что $\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n} = \frac{x}{2^n} - 1 + \frac{1}{2^n}$.

База индукции: $n=1$

$f(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2^1} + \frac{1}{2^1} - 1$ — все верно

Предположение индукции:

Пусть для ~~...~~ $n = k$ верно, что $\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{k} = \frac{x}{2^k} - 1 + \frac{1}{2^k}$

Индукционный переход:

$n = k+1$

$\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{k+1} = f\left(\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{k}\right) = f\left(\frac{x}{2^k} - 1 + \frac{1}{2^k}\right) =$

по предпол. индукции

$= \frac{\left(\frac{x}{2^k} - 1 + \frac{1}{2^k}\right) - 1}{2} = \frac{x}{2^{k+1}} - \frac{2}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{x}{2^{k+1}} - 1 + \frac{1}{2^{k+1}}$ —

что и требовалось доказать

Тогда $g(x) = \underbrace{f(f\dots f(x)))}_{11} = \frac{x}{2^{11}} - 1 + \frac{1}{2^{11}}$.

Пусть $p(x)$ — касательная к $g(x)$ в точке x_0.

$p(x) = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) = \frac{1}{2^{11}}\cdot(x - x_0) + \frac{x_0}{2^{11}} - 1 + \frac{1}{2^{11}} =$

$= \frac{x}{2^{11}} - 1 + \frac{1}{2^{11}}$

~~...~~ Т.к. $g(x)$ — прямая $\left(g(x) = \frac{x}{2^{11}} - 1 + \frac{1}{2^{11}}\right)$, то кроме $x=-2$ кас-ная к ней $g(x)$ ~~имеет ту же ф-ю, что и~~ ~~тоже~~ $g(x)$ в любой точке, т.е. в $x=0$ тангенс угла наклона $\frac{1}{2^{11}}$.

Ответ: $\frac{1}{2^{11}}$.

$\boxed{№1}$

Выбрать лучшего вратаря можно 3 вариантами (т.к. всего 3 вратаря). Если выбирать двух защитников из 4-х „чистых" защитников (т.е. НЕ универсалов), то защитников можно выбрать C_4^2 способами, нападающих — C_{10}^3 способами (выбираем 3-х из 7 „чистых" нападающих и трех универсалов), если выбирать обоих защитников из „универсалов", то защитники выбираются C_3^2 способами, нападающие — C_8^3. Если одного защитника брать из „чистых" защитников, второго — из универсалов, то защитники выбираются $C_4^1 C_3^1$ (см. сл. стр.)

$\boxed{№1}$ (продолжение) ЧИСТОВИК ЧИСТОВИК

... способами, неподходящие – C_9^3. Тогда всего способов:

$C_3^1\left(C_4^2 C_{10}^3 + C_3^2 C_8^3 + C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_9^3\right) = 3\left(\frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{6} +\right.$

$\left.+ 3\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{6} + 4\cdot3\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{6}\right) = 3\left(6\cdot120 + 3\cdot56 + 2\cdot9\cdot8\cdot7\right) =$

$= 3\left(720 + 56\left(3+18\right)\right) = 3\left(720 + \overset{1176}{56\cdot21}\right) = 3\cdot1896 =$

$= 5688$

$\begin{array}{r} \times\ 56 \\ 21 \\ \hline +\ 56 \\ 112\ \ \\ \hline 1176 \end{array}$

Ответ: 5688

№3

$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)\,|y-x-8| = (x-5)\,|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)(y+3)\,|y-x-8| = (x-5)\,|(x-2)(y+3)| \\ y-4 \geq 0 \\ (y-4)^2 = y-x+10 \end{cases}$

$(y-x+10) = (y-4)^2 \geq 0$, т.е. подкоренное выражение ≥ 0

! $y-4\geq0 \Rightarrow y\geq4 \Rightarrow y+3\geq7>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)(y+3) > 0 \Leftrightarrow x>2 \\ (x-2)(y+3) < 0 \Leftrightarrow x<2 \\ (x-2)(y+3) = 0 \Leftrightarrow x=2 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ |y-x-8| = (x-5) \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x<2 \\ |y-x-8| = -(x-5) \end{cases} & (2) \\ x=2 & (3) \end{array}\right. \\ y\geq4 \\ y^2-8y+16 = y-x+10 \Leftrightarrow y^2-9y+6=-x \end{cases}$

(3) $x=2$

$y^2-8y+16 = y-2+10$

$y^2-9y+8=0$

$(y-1)(y-8)=0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=8 \end{array}\right. \\ y\geq4 \end{cases} \Rightarrow y=8$

(1) $x>2,\ y\geq4$

$|y-x-8| = (x-5)\geq0 \Rightarrow x\geq5$

$y^2-9y+6=-x$

y^2-9y+6 – парабола ветвями вверх $\Rightarrow$ ее минимум в вершине

$\min(y^2-9y+6) = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 9\cdot\frac{9}{2}+6 =$

$= 4{,}5^2 - 2\cdot4{,}5^2+6 = 6-4{,}5^2$

(2) $x<2$

$|y-x-8| = -(x-5)$

$|y^2-8y-2| = y^2-9y+11$

(a) $y^2-8y-2\geq0$

$y^2-8y-2 = y^2-9y+11$

$y=13 \Rightarrow x=-(13^2-9\cdot13+6)$

Проверим: $13^2-13\cdot8-2=$

$= 13\cdot5-2 = 63>0$

(б) $y^2-8y-2<0$

$-(y^2-8y-2) = y^2-9y+11$

$2y^2-17y+9=0$

$\begin{cases} y^2-8y-2<0 \\ 2y^2-17y+9=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\in\left(4-\sqrt{18};\ 4+\sqrt{18}\right) \\ y=\left\{\frac{17+\sqrt{217}}{4};\ \frac{17-\sqrt{217}}{4}\right\} \end{cases} \\ x<2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{17+\sqrt{217}}{4} \\ x<2 \end{cases}$ т.к. $y\geq4$, $\frac{17+\sqrt{217}}{4} < 4+\sqrt{18} \Leftrightarrow (17-16) < \sqrt{18\cdot16} - \sqrt{217}$ … > 1.

97-81-94-52 (40.48)

$\boxed{№3}$ (продолжение) чистовик

① $x > 2$

$|y-x-8| = (x-5) \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$

$|y^2-8y-2| = -(y^2-9y+11)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2-8y-2 \geq 0 \\ y^2-8y-2 = -(y^2-9y+11) \end{cases} \\ \begin{cases} y^2-8y-2 < 0 \\ y^2-8y-2 = y^2-9y+11 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2-8y-2 \geq 0 \\ 2y^2-17y+9=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2-8y-2 < 0 \\ y=13 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} y^2-8y-2 \geq 0 \\ 2y^2-17y+9=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varnothing$

нет решений, т.к. есть решение в п.2, а там $y^2-8y-2<0$

не имеет решений, т.к. $63 = 13^2 - 8\cdot 13 - 2 > 0$

Суммируя все случаи, получим:

$$\left[\begin{array}{l} x=2,\ y=8 \\ x=-58,\ y=13 \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ y^2-8y-2 \geq 0 \\ 2y^2-17y+9=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ y^2-8y-2 < 0 \\ 2y^2-17y+9=0 \end{cases} \\ y \geq 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,\ y=8 \\ x=-58,\ y=13 \\ 2y^2-17y+9=0 \\ y \geq 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,\ y=8 \\ x=-58,\ y=13 \\ \begin{cases} y=\frac{17+\sqrt{217}}{4},\ x=\frac{607-\sqrt{217}}{8} \\ x<2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,\ y=8 \\ x=-58,\ y=13 \end{array}\right.$$

$2y^2-17y+9=0$

$D = 289-72 = 217$

$y = \frac{17 \pm \sqrt{217}}{4}$

$y \geq 4 \Rightarrow y = \frac{17+\sqrt{217}}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}(289+217+34\sqrt{217}) - \frac{9}{4}(17+\sqrt{217}) + 6 = \frac{1118-2\sqrt{217}}{16} = \frac{559}{8} - \frac{\sqrt{217}}{8} + 6 = \frac{607-\sqrt{217}}{8}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=2,\ y=8 \\ x=-58,\ y=13 \\ \cancel{y=\frac{17+\sqrt{217}}{4},\ x=\frac{607-\sqrt{217}}{8}} \end{array}\right.$

№4.

Заметим, автомобиль проехал целое неотрицательное кол-во дуг AB (пусть это кол-во равно x), y дуг BC и z дуг AC. Всего он был в дороге 1 ч 35 мин = 95 мин.

$95 = 5x + 13y + 19z.$

$z \leq 5$ (при $z \geq 6$ $19z+5x+13y \geq 19\cdot 6+0+0 = 19\cdot 6 > 19\cdot 5 = 95$).

- Если $z=5$, то $95 = 19\cdot 5+5x+13y \Rightarrow 5x+13y=0 \Rightarrow x=0, y=0$. но если автомобиль проехал лишь 5 раз дугу AC, то он в конце оказался в точке C, а не в A, значит, $z \neq 5$

- Если $z=4$, то $5x+13y=19$. Очевидно, $y \leq 1$ (при $y \geq 2$ $5x = 19-13y \leq 19-26 = -7 < 0$, но $x \geq 0$). Если $y=1$, но $5x=6$, что невозможно, т.к. $x \in \mathbb{Z}$, если $y=0$, то $5x=19$, что невозможно, т.к. $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow z \neq 4$.

- Если $z=3$, то $5x+13y=38$. $5x = 38-13y$. $y<3$, иначе $x<0$.

ЧИСТОВИК

№4 (продолжение).

$y = 2 \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$, $y = 0 \Rightarrow 5x = 38 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$
$y = 1 \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x = 5$. Значит, при $z = 3$ единств. возможный случай – $y = 1$, $x = 5$.

– $z = 2 \Rightarrow 13y + 5x = 57 \Rightarrow 5x = 57 - 13y$. $y \leq 4$, иначе $5x \leq 57 - 13 \cdot 5 = -8 < 0$.

y	0	1	2	3	4
x	11,4	8,8	6,2	3,6	1

– только при $y = 4$ x принимает целое значение. Однако при $x = 1$, $y = 4$, $z = 2$ автомобиль не сможет вернуться в точку A, значит, этот набор не подходит. *

– $z = 1 \Rightarrow 13y + 5x = 76 \Rightarrow 5x = 76 - 13y \Rightarrow y \leq 5$.

y	0	1	2	3	4	5
x	$\frac{76}{5}$	$\frac{63}{5}$	10	$\frac{37}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{11}{5}$

Только при $y = 2$ x принимает целое значение, но при $z=1$, $x = 10$, $y = 2$, $z = 1$ автомобиль не сможет вернуться в точку A, значит, набор не годится. *

– $z = 0$

$13y + 5x = 95 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $5x = 95 - 13y$. $95 \vdots 5$, $5x \vdots 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 13y \vdots 5$; $0 \leq 13y \leq 95$, $13y \vdots 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 5 \\ y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 5, x = 6 \\ y = 0, x = 19 \end{array}\right.$

Т.к. $z = 0$ и автомобиль вернулся в A, он должен был проехать четное число дуг AB и BC, но в обоих случаях выше одно из чисел (x, y) нечетно.

Значит, единств. возм. случай – $x = 5$, $y = 1$, $z = 3$.

Тогда длина маршрута $15x + 25y + (15 + 25)^{*} z =$
$= 15 \cdot 5 + 25 + 40 \cdot 3 = 75 + 25 + 120 = 220$ км

Ответ: 220 км

* т.к. диаметр большой окр-сти равен сумме диаметров малых, а длина полуокр-сти прямо пропорц. ее радиусу, $AC = AB + BC = 15 + 25 = 40$ км.

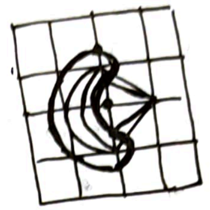
Ответ: 220 км

* Если среди x, y и z найдется одно нечетное, то по одной из окр-стей автомобиль проехал нечетное число полудуг ⇒ чтобы вернуться в A, каждое из чисел x, y, z должно быть нечетным. (~~[illegible]~~

ЧИСТОВИК

№2.

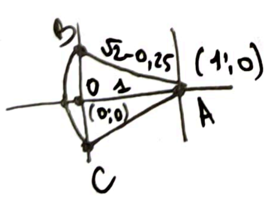
Посмотрим, куда перешли границы полумесяца:



Очевидно полуокружность с центром в (0;0) и радиусом 1 перешла в полуокружность ω_1 с центром в (0;0) и радиусом 1,25; ~~полуокр.~~ дуга с центром в (1;0) и радиусом $\sqrt{2}$ перешла в дугу ω_2 с ц. в (1;0) и радиусом $(\sqrt{2}-0,25)$. Стоит отдельно рассмотреть вершины полумесяца и отметить, что вокруг них образуются окр-сти с радиусом 0,25, которые соединяют контуры двух вышеупомянутых дуг.

Посчитаем площадь полуокружности с центром (0;0) и радиусом 1,25, вычтем площадь S_1, заключенную между ω_2 и прямой $x=0$, а также прибавим сумму площадей полуокружностей с радиусом 0,25.

$$S_{сумм} = \frac{1}{2}\pi\cdot 1,25^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 0,25^2 - S_1$$



Найдем BC:

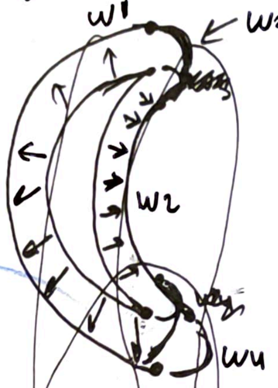
$$BC = 2BO = 2\sqrt{AB^2-OA^2} = 2\sqrt{2+\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1} = 2\sqrt{\frac{17}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC\cdot AO}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{17}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot 1 = \sqrt{\frac{17}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$S_1 = \pi\cdot(\sqrt{2}-0,25)^2\cdot\frac{\angle BAC}{2\pi} - S_{\triangle ABC} = \pi(\sqrt{2}-0,25)^2\cdot\frac{\arccos\frac{1}{(\sqrt{2}-\frac{1}{4})^2}}{2\pi} - \sqrt{\frac{17}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos\angle BAC = \frac{2(\sqrt{2}-0,25)^2-(BC)^2}{2\cdot(AB)^2} = \frac{2AB^2-2(AB^2-AO^2)}{2(AB)^2} = \left(\frac{AO}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{4}}\right)^2$$

№2 (продолжение) ЧИСТОВИК



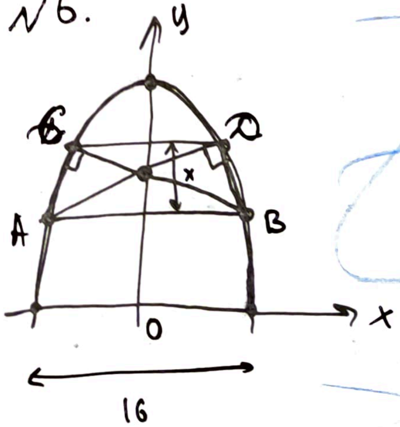
~~Заметим, внешняя дуга полумесяца расползлась в дугу w_1, находящуюся на расстоянии 0,25 от нее, внутренняя — в w_2, находящуюся на расст. 0,25 от нее. w_1 и w_2 соединены четверть окружностями w_3 и w_4 радиусом по 0,25 каждая.~~

~~Проходящую Центр окр-сти, содержащей дугу w_2,~~

$$S_{сумм} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{25}{16}+\frac{2}{16}\right) - S_1 = \frac{27}{32}\pi - \left(\pi\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{\arccos\frac{1}{(\sqrt{2}-\frac{1}{4})^2}}{2\pi} - \sqrt{\frac{17}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{27}{32}\pi - \frac{(\sqrt{2}-0{,}25)^2 \cdot \arccos\frac{1}{(\sqrt{2}-\frac{1}{4})^2}}{2} + \sqrt{\frac{17-8\sqrt{2}}{16}}.$$

Ответ: $\frac{27}{32}\pi - \frac{(\sqrt{2}-0{,}25)^2\arccos\left(\frac{1}{(\sqrt{2}-0{,}25)^2}\right)}{2} + \frac{\sqrt{17-8\sqrt{2}}}{4}$

№6.



Парабола $y = a - bx^2$ симметрична отн. оси OY, значит, т.к. ширина поля равна 16, то $\pm\frac{16}{2} = \pm 8$ — корни $y = a - bx^2$.

Т.к. высота равна 8, то $y = a - b\cdot 0^2 = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = 8 - b\cdot(\pm 8)^2 = 8 - 64b \Rightarrow b = \frac{1}{64}.$$

Пусть x — расстояние между CD и AB, $\left(a, 8 - \frac{a^2}{64}\right)$ — координаты точки A.

Тогда $\begin{cases} AB\cdot x = AD\cdot DB, \\ AB^2 = AD^2 + BD^2 \end{cases}$ т.к. △ABD — прямоугольный.

№6 (продолжение). ЧИСТОВИК

$AB = 2a$.

D имеет координату $y_A + x$ по оси Oy, т.е. $8 - \left(\frac{a^2}{64} - x\right) =$

$= 8 - \left(\frac{a^2 - 64x}{64}\right) \Rightarrow$ по оси Ox D имеет координату

$\sqrt{a^2 - 64x}$.

$AD^2 = x^2 + (\sqrt{a^2-64x} + a)^2 = \cancel{x^2 + 2a^2 + 64x}$ | как сумма квадратов координат по Ox и Oy *

$BD^2 = x^2 + (\sqrt{a^2-64x} - a)^2 = \cancel{x^2 - 64x}$

$\sqrt{(x^2 + 2a + 64x)(x^2 - 64x)} = x \cdot 2a$

$((x^2 + 64x + a) + a)((x^2 + 64x + a) - a) = x^2 \cdot 4a^2$

$(x^2 + 64x + a)^2 - a^2 = x^2 \cdot 4a^2$

$a^4 + a^2(2x^2 + 128x - 4x^2 - 1) + (x^4 + 128x^3 + 64^2x^2)$

$= 0$ — решим как кв. ур-е с ~~коэфф. а~~ переменной a^2

$D = (-2x^2 + 128x - 1)^2 - 4(x^4 + 128x^3 + x^2 \cdot 64^2) =$

$= 4x^4 + 128^2x^2 + 1 - 4 \cdot 128x^3 - 12$

$AD^2 + BD^2 = AB^2$ по т. Пифагора

$\cancel{4a^2 = x^2 + 2a^2 + 64x + x^2 - 64x = 2x^2 + 2a^2}$

$\cancel{4a^2 - 2a^2 = 2x^2}$

$\cancel{x = a}$

$4a^2 = 2x^2 + 2(a^2 - 64x) + 2a^2$

$0 = 2x^2 - 128x$

$128x = 2x^2$

$64x = x^2$

$x \neq 0 \Rightarrow$ делим на x

$64 = x$

Ответ: 64

*

Отрезок BD имеет проекцию x на Oy и $|x_D - x_B|$ на Ox, аналогично $[AD]$ имеет проекцию x на Oy и $|x_D - x_A|$ на Ox

$\boxed{№7}$ Чистовик

Заметим, если число n ~~не делится~~ $\not\vdots\ 9$, то $S(n) \not\vdots\ 9$, однако для $m = 9$ $S(mn) = S(n)$, $mn \ \vdots\ 9 \Rightarrow S(n) = S(mn) \ \vdots\ 9$ — противоречие.

Значит, $n \ \vdots\ 9$. Значит, $\forall m$ $S(mn) \ \vdots\ 9$.

~~Тогда $S(mn) \ \vdots\ 9$, $S(n) \ \vdots\ 9 \Rightarrow S(mn) = 81$; $m \ \vdots\ 9$, $n \ \vdots\ 9$~~

$$S(n) = S(2n) = S(3n) = \ldots = S(n \cdot n)$$

Если мы докажем, что для числа $\underbrace{99\ldots99}_{75}$ $S(n) = S(mn)$, то, т.к. это максимальное 75-значное число, то оно и будет ответом на вопрос задачи.

Докажем по индукции, что для числа $n = \underbrace{99\ldots99}_{k}$ $S(n) = S(mn)$ $\forall m$ $(1 \le m \le n)$

База индукции: $K = 1$

$$S(9) = S(18) = S(27) = \ldots = S(81) = 9$$

Предп. инд: $k \le a$

Предположим, для $K \le a-1$ все работает.

Инд. переход: $k = (a-1)+1 = a$

$$n = \underbrace{99\ldots999}_{a}$$

Пусть $b = \underbrace{99\ldots99}_{a-1}$

$$S(n) = S(b) + 9$$

$\forall m$ $(1 \le m \le b)$ $S(b) = S(mb)$ по П.И.

$$S(n) = S(\underbrace{\overset{c}{90\ldots0}}_{a-1} + \underbrace{\overset{b}{999\ldots9}}_{a-1})$$

~~$S(c) = 9$, $S(b) = 9 \cdot (a-1) \Rightarrow S(\ldots)$~~ $S(n) = S(b) + 9$, ч.т.д.

Ответ: $\underbrace{999\ldots9}_{75}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!