0 077569 050005

07-75-69-05
(43.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Васильева Алексея Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Время выхода: 15:15
Время возвращения: 15:18

+1 лист

07-75-69-05

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Подпись	Расшифровка подписи
12	8	4	4	12	12	12	0	64		Данилов Б.Р.
										Царьков И.В.

Бетигр

64 (шестьдесят четыре)

07-75-69-05 (43.2)

Черновик

2В 4 "3ащ." 7 "напад."

3 3 3 3 4 4 4 н н н н н н н н

1) 4 среди 3 = 0

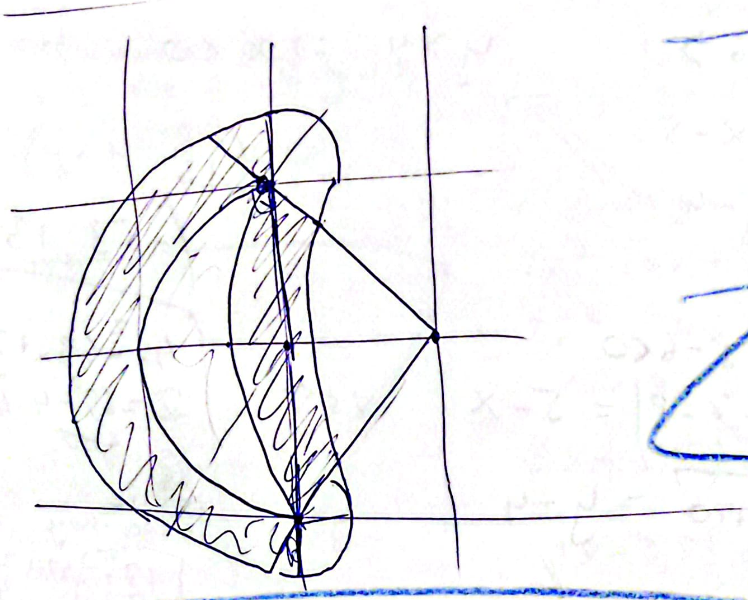
$\frac{2}{В} \cdot \frac{C_4^2}{3} \cdot \frac{C_{10}^3}{н}$

2) = 1

$\frac{2}{В} \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_4^1}{3} \cdot \frac{C_9^3}{н}$

3) = 2

$2 \cdot C_3^2$



Черновик

$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)\,|y-x-8| = (x-5)\,|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

$y \geq 4$

$y-x+10 \geq 0$

$\cancel{x-10 \geq 4 \Rightarrow x \geq 14}$

$y-x+10 = y^2-8y+16$

$y^2-9y+6=-x$

$xy+3x-2y-6 \geq 0$

$-(y^2-9y+6)y+3(y^2-9y+6)-2y+6 \geq 0$

$-y^3+9y^2-6y-3y^2+27y-18-2y-6 \geq 0$

$-y^3+6y^2+19y-24 \geq 0$

1) $\begin{cases} xy+3x-2y-6 \geq 0 \\ |y-x-8| = x-5 \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$ $y>4 \Rightarrow x<0$ $|y| = x-5$ от

(~~13~~

$(-58;13)$

2) $\begin{cases} xy+3x-2y-6<0 \\ \cancel{|y-8|}\ |y-x-8| = 5-x \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$ $x \leq 5$ $y \geq 4$

$4x^2-69x+292=0$

$D=69^2-4\cdot4\cdot292$

~~4900~~

$(70-1)^2 = 4900-140+1 = 4761$

$292 \cdot 16 = 4662$

17^2+3

$17 \cdot 17 = 119, 17$

289

99)

$y-x = +(y^2-9y+6)$

$y-x-8 = y+y^2-9y+6-8 = y^2-8y-2$

$(y-4)^2-18$

2') $y-x-8 \geq 0$

$y=13$ $\sqrt{23-x}=9$ $23-x=81$ $x=23-81=-58$ ✓

2'') $y-x-8<0$

$x-y+8=5-x$ $2x=13+y$

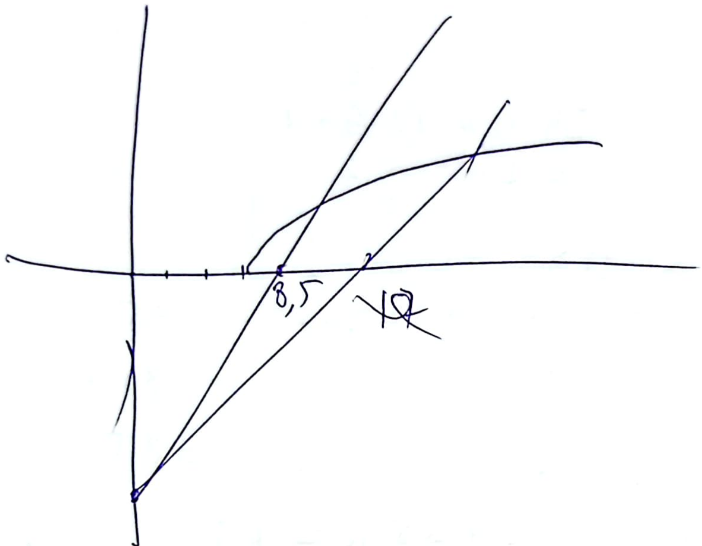
$2x-13-x-8<0$ $\sqrt{2x-13-x+10} = 2x-13-4$

$x \geq 8{,}5$ $\sqrt{x-3} = 2x-17$ $9<x<10$

$x-3 = 4x^2-68x+17^2$

07-75-69-05
(43.2)

Черновик



2'')

$$\begin{cases} xy+3x-2y-6<0 \\ |y-x-8| = 5-x \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \\ (y-x-8)<0 \end{cases}$$

~~$y-x-8<0$~~

$\Rightarrow$ $2x = 13+y$

$y=(2x-13)$

$x(2x-13)+3x-2(2x-13)-6<0$

$2x^2-13x+3x-4x+26-6<0$

$2x^2-14x+20<0$

$x^2-7x+10<0$

$(x-3,5)^2 < 2,25$

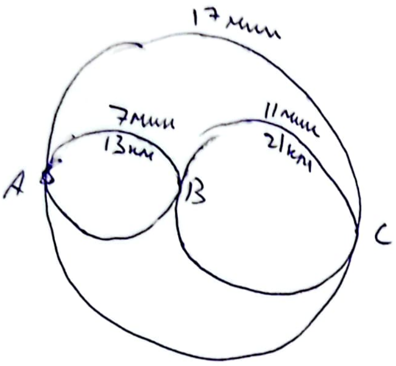
$|x-3,5| < 1,5$ $\quad 1,5^2$

$x \in (2;5)$

но $x \geq 8,5$

$(\sqrt{x-3} = 2x-17)$

Черновик



85 мин

ABCA $\quad 7+11+17=35$ мин K раз

$$34\cdot a+22\cdot \overset{(a+1)}{b}+\cancel{7}4\cdot c+35\cdot k=85$$

$\equiv_7 -1 \quad \equiv_7 1 \quad \equiv_7 0 \quad \equiv_7 0 \quad \equiv_7 1$

$a\geq 0$

$34+22\cdot 2=34+44=78$

$\Rightarrow a=0$ $\qquad 85-22=63$

$22\cdot 1+14\cdot c+35\cdot k=85$

$14\cdot c+35k=63$

из четн. $\to \begin{cases} k=\cancel{1} \\ \cancel{k=0} \end{cases}$ $\quad 63-35=14c=28 \Rightarrow c=2$

28

$y(0)=-1$

$y=f(x)$. $\quad = y =$ $\quad f'(y)=\left(\frac{y-1}{2}\right)'=\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{x+2}{x-2}-1=\frac{4}{x-2}$

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$ $\qquad g(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{12\text{ раз}}$

$g'(0)=?$

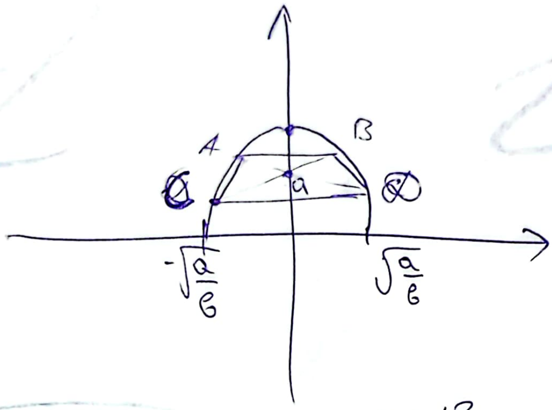
$f(f(x))=$

$=\frac{2}{\frac{x+2}{x-2}-2}=\frac{2(x-2)}{x+2-2x+4}=\frac{2(x-2)}{(6-x)}$

$f(f(f(x)))$ $\quad \frac{2\left(\frac{x+2}{x-2}-2\right)}{6-\frac{x+2}{x-2}}=\frac{2\left(\frac{6-x}{x-2}\right)}{\frac{6x-12-x-2}{x-2}}=\frac{2(6-x)}{5x-10}=$

$=\frac{2}{5}\frac{(6-x)}{(x-2)}$

черновик



$a - bx^2 = 0$

$x^2 = \frac{a}{b}$

$a = 18$

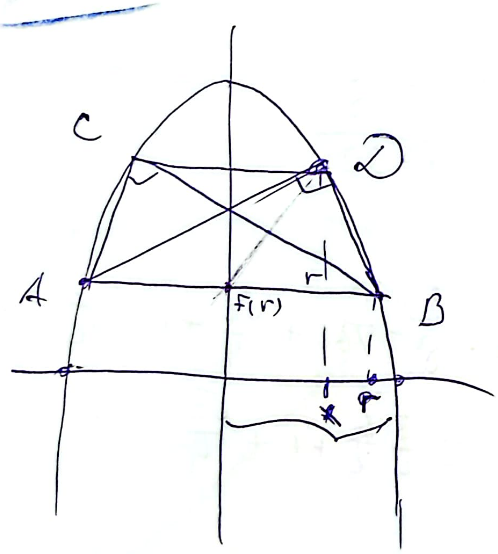
$\sqrt{\frac{a}{b}} = 12$

$\sqrt{\frac{18}{b}} = 12$

$\frac{18}{b} = 144$

$bx^2 = a$

$b = \frac{18}{12^2} = \frac{1}{8}$



$18 \quad f(x) = 18 - \frac{1}{8}x^2$

$$\begin{cases} x^2 + (y - f(r))^2 = r^2 \\ y = 18 - \frac{1}{8}x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (y - 18 + \frac{1}{8}r^2)^2 = r^2 \\ y = 18 - \frac{1}{8}x^2 \end{cases}$$

$x^2 + \left(\frac{1}{8}(r^2 - x^2)\right)^2 = r^2$

$x^2 + \frac{1}{64}(r^4 - 2r^2x^2 + x^2) = r^2$

$64x^2 + r^2 - 2r^2x^2 + x^2 = 64r^2$

$64x^2 - 2r^2x^2 + x^2 = 0$

$64 - 2r^2 + 1 = 0$

$2r^2 = 65$

$r^2 = \frac{65}{2}$

$\frac{18 - \frac{1}{8}r^2}{}$

$64x^2 + r^4 - 2r^2x^2 + x^4 = 64r^2$

~~$65x^2 - 2r^2x^2 + r^4 - 64r^2 = 0$~~

$x^2 - r^2 + \frac{1}{64}(\underbrace{r^2 - x^2}_{t})^2 = 0$

$\frac{1}{64}t^2 - t = 0$

$\frac{1}{64}t = 1 \quad t = 8$

$r^2 - x^2 = 8$

$65x^2 - 2r^2x^2 = 63r^2$

$65x^2 - 2r^2x^2 - 63r^2 = 0$

$y(x) - y(r) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}r^2 = \frac{1}{8}18 = 1$

Черновик.

4 „3" 7 „4"

$\underline{21 \cdot 8} = 168 + 720$

$888 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 =$

$= 18 \cdot 56$

$56 \times 18 = 448 + 560 = 1008$

$\times 1111$

99×3

$(100-1) \cdot 3 = 297$

$1896 \times 2 = 3792$

$\cancel{100}\ (10^n - 1) \cdot K$

$\frac{5}{8} + \frac{5}{8} - \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 + \frac{3}{16} =$

$= \frac{3}{4}\frac{6}{8} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\underbrace{999\ldots9}_{75} \cdot m =$

$= (10^{75} - 1) \cdot m = 10^{75} \cdot m - m$

99

$m\,\overbrace{999\ldots9}^{75} - m + 1$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$x(y+3)-2(y+3)$ Черновик $(x-2)(y+3)$

$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)\,|y-x-8| = (x-5)\,|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

$\boxed{x=2}$

$\sqrt{y+8} = y-4$

$y+8$

$x>$

1) $x>2 \Rightarrow x \geq 5$, $y \geq 4$

$$\begin{cases} |y-x-8| = (x-5) \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

$y-x+10 = y^2-8y+16$

$-x = y^2-9y+6$

$\cancel{-y^2+}$

$y^2-9y+11 = (y-3)^2+2$

$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \end{array}$

$2y^3$

$x=2?$

$44-17$

28

Чистовик №3 (продолжение)

2) ~~xy+~~ $\begin{cases} (x-2)(y+3) \leq 0 \\ |y-x-8| = -x+5 \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$ $x < 2$

$\Downarrow$

$-x = y^2 - 9y + 6$

$|y + y^2 - 9y + 6 - 8| = y^2 - 9y + 11$

$|y^2 - 8y - 2| = y^2 - 9y + 11$

$\begin{cases} y^2 - 8y - 2 \geq 0 \\ y = 13 \end{cases}$ $\leftarrow$ подходит т.к в случ. 1 не подошел

$\begin{cases} y^2 - 8y - 2 \leq 0 \\ y^2 - 8y - 2 = -y^2 + 9y - 11 \end{cases} \Leftrightarrow 2y^2 - 17y + 9 = 0$

3) $x = 2$ тогда

$\sqrt{y - x + 10} = y - 4$
$y \geq 4$

$y - 2 + 10 = y^2 - 8y + 16$

$y^2 - 9y + 8 = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 8 \end{array}\right.$ с уч. $y \geq 4$ ~~(2; 1)~~ (2; 8)

Чистовик

№1 (P.S: претендуют <=> будут выбраны)

~~В.~~ Выбрать вратаря всегда можно 2 способами, поэтому ~~вратаря не учит~~ в конце умножим результат для других игроков на 2

1) Универсалы (далее просто „У") не претендуют в Защитники (далее просто „З"). Тогда

$$\underbrace{C_4^2}_{З} \cdot C_{10}^3 = \frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2} = 720$$

2) 1 У претендует в З: тогда C_3^1 (выбираем кого)

$$\underbrace{C_3^1\cdot C_4^1}_{З} \cdot \underbrace{C_9^3}_{Н} = 3\cdot4\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2} = 2\cdot9\cdot8\cdot7$$

он на 1 меньше, т.к он точно З.

3) 2 У претендуют в З: Аналогично получаем

$$\underbrace{C_3^2}_{З} \cdot \underbrace{C_8^3}_{Н} = 3\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2} = 8\cdot7\cdot3$$

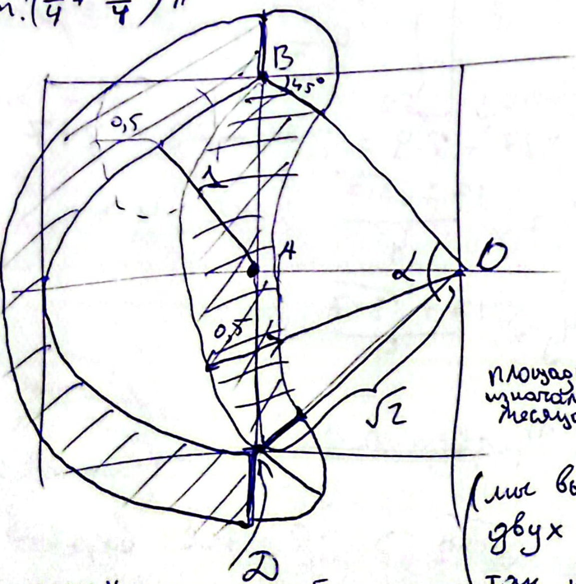
Итого $(720+8\cdot7\cdot3+2\cdot9\cdot8\cdot7)\cdot 2 = 3792$

вратаря не забываем

Ответ: 3792

№2

Ответ: $\left(\frac{7}{4}+\frac{\sqrt2}{4}\right)\pi$



т.к полукруг

$$S = \frac12\pi(1,5^2-1^2) = \frac12\pi\cdot1,25 = 0,625\pi = \frac58\pi$$

$$S = \frac{2}{2}\cdot\frac14\pi\cdot\left(2-\left(\sqrt2-\frac12\right)^2\right) =$$

$2\frac14-\sqrt2$

т.к $\alpha = 90°$

$$= \frac14\pi\left(\sqrt2-\frac14\right)$$

площадь изначального месяца

$$S = \frac12\pi 1^2 - \frac14\pi(\sqrt2)^2 + 1 =$$

(мы вычли $\frac14$ площади окр $r=\sqrt2$, но площади двух ~~Δ~~ треуг (ΔABO и ΔADO) мы и так не учитывали)

$$= 1$$

площади „долек" окружностей $r=0,5$, которые не закрашены

$$S_D = \frac38\pi\left(\frac12\right)^2 = \cancel{\frac{7}{12}\pi}$$

(т.к $\frac{90+45}{360} = \frac38$)

Итого площадь ~~всего~~ сутра

$$\frac58\pi + \frac14\pi\left(\sqrt2-\frac14\right) + 1 + 2\cdot\frac38\pi\left(\frac12\right)^2 = \left(\frac74+\frac{\sqrt2}{4}\right)\pi$$

Чистовик

№3

$$\begin{cases} (xy+3x-2y+6)\,|y-x-8| = (x-5)\,|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} xy+3x-2y-6>0 \\ |y-x-8| = x-5 \\ (*)\sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x\geq 5 \\ y\geq 4 \end{matrix}$, но $\Leftrightarrow (x-2)(y+3)>0$

~~$xy+3x-2y-6>0$, а $y\geq 4$~~, значит ~~$x>0$ $x<0$~~

(*) $y-x+10 = y^2-8y+16$

$y^2-9y+6 = -x$ подставляем в второе ур-е

$|y+y^2-9y+6-8| = -y^2+9y-6-5$

$|y^2-8y-2| = -y^2+9y-11$ $\Leftrightarrow$ ~~$-((y-3)^2+2)$~~

~~$= -((y-4,5)^2-1,25)$~~

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2-8y-2\geq 0 \\ y^2-8y-2 = -y^2+9y-11 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2-8y-2<0 \\ y^2-8y-2 = y^2-9y+11 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2-8y-2\geq 0 \\ 2y^2-17y+9=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2-8y-2<0 \\ y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\; y^2-8y-2\geq 0 \\ (2)\; 2y^2-17y+9=0 \end{cases}$

$D = 17^2-8\cdot 9 = 289-72 = 217$

$y = \dfrac{17\pm\sqrt{217}}{4}$ с уч $y\geq 4$

$y = \dfrac{17+\sqrt{217}}{4}$

(1) $\Leftrightarrow 2y^2-16y-2\geq 0$

вычев (2) получаем

$y-11\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 11$ Проверка:

$\dfrac{17+\sqrt{217}}{4}\geq 11$ ~~да.~~ нет $\sqrt{217}\geq 28$ не верно

Чистовик

№4

действия авто можно разбить на 2 типа:

Очевидно, что 1) автомобиль ~~либо~~ совершает цикл ABCA, ~~либо~~ 2) проезжает четное кол-во раз дугу каждой окр, ~~прежде чем вернется в A (возможно, во время цикла ABCA авто тоже проедет четное кол-во раз по дуге какой-то окр~~. Т.к авто вернулось в A.

∃ кол-во циклов ~~длиной~~ времени 14, 22, 34 минуты a, b, c соотв., а кол-во циклов ABCA = k, тогда

$$14a + 22\underset{\equiv_7 1}{b} + 34c + 35k = 85$$

$\equiv_7 0$, $\equiv_7 1$, $\equiv_7 -1$, $\equiv_7 0$, $\equiv_7 1$; $b = c+1$

$a, b, c, k \in \mathbb{N}$ или 0.

~~тогда~~ очев. $a, b, c, k < 7$, значит из сравнения по mod 7 $b = c+1$.

Если $c \neq 0$, то ~~$85 \leq 34 + 22 \cdot 2$~~

$14a + 35k = 85 - 78 = 7$. ~~Он~~, но $a, k \in \mathbb{Z}$

Значит $c = 0$

$14a + 35k = 85 - 22 = 63$

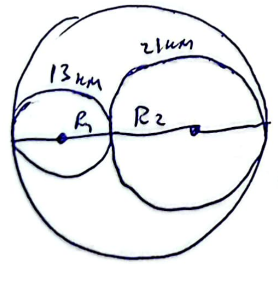
$14a = 63 - 35k$ из соobр четности и неотриц. a

$k = 1$. $a = 2$

Итого авто проехало 1 цикл ABCA

2 цикла ABA (порядок букв не важен)

1 цикл BCB



$2\pi R_1 = 13$ км

$2\pi R_2 = 21$ км

$R_3 = R_1 + R_2 \Rightarrow 2\pi R_3 = 2\pi(R_1 + R_2) = 34$ км

радиус большой окр

Итого $34 + \underset{52}{26 \cdot 2} + 42 \cdot 1 = 34 + 42 + 52 = 128$ км

Ответ: 128 км

Чистовик

№5

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$ в т. $x=0$, $x\neq 2$.

$\exists \ \frac{x+2}{x-2}=y$

$f(y)=\frac{y-1}{2}$

Тангенс угла наклона - значение производной

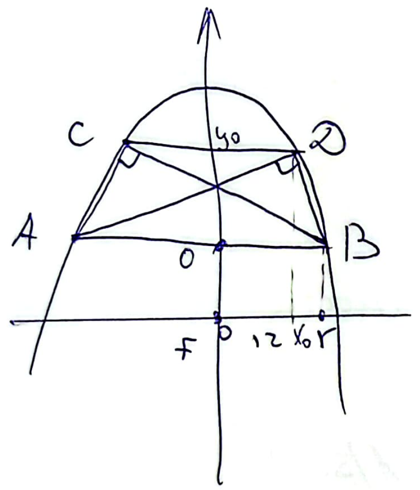
производная композиции - произведение производных.

$f'(y)=\frac{1}{2}$

$$g'(y)=\Big(\underbrace{f(f(\dots(f(x)))}_{12\text{ раз}}\Big)'=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}_{12\text{ раз}}=\frac{1}{2^{12}}$$

Ответ: 2^{-12}

№6



$y=a-bx^2$ - симметр отн $x=0$

~~ЗВ~~ $\exists$ координата x т. B r,

Тогда $OB=r$; $FO=y(r)$

Из симметр. отн. Oy $AO=OB=r$.

~~$OD=r$~~ т. D лежит на окр-е у.

в т. O и радиусом r (т.к $\angle ADB = 90^\circ$)

точки $(0;18)$ и $(12;0)$ лежат на параболе =>

=> $a=18$

$b=\frac{1}{8}$ $y=18-\frac{1}{8}x^2$

ур-е окр-ти ω : $x^2+(y-f(r))^2=r^2$

$\exists$ т. D имеет коорд. $(x_0;y_0)$. она на окр и на параб. =>

$$\Rightarrow^{(1)}\begin{cases} x_0^2+\left(y_0-18-\frac{1}{8}r^2\right)^2=r^2 \\ y_0=18-\frac{1}{8}x_0^2\end{cases}$$ ~~подстав~~

подставляя y_0 в (1) получаем

чистовик

$x_0^2 - r^2 + \frac{1}{64}(r^2 - x_0^2)^2 = 0$ №6 (продолжение)

$\left[\begin{array}{l} r^2 = x_0^2 \leftarrow \text{это т. } B \\ r^2 - x_0^2 = 64 \leftarrow \text{это т. } D \end{array}\right.$

тогда расстояние между баллами

$y_0 - y(r) = 18 - \frac{1}{8}x_0^2 - (18 - \frac{1}{8}r^2) = \frac{1}{8}(r^2 - x_0^2) = 8.$

Ответ: 8

№7.

Ответ: $\underbrace{99\ldots9}_{75\text{ раз}} = n$

Оценка: это максимальное 75 значное число

Док-во: $n \cdot m = (10^{75} - 1) \cdot m = m \cdot 10^{75} - m =$

$\left[\exists\ m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_i},\ i \le 75\right] = \overline{a_1 a_2 \ldots a_i \underbrace{000\ldots00}_{75}} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_i} =$

(НУО $a_i \ne 0$ (если $a_i = 0$, то $S(m \cdot n) = S(\frac{m}{10} \cdot n)$, рассмотрим тогда $S(\frac{m}{10} \cdot n)$) (и т.д. если $\frac{m}{10} \vdots 10$, то $\frac{m}{100} \ldots$ & т.к $m < 10^{76}$, то кол-во делений конечно) (P.S. для $m = 1$ очев верно)

$= \overline{a_1 a_2 \ldots (a_i - 1) \underbrace{999\ldots99}_{75}} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_i} + 1$

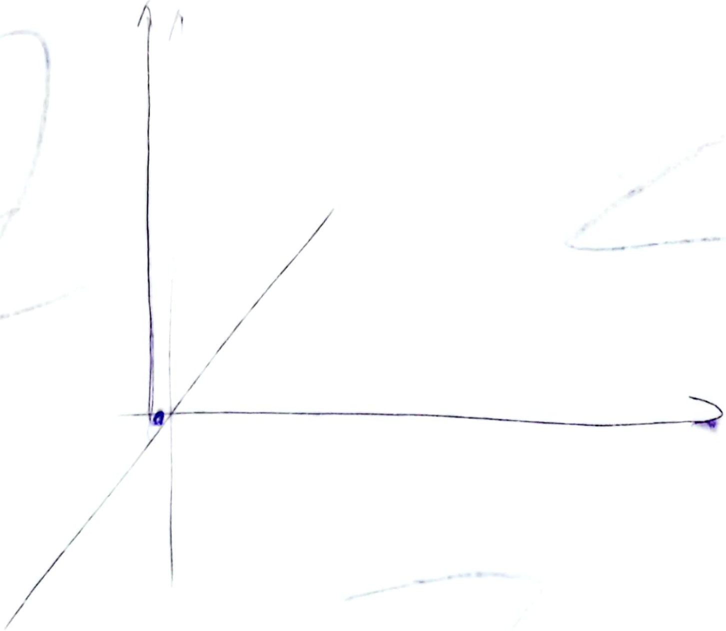
теперь при вычитании получим

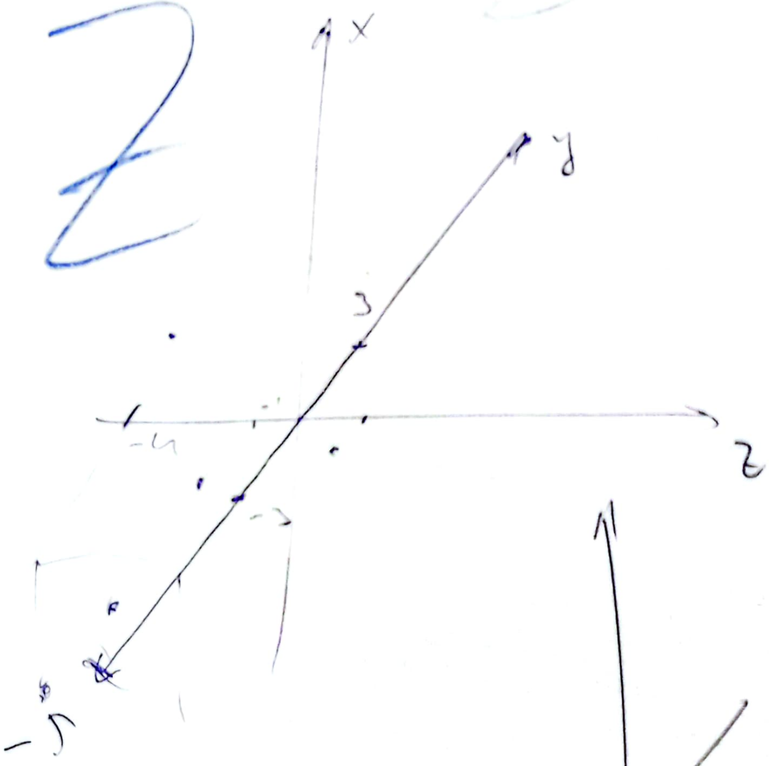
$\overline{(a_1)(a_2)\ldots(a_i - 1)\overbrace{\underbrace{99\ldots9}_{\text{тут может не быть девяток, но}}(9 - a_1)(9 - a_2)\ldots(9 - a_i)}^{75\text{ шт}}} + 1$

$i \le 75$, поэтому в крайнем случае $\overline{a_1 a_2 \ldots (a_i - 1)(9 - a_1)\ldots(9 - a_i)} + 1$

все равно не пересекаются

Тогда сумма цифр ~~9+9+…~~ очевидно ~~9~~ совпадает с суммой цифр числа $\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{75\text{ раз}}$ (1 не даст переход через десяток т.к ~~так~~ $a_i \ne 0$, а значит $9 - a_i < 9 \Rightarrow 9 - a_i + 1 \le 9$)




x
y
z
3