0 376018 760008

37-60-18-76
(40.56)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Васильевой Елизаветы Романовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
8	0	12	12	12	12	0	0	56

37-60-18-76 (40.56)

Черновик 56 (пятьдесят шесть)

1470
2606
4076

№1

6 : 1 вратарь 2 защитника 3 нападающих

Всего: 2 вратаря 4 защитника 7 нападающих

3 универсала

168
× 30
3040

$2\ 4\ 3\ 7\ 6\ 5 = 8\cdot3\cdot7\cdot30 = 8\cdot21\cdot30 = 168\cdot30 = 3040$

0 универ

6 3 3 Н Н Н

1 3 — 2 5 4 7 6 5 · 3

2 3 — 2 6 5 7 6 5 · 3

1 Н — 2 4 3 8 6 5 · 3

2 Н — 2 4 3 8

1524
882
2606

168
× 30
4840

168
× 30
5040

630
× 8
5040

1524
882
2606
1470
4076

2 3 2 7 6 5

4·3=12
2

2 3 — 2 4 3 3 2 1

3 4 — 2 3 4 7 6 5

1 3 — 2 4 3 3 7 6

2 Н — 2 4 3 3 2 7

1Н — 2 3 4 3 7 6

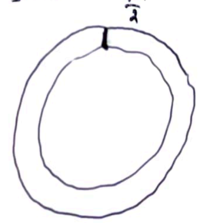
1 3 1Н — 2 3 2 3 7 6

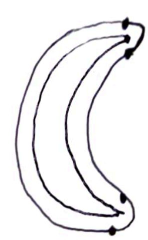
2 3 1Н — 2 3 4 3 2 7

2Н 1 3

1 2 3 4

12
13
14
23
24
34





756
126
882

72
×21
72
144
1512

36
×14
144
36
504

28
× 9
252

$2\cdot4\cdot3\cdot7\cdot6\cdot5$

48
×21
48
96
1008

42
×21
42
84
1008

42
× 9
378

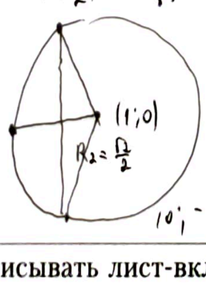
390
504
894

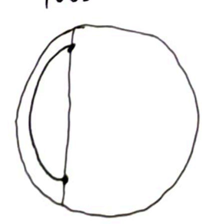
1764
894
1658

36
×21
36
72
756

210
× 7

$R=\sqrt2$





Чистовик

№1

6 лучших: 1 вратарь 2 защитника 3 нападающих

Претенденты: 2 вратаря 4 защитника 7 нападающих

3 универсала

Способы выбрать шестёрку:

1) Без универсалов $\underset{в}{2}\cdot\underset{з}{4}\cdot\underset{з}{3}\cdot\underset{н}{7}\cdot\underset{н}{6}\cdot\underset{н}{5} : \cancel{4840}\ \cancel{5040}\ (2!\cdot 3!) = 20\cdot 21 = 420$

в – вратарь; з – защитник; н – нападающий

2) 1 универсал – защитник $\underset{в}{2}\cdot\underset{з}{3}\cdot\underset{з}{4}\cdot\underset{н}{7}\cdot\underset{н}{6}\cdot\underset{н}{5} : 3! = 6\cdot 7\cdot 20 = 42\cdot 20 = 840$

3) 2 универсала – защитники $\underset{в}{2}\cdot\underset{з}{3}\cdot\underset{з}{2}\cdot\underset{н}{7}\cdot\underset{н}{6}\cdot\underset{н}{5} : (2!\cdot 3!) = 210$

4) 1 универсал – нападающий $\underset{в}{2}\cdot\underset{з}{4}\cdot\underset{з}{3}\cdot\underset{н}{3}\cdot\underset{н}{7}\cdot\underset{н}{6} : (2!\cdot 2!) = \cancel{3\cdot 7\cdot 10 = 630}$ $36\cdot 21 = 756$

5) 2 универсала – нападающие $\underset{в}{2}\cdot\underset{з}{4}\cdot\underset{з}{3}\cdot\underset{н}{3}\cdot\underset{н}{2}\cdot\underset{н}{7} : (2!\cdot 2!) = 28\cdot 9 = 252$

6) 3 универсала – нападающие $\underset{в}{2}\cdot\underset{з}{4}\cdot\underset{з}{3}\cdot\underset{н}{3}\cdot\underset{н}{2}\cdot\underset{н}{1} : (2!\cdot 3!) = 12$

7) 1 универсал – нападающий
1 универсал – защитник $\underset{в}{2}\cdot\underset{з}{3}\cdot\underset{з}{4}\cdot\underset{н}{2}\cdot\underset{н}{7}\cdot\underset{н}{6} : 2! = 12\cdot 21\cdot \cancel{4} = \overset{48}{\cancel{72}}\cdot 21 = \overset{1008}{\cancel{1512}}$

8) 2 универсала – защитники
1 универсал – нападающий $\underset{в}{2}\cdot\underset{з}{3}\cdot\underset{з}{2}\cdot\underset{н}{1}\cdot\underset{н}{7}\cdot\underset{н}{6} : (2!\cdot 2!) = 3\cdot 42 = \cancel{378}$ 126

9) 1 универсал – защитник
2 универсала – нападающие $\underset{в}{2}\cdot\underset{з}{3}\cdot\underset{з}{4}\cdot\underset{н}{1}\cdot\underset{н}{2}\cdot\underset{н}{7} : 2! = 36\cdot \overset{7}{\cancel{14}} = \cancel{504}$ 252

Всего ~~8~~ способов: $420 + 840 + 210 + \overset{756}{\cancel{630}} + 252 + 12 + \overset{1008}{\cancel{1512}} + \overset{126}{\cancel{378}} + \overset{252}{\cancel{504}} =$

$\cancel{= 210(2+4+1+3) + 1764 + 390 + 504} =$

$\cancel{= 210\cdot 10 + 1764 + 894 = 2100 + 1658 = 3758}$

$= 210\cdot 7 + 756 + 504 + 1020 + 126 =$

$= 1470 + 882 + 1524 = 1470 + 2606 = 4076$

Ответ: ~~3758~~ 4076

Чистовик №2

~~Рассмотрим одну из дуг.~~

Рассмотрим ~~окружность~~ круг. После того, как ~~от~~ каждая точка превратилась в круг $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, радиус круга увеличился на r.

Рассмотрим полумесяц:

Разделим его на 4 части

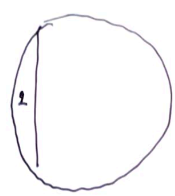
$S_0 = S_1 - S_2 + S_3 + S_4$

S_1:

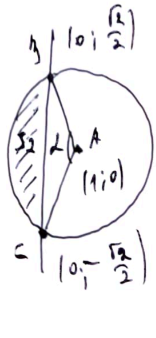
полукруг $R_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$S_1 = \pi R_1^2 = \pi \frac{(\sqrt{2}+2)^2}{4} = \pi \frac{6+4\sqrt{2}}{4}$

S_2:



S_2 – сектор круга



$R_2 = \sqrt{2} \Rightarrow R_2 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$BC = \sqrt{2}$; $AB = AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2+2-\frac{2}{4}}{2\cdot 2} = \frac{4-\frac{1}{2}}{4} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{64-49}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$S_2 = \frac{A}{\cancel{360}\ 2\pi} \cdot \pi R_2^2 - S_{ABC} = \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)}{2} \cdot \frac{2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)}{4} - \frac{\sqrt{15}}{32}$

$S_3 = S_4 = \frac{1}{2} \pi R_3^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{2}{4} = \frac{\pi}{4}$

$S_0 = \pi \frac{6+4\sqrt{2}}{4} - \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)}{4} + \frac{\sqrt{15}}{32} + \frac{\pi}{4}$

Ответ: $S_0 = \pi \frac{6+4\sqrt{2}}{4} - \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)}{4} + \frac{\sqrt{15}}{32} + \frac{\pi}{4}$

Черновик

№3

$$\begin{cases}(xy+2x-y-2)|y-x-10| = (x-4)|xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5\end{cases}$$

$$\begin{cases} y-x-8 \geq 0 \\ y-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq x+8 \\ y \geq 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-\sqrt{2} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$x(y+2)-(y+2)=(x-1)(y+2)$

$$\begin{cases}(x-1)(y+2)|y-x-10| = (x-4)|(x-1)(y+2)| \\ \sqrt{} \quad \cancel{y^2+x^2+64-2xy+16y-16x} = \\ y-x+8 = y^2-10y+25\end{cases}$$

$x=1$:

$y=2$:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq -2 \end{cases}\end{array}\right. + \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < 1 \\ y \geq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq -2 \end{cases}\end{array}\right. -$$

$$\left[\begin{array}{l} |y-x-10| = x-4 \\ |y-x-10| = 4-x \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y-x-10 = x-4 \\ y-x-10 = 4-x \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = 2x+6 \\ y = 14 \end{array}\right.$$

$30 - 17 = 13$

$16 \times 3 = 48$

16

268

$217 = 31$

15×15: 75, 15, 225

$14 < \sqrt{217} < 15$

$\approx 14,5$

$11,5$

8

$-17,5$

8

$14(14-11)+x+17=0$

$x = -17 - 14 \cdot 3 = -17 - 42 = -59$

$2x+6 > 8-x$

$3x > 2$

$x > \frac{2}{3}$

Чистовик №3

$$\begin{cases} (xy+2x-y-2)|y-x-10| = (x-4)|xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 8-x \\ y \geq 5 \end{cases} \quad (0)$$

$$\begin{cases} (x-1)(y+2)|y-x-10| = (x-4) \cancel{xy+} |(x-1)(y+2)| \\ y-x+8 = y^2-10y+25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(y+2)|y-x-10| = (x+4)|(x-1)(y+2)| \quad (1) \\ y^2-11y+x+17=0 \end{cases}$$

1) $x=1$

$y^2-11y+18=0$

$(y-9)(y-2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases} \text{ подходит } (1;9) \\ \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ не подходит в } (0) \end{array}\right.$$

2) $y=-2$ не подходит в (0)

$\cancel{4+22+x+17=0}$

$\cancel{x=-43}$

3)
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-1)(y+2)>0 \\ |y-x-10| = (x-4) \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1)(y+2)<0 \\ |y-x-10| = 4-x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-x-10 = x-4 \\ y^2-11y+x+17=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x-10 = 4-x \\ y^2-11y+x+17=0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2x+6 \\ 4x^2+24x+36-22x-66+x+17=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=14 \\ 14^2-11\cdot 14+x+17=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$4x^2+3x-13=0$

$D = 9+16\cdot 13 = 9+208 = 217$

$x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{217}}{8 \cancel{16}} \qquad x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{217}}{8 \cancel{16}}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=14 \\ x=-59 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-3+\sqrt{217}}{8} \\ y=\frac{-3+\sqrt{217}}{4}+6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-3-\sqrt{217}}{8} \\ y=\frac{-3-\sqrt{217}}{4}+6 \end{cases} \end{array}\right.$ Чистовик

Проверим, подходят ли корни в систему!

1) $x=-59$ $y=14$

В (0) подходят

(1)! ~~(x-y~~ $(x-1)(y+2)<0$ в данном случае

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |y-x-10|=4-x \\ y-x-10\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y-x-10=4-x$

подходит

Значит корни правильно получены $(-59;14)$

2) $x=\frac{-3+\sqrt{217}}{8}$ $y=\frac{-3+\sqrt{217}}{4}+6$

$14<\sqrt{217}<15$

$\frac{11}{8}<x<\frac{12}{8}$ $\frac{11}{4}+6<y<\frac{15}{4}+6$

В (0) подходят

$(x-1)(y+2)>0$

$\Rightarrow |y-x-10|=x-4$

$y=2x+6$

$y-x-10=x+6-10=x-4$, $x=\frac{-3+\sqrt{217}}{8}<0$

Значит $|y-x-10|=$ ~~4-x~~ $x-4 \Rightarrow y-x-10=4-x$

Значит корень получен из того уравнения

$\Rightarrow$ не подходит

3) $x=\frac{-3-\sqrt{217}}{8}$ $y=\frac{-3-\sqrt{217}}{4}+6$

$\frac{-18}{8}<x<\frac{-17}{8}$ $\frac{-18}{8}+6<y<\frac{-17}{8}+6$

В (0) не подходят

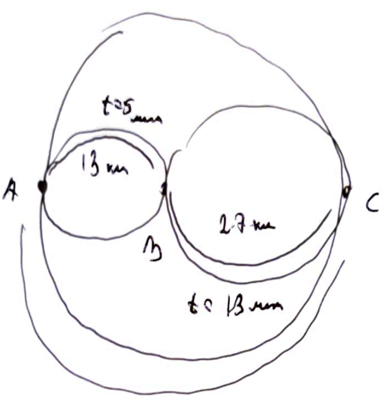
Ответ: $(1;9)$, $(-59;14)$

Черновик

№4

$\pi R_1 = 13 \quad R_1 = \frac{13}{\pi}$

$R_2 = \frac{27}{\pi}$



$AC = \pi R_0 = 13+27=30$

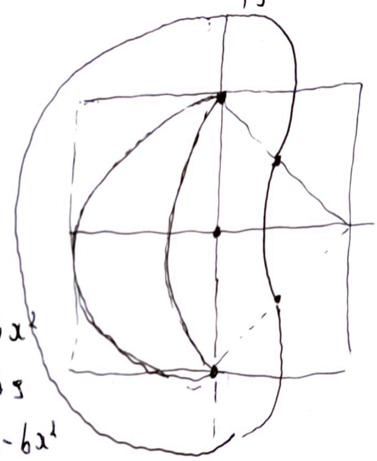
$t_0 = 95$ минут

$5x + 13y + 19z = 95$

t=13 минут

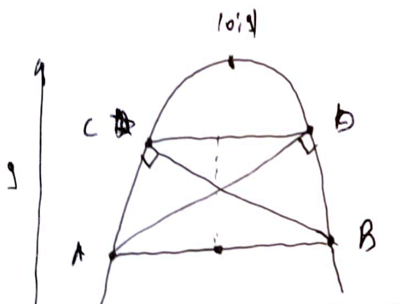
$95 - 19 = 76$ $\quad 95 - 38 = 57$ $\quad 19 \times 2 = 38$ $\quad 19 \times 3 = 57$ $\quad 95 - 57 = 38$ $\quad 19 \times 4 = 76$ $\quad 95 - 76 = 19$

$n=1 \quad 2n=$



$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2+4}{x-2} = 1$



$y = a - bx^2$

$a = 9$

$y = 9 - bx^2$

$9 = b \cdot 81$

$b = \frac{1}{9}$

$\boxed{y = 9 - \frac{x^2}{9}}$

$9y = 81 - x^2$

$x^2 = 81 - 9y$

$y = 9 -$

$\sqrt{9^2+9^2} = 9\sqrt{2} = \sqrt{81 \cdot 2}$

$81 \cdot 4 = 9 \cdot 2$

$\sqrt{81 \cdot 2} + \sqrt{81 \cdot 2}$

Чистовик №4

AB: $S_1=13$ км $t_1=5$ мин

BC: $S_2=27$ км $t_2=13$ мин

AC: $S_3=40$ км $t_3=19$ мин

$S_1=\pi R_1$

$S_2=\pi R_2$

$2R_3=2R_1+2R_2$

$R_3=R_1+R_2$

$S_3=\pi R_3=\pi(R_1+R_2)=S_1+S_2=40$ км

~~x — кол~~ $t_0=95$ минут

x - кол-во проеханных дуг AB

y - кол-во дуг BC

z - кол-во дуг AC

$5x+13y+19z=95$

$z=0$: $5x+13y=95$

~~y 0 1 2 3 4 5~~

~~x × × ×~~

$y \vdots 5 \Rightarrow$ $y=0$ $x=19$ — $(6;5;0)$

$y=5$ $x=6$ — $(19;0;0)$

$z=1$: $5x+13y=76$

y	0	1	2	3	4	5
x	×	×	10	×	×	×

$(10;2;1)$

$z=2$: $5x+13y=57$

y	0	1	2	3	4
x	×	×	×	×	1

$(1;4;2)$

$z=3$: $5x+13y=38$

y	0	1	2
x	×	5	×

$(5;1;3)$

$z=4$: $5x+13y=19$

y	0	1
x	×	×

$z=5$: $5x+13y=0$ — $(0;0;5)$

Т.к. из т. B можно уйти только по дугам AB и BC, то ~~x y~~ x и y имеют одинаковую чётность

Если x и y чётны, то z - чётно (т.к. при чётных x и y возвращаемся в A)

чистовик

Аналогично, если x и y нечётно, то z - нечётно

уначит подходит $(5; 1; 3)$

$S_0 = 5S_1 + S_2 + 3S_3 = 5 \cdot 13 + 27 + 3 \cdot 40 = 65 + 27 + 120 = 92 + 120 = 212$ км

Ответ: $S_0 = 212$ км

№5

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2+4}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$

$f\left(1 + \frac{4}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$1 + \frac{4}{x-2} = \cancel{t}$ $\qquad \frac{2}{x-2} = \frac{\cancel{t}-1}{2}$

$f(\cancel{t}) = \frac{\cancel{t}-1}{2}$ $\qquad f(x) = \frac{x-1}{2} = 0,5(x-1) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$f(f(x)) = 0,5(0,5(x-1)-1) = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

$f(f(f(x))) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) - 1\right) = \frac{1}{8}x - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}x + C_2 = \frac{1}{2^3}x + C_2$

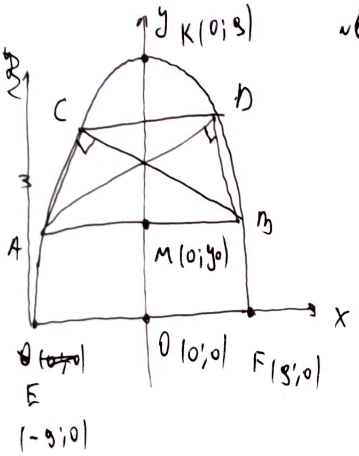
$g(x) = \frac{1}{2^{12}}x + C_{12}$

$tg\,\alpha$ - тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке $x=0$

$tg\,\alpha = g'(0) = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{1024 \cdot 4} = \frac{1}{4096}$

Ответ: $\frac{1}{4096}$

№6



Введём ПДСК как на рисунке

$ACDB$ - р/б трапеция

Уравнение параболы

$y = 9 - \frac{x^2}{9}$

Пусть ~~x_A~~ $y_A = y_B = y_0$

$y_C - y_A = h$ - искомое расстояние

M - центр описанной около $ACDB$ окружности; $M(0; y_0)$

$A: (x_A; y_0)$ $\quad y_0 = 9 - \frac{x_A^2}{9} \Rightarrow x_A^2 = 81 - 9y_0$

Чистовик

$x_A^2 = x_B^2 = 81 - 9y_0$

Уравнение окружности

$R = x_A^2 = 81 - 9y_0$

$x^2 + (y - y_0)^2 = 81 - 9y_0$

$C, D \in \text{окр}(M; R)$

$y_C = y_D = y_0 + h$

$y_0 + h = 9 - \frac{x_C^2}{9} \Rightarrow x_C^2 = 81 - 9(y_0 + h)$

$C \to$ уравнение окр

$x_C^2 + (y_C - y_0)^2 = 81 - 9y_0$

$\cancel{81 - 9(y_0 + h) + (y_C}$

$81 - 9(y_0 + h) + (y_0 + h - y_0)^2 = 81 - 9y_0$

$\cancel{81} - \cancel{9y_0} - 9h + h^2 = \cancel{81} - \cancel{9y_0}$

$h^2 - 9h = 0$

$h(h - 9) = 0$

$h = 9$

Ответ: $h = 9$

№7

Д Пусть $n \not\vdots 9$

$m = 9$

$S(nm) = S(n)$

$S(9n) = S(n)$

т.к. $n \not\vdots 9$, то $S(n) \not\vdots 9$

т.к. $9n \vdots 9$, то $S(9n) \vdots 9$

$\Rightarrow$ противоречие

Значит $n \vdots 9$

$n = \overline{a_{89}a_{88}a_{87}\dots a_0}$

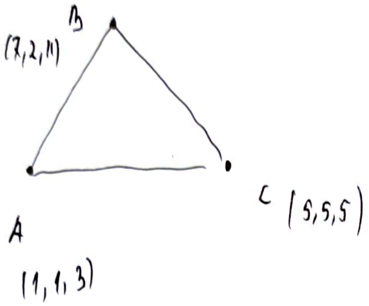
$S(n) = a_{89} + a_{88} + \dots + a_0$

$mn = m(a_{89} \cdot 10^{89} + a_{88} \cdot 10^{88} + \dots + a_0) = m a_{89} \cdot 10^{89} + m a_{88} \cdot 10^{88} + \dots + m a_0$

Чистовик

№ 8

$A(1,1,3)$ $B(7,2,11)$ $C(5,5,5)$



$\vec{AB}(6;1;8)$

$\vec{AC}(4;4;2)$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 1 & 8 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2i + 24k + 32j - 4k - 32i - 12j =$$

$$\begin{matrix} i & j & k \\ 6 & 1 & 8 \end{matrix}$$

$$= -30i + 20j + 20k$$

$\vec{n}(-30;20;20)$

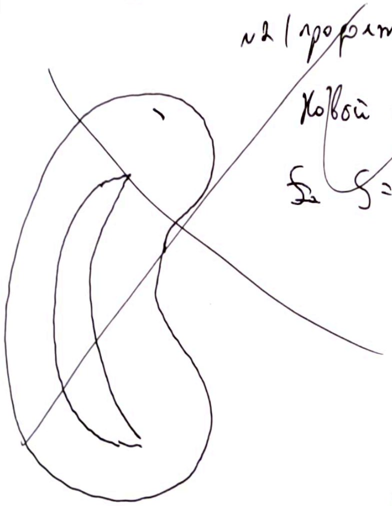
$\vec{n_1}(-3;2;2)$ $\vec{n_2}(3;-2;-2)$

$(ABC) = \alpha:$ $3x - 2y - 2z + d = 0$

$A \in \alpha:$ $3 - 2 - 6 + d = 0 \Rightarrow d = 5$

$(ABC):$ $3x - 2y - 2z + 5 = 0$

№2 (продолжение)



Новой полумесяц имеет виду

$S = S_n + l.$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!