0 185305 480006

18-53-05-48
(40.35)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

ДЕШИФР

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Ломоносов»
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Васюковой Татьяны Сергеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» 02 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	0	12	12	12	12	12	0	72

-2 (семьдесят два) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

18-53-05-48
(40.35)

Черновик

N1.

1В.: 2

2З.: 5

3Н.: 6

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} +3$

В: 2

1)	$2\cdot C_5^2 \cdot C_6^3$	0 0	$2\cdot 10\cdot \frac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot3} = 2\cdot10\cdot20 = 2\cdot200$
2)	$2\cdot C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_6^3$	1 0	$2\cdot5\cdot3\cdot20 = 2\cdot300$
3)	$2\cdot C_3^2\cdot C_6^3$	2 0	$2\cdot3\cdot20 = 2\cdot60$
4)	$2\cdot C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_6^2\cdot C_2^1$	1 1	$2\cdot5\cdot3\cdot\frac{6\cdot5}{2}\cdot2 = 2\cdot450$
5)	$2\cdot C_3^2\cdot C_1^1\cdot C_6^2$	2 1	$2\cdot3\cdot\cancel{3}\cdot15 = 2\cdot45$
6)	$2\cdot C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_6^1\cdot C_2^2$	1 2	$2\cdot5\cdot3\cdot6 = 2\cdot90$
7)	$2\cdot C_5^2\cdot C_3^2\cdot C_6^1$	0 2	$2\cdot10\cdot3\cdot6 = 2\cdot180$
8)	$2\cdot C_5^2$	0 3	$2\cdot10$
9)	$2\cdot C_5^2\cdot C_3^1\cdot C_6^2$	0 1	$2\cdot10\cdot3\cdot15 = 2\cdot450$

$$\Sigma = 2\cdot(200+300+60+450+\overset{45}{\cancel{135}}+90+180+10+450) =$$

$$= 2\cdot(1500+60+\overset{45}{\cancel{135}}+180) = 2\cdot 1875 = \boxed{3750}$$

1785

$$C_3^0 = \frac{3!}{0!\cdot3!}$$

Черновик

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$$

$$x(y+4)-(y+4) = (x-1)(y+4)$$

2) $\sqrt{y-x+10} = y-3$

$$\begin{cases} y \geq 3 \\ y-x+10 = y^2-\cancel{8}y+9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \geq 3 \\ y^2-7y+x-1=0 \end{cases}$$

$y \geq 3 \Rightarrow \quad y+4 \geq 0$

$y-x+10 \geq 0$

$x \leq y+10$, $-x \geq -y-10$

1) $x \geq 1$, $y-x-8 \geq 0$

$(x-1)(y+4)(y-x-8-x+4) = 0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y-2x-4=0 \end{array}\right. \\ y-x-8 \geq 0 \end{cases}$$

1. $\begin{cases} x=1 \\ y \geq 9 \\ y^2-7y=0 \end{cases}$ $\varnothing$

$\times 16$
13
48
16
208

2. $y = 2x+4$

$y \geq x+8$

$2x+4 \geq x+8$

$x \geq 4$

$4x^2+16x+16-14x-28+x-1=0$

$4x^2-\cancel{x}x-13=0$

$D = 1+4\cdot 4\cdot 13 = 209$

$x = \frac{1+\sqrt{209}}{8} \overset{?}{\geq} 4$

$\sqrt{209} \overset{?}{\geq} 31$ $\varnothing$

2) $x \geq 1$, $y-x-8 < 0$

$(x-1)(y+4)(-y+x+8-x+4)=0$

$(x-1)(y+4)(y-12)=0$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=12 \end{array}\right. \\ y < x+8 \end{array}\right.$$

1. $\boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ y=7 \end{array}}$

2. $y=12$

$x=-59$

$\varnothing$

18-53-05-48 (40.35)

Черновик

(3) $x < 1$, $y - x - 8 \geq 0$

$(x-1)(y+4)(y-12)=0$

$\begin{cases} y = 12 \\ y \geq x+8 \end{cases}$

$\boxed{x = -59}$

(4) $x < 1$, $y < x+8$

$\begin{cases} y - 2x - 4 = 0 \\ y < x + 8 \end{cases}$

$2x + 4 < x + 8$

$x < 4$

$\boxed{x = \frac{1 + \sqrt{209}}{8}}$

$\frac{13}{7} \overset{?}{=} \frac{21}{11}$

$143 \overset{?}{\neq} 3 \cdot 7^2$

по AB : $\frac{13}{7}$ км/мин $13 = \pi r_1$

по BC : $\frac{21}{11}$ км/мин $21 = \pi r_2$

по AC : $\frac{34}{17} = 2$ км/мин

$R = r_1 + r_2 =$

$= \frac{13+21}{\pi} = \frac{34}{\pi}$

$\pi R = 34$ км

$1 ч. 25 мин = 85 мин$

0) $n = 0$: $k \cdot 7 + m \cdot 11 = 85$

$m = 2$, $k = 9$

$\varnothing$

$k \cdot 7 + m \cdot 11 + n \cdot 17 = 85$

1) $n = 1$

$k \cdot 7 + m \cdot 11 = 68$

0. $m = 0$ $\varnothing$

1. $m = 1$ $\varnothing$

2. $m = 2$ $\varnothing$

3. $m = 3$, $k = 5$ ✓

4. $m = 4$ $\varnothing$

5. $m = 5$ $\varnothing$

6. $m = 6$ $\varnothing$

$m \geq 7$ $\varnothing$

2) $n = 2$

$k \cdot 7 + m \cdot 11 = 51$

$m = 4$, $k = 1$

3) $n = 3$, $k \cdot 7 + m \cdot 11 = 34$

$\varnothing$

4) $n = 4$, $k \cdot 7 + m \cdot 11 = 17$

$\varnothing$

5) $n = 5$, $k = 0$, $m = 0$

$\varnothing$

AC CB BC CB BA AB BA AB BA

$L = 34 + 3 \cdot 21 + 5 \cdot 13 = 34 + 63 + 65 = \boxed{162}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$S(mn) = S(n)$

$$\begin{array}{r} 380000 \\ -\quad 38 \\ \hline 379962 \end{array}$$

Наиб. 85-зн. ч. : $\underbrace{99\ldots9}_{85}$

$99 \cdot 2 = 198$

Докажем, что оно подх. $\quad S(n) = 85 \cdot 9$

пусть $m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$, $k \le 85$, $a_1 \ne 0$

$m \cdot n = m \cdot 10^{85} - m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k \underbrace{00\ldots0}_{85 \text{ шт.}}} - \overline{a_1 \ldots a_k}$

пусть a_p $(p \le k)$ — ~~последняя~~ самая правая ненулевая цифра числа m

тогда $m \cdot n = \overline{a_1 a_2 \ldots (a_p - 1) \underbrace{99\ldots9}_{k-p+85-k \text{ шт.}} (10-a_1)(10-a_2)\ldots(10-a_p)0\ldots00}$

$-1 \quad -1$ цифры

$S(mn) =$ ~~$a_1 a_2 a_3$~~

$a_1 + a_2 + \ldots + a_p - 1 + 9 \cdot 85 - 9 \cdot p + 10 \cdot p - (a_1 + \ldots + a_p) - (p-1) =$

$= -1 + 9 \cdot 85 + 1 = \boxed{9 \cdot 85}$, ч.т.д.

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 81 \\ \hline 99 \\ 792 \\ \hline 8019 \end{array}$$

$S = 99$

№5. $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$

$y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} \cdot (1-x)$

$y = \frac{x-1}{x+1}$

$yx + y = x - 1 \Rightarrow x(y-1) = -1-y$

$x = -\frac{y+1}{y-1}$

$f(y) = -\frac{1}{1 - \frac{y+1}{y-1}} = -\frac{1}{\frac{y-1-y-1}{y-1}} = -\frac{y-1}{-2} = \frac{y-1}{2}$

$\boxed{f(x) = \frac{x-1}{2}}$

18-53-05-48
(40.35)

Черновик

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$$

$$\underbrace{f(f(f(x)))}_{3} = \frac{\frac{x-1}{2}-3}{4} = \frac{x-7}{8}$$

4: $\frac{\frac{x-1}{2}-7}{8} = \frac{x-15}{16}$

5: $\frac{\frac{x-1}{2}-15}{16} = \frac{x-31}{32}$

6: $\frac{\frac{x-1}{2}-31}{32} = \frac{x-63}{64}$

7: $\frac{\frac{x-1}{2}-63}{64} = \frac{x-127}{128}$

$(x^2)' = 2x$

$x' = 1$

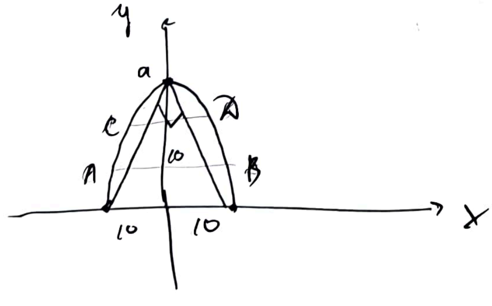
8: $\frac{x-255}{256}$

9: $\frac{x-511}{512} = g(x)$

$$g'(x) = \left(\frac{x}{512}\right)' - \left(\frac{511}{512}\right)' = \boxed{\frac{1}{512}}$$

№6.

$y = a - bx^2$



Чистовик стр. 1.

№1.

Разберём случаи, которые будем называть "i j", где i – число выбранных универсалов в кач-ве защитника, j – в кач-ве нападающего

1) 0 0 : $2\cdot C_5^2\cdot C_3^0\cdot C_6^3\cdot C_3^0 = 2\cdot 200$

выбор В. выбор З. У. в кач-ве З. У. в кач-ве Н.

Н.

В – вратарь,
З – защит.,
Н – напад.,
У – универс

В такой же форме запишем для всех случаев

2) 10 : $2\cdot C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_6^3\cdot C_3^0 = 2\cdot 300$

3) 20 : $2\cdot C_5^0\cdot C_3^2\cdot C_6^3\cdot C_3^0 = 2\cdot 60$

4) 11 : $2\cdot C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_6^2\cdot C_2^1 = 2\cdot 450$

5) 21 : $2\cdot C_5^0\cdot C_3^2\cdot C_6^2\cdot C_1^1 = 2\cdot 45$

6) 12 : $2\cdot C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_6^1\cdot C_2^2 = 2\cdot 90$

7) 02 : $2\cdot C_5^2\cdot C_3^0\cdot C_6^1\cdot C_3^2 = 2\cdot 180$

8) 03 : $2\cdot C_5^2\cdot C_3^0\cdot C_6^0\cdot C_3^3 = 2\cdot 10$

9) 01 : $2\cdot C_5^2\cdot C_3^0\cdot C_6^2\cdot C_3^1 = 2\cdot 450$

=> всего ~~случаев~~ вариантов:

$$2\cdot\left(\overset{200+}{}300+60+450+45+90+180+10+450\right) = 2\cdot 1785 = 3570$$

$\boxed{\text{Ответ: } 3570}$

№3.

· 2-е ур-е системы: $\sqrt{y-x+10} = y-3$

$$\begin{cases} y \geq 3 \\ y-x+10 = y^2-6y+9 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 3 \\ y^2-7y+x-1=0 \end{cases}$$

· 1-е ур-е системы:

$$(x-1)(y+4)|y-x-8| = (x-4)|x-1||y+4|$$

$y \geq 3 \Rightarrow y+4>0 \Rightarrow |y+4| = y+4$

См. чист. стр. 2

Чистовик стр. 2

Разберём случаи:

(1) $x \geq 1$, $y-x-8 \geq 0$

$(x-1)(y+4)(y-x-8-x+4)=0$; $y+4>0$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y-2x-4=0 \end{array} \right. \\ y-x-8 \geq 0 \end{cases}$

1. $x=1 \Rightarrow y \geq 9$

2-е ур-е: $y^2-7y=0$

$y(y-7)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=0<9 \\ y=7<9 \end{array} \right.$ $\varnothing$

2. $\begin{cases} y=2x+4 \\ y \geq x+8 \end{cases}$ $^*2x+4 \geq x+8$, $x \geq 4$

2-е ур-е: $4x^2+16x+16-14x-28+x-1=0$

$4x^2-3x-13=0$

$D = 9+4\cdot4\cdot13 = 217$

т.к. $x \geq 4$, $\sqrt{217}>3$, то:

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{3-\sqrt{217}}{8} \quad \varnothing \\ x=\frac{3+\sqrt{217}}{8} \vee 4 \end{array} \right.$

$\sqrt{217} \vee 29$

$217 \not< 29^2 \Rightarrow \varnothing$

(2) $x \geq 1$, $y-x-8<0$

$(x-1)(y+4)(-y+x+8-x+4)=0$

$(x-1)(y+4)(y-12)=0$; $y+4>0$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=12 \end{array} \right. \\ y<x+8 \end{cases}$

1. $\boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ y=7 \end{array}}$

2. $y=12$

2-е ур-е: $12\cdot(12-7)+x-1=0$

$x=-59$

но $12>-59+8 \Rightarrow \varnothing$

(3) $x<1$, $y-x-8 \geq 0$

$(x-1)(y+4)(y-12)=0$; $x-1<0$, $y+4>0$

$\Rightarrow \begin{cases} y=12 \\ y \geq x+8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y=12 \\ x=-59 \end{array}}$

(4) $x<1$, $y<x+8$ аналогично (1)2.

$\Rightarrow \begin{cases} y-2x-4=0 \\ y<x+8 \Rightarrow x<4 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{3-\sqrt{217}}{8}, \; y=\frac{3-\sqrt{217}}{4}+4 \\ x=\frac{3+\sqrt{217}}{8} > 1 \Rightarrow \varnothing \end{array} \right.$

$\frac{19-\sqrt{217}}{4} \vee 3$

см. лист стр. 3

Чистовик стр. 3

$19 - \sqrt{217} \vee 12$

$7 \vee \sqrt{217}$

$49 < 217 \Rightarrow y < 3 \Rightarrow \varnothing$

$\Rightarrow$ **Ответ: $(1;7)$, $(17;-59)$.**

N5.

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$

Заменим $y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow yx + y = x - 1 \Rightarrow x = -\frac{y+1}{y-1}$

$f(y) = -\dfrac{1}{1 - \frac{y+1}{y-1}} = \dfrac{y-1}{2}$

Т.е. функция $f(x) = \frac{x-1}{2}$

$\underbrace{f(f(x))}_{2f} = \dfrac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \dfrac{x-3}{4}$; $3f: \dfrac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \dfrac{x-7}{8}$

$4f: \dfrac{\frac{x-7}{8} - 1}{2} = \dfrac{x-15}{16}$; $5f: \dfrac{\frac{x-15}{16} - 1}{2} = \dfrac{x-31}{32}$

$6f: \dfrac{\frac{x-31}{32} - 1}{2} = \dfrac{x-63}{64}$; $7f: \dfrac{\frac{x-63}{64} - 1}{2} = \dfrac{x-127}{128}$

$8f: \dfrac{\frac{x-127}{128} - 1}{2} = \dfrac{x-255}{256}$; $9f: \dfrac{\frac{x-255}{256} - 1}{2} = \dfrac{x-511}{512}$

$g(x)$

$g(x)$ - лин. ф., $g(x) = \frac{1}{512}x - \frac{511}{512} \Rightarrow tg$ угл. наклона $= \frac{1}{512}$.

Ответ: $\frac{1}{512}$

N7.

Вообще наиб. 85-зн. число - это $n = \underbrace{99\ldots9}_{85 \text{ шт.}}$. Докажем, что для него $S(n) = S(mn)$, $1 \le m \le n$

$S(n) = 85 \cdot 9$

см. чист. стр. 4

Чистовик стр. 4

Пусть $m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$, $k \leq 85$ по усл., $a_1 \neq 0$

тогда $m \cdot n = m \cdot 10^{85} - m = \overline{a_1 \ldots a_k \underbrace{00 \ldots 0}_{85 \text{ шт.}}} - \overline{a_1 \ldots a_k}$

пусть a_p, $p \leq k$ - самая правая ненулевая цифра числа m. Тогда из вычитания столбиком очевидно, что:

$m \cdot n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{p-1} (a_p - 1) \underbrace{99 \ldots 9}_{(k-p)+(85-k) \text{ шт.}} (10-a_1-1)(10-a_2-1) \ldots (10-a_{p-1}-1)(10-a_p)00\ldots0}$

„-1" появляется т.к. при вычитании мы „занимали" эту единичку

$\Rightarrow S(mn) = a_1 + \ldots + a_p - 1 + 9 \cdot 85 - 9 \cdot p + 9 \cdot p - (a_1 + \ldots + a_p) + 1 =$

$= 9 \cdot 85 = S(n)$, ч.т.д.

$\boxed{\text{Ответ: } \underbrace{99 \ldots 9}_{85 \text{ шт.}}}$

N4.

Пусть r_1 - радиус окр. с диам. AB, $r_2 - BC$, $R - AC$

$\Rightarrow 13 = \pi r_1$, $21 = \pi r_2$; $R = r_1 + r_2 = \frac{34}{\pi} \Rightarrow \cup AC = 34$ (км)

Из условия следует, что т.к он не разворачивался, то он ездил по целым дугам $\cup AB$, $\cup BC$, $\cup AC$

$\Rightarrow$ время его езды $85 \text{ (мин)} = k \cdot 7 + m \cdot 11 + n \cdot 17$, где k, m, n - натуральные или 0. Рассм. сл.:

0) $n = 0$: $k \cdot 7 + m \cdot 11 = 85$

$m \geq 7$ (т.к. при $m \geq 8$ ЛЧ $\geq 88 > 85$)

Подставив $m = 0$, $m = 1$, …, $m = 7$ нетрудно убедиться, что для $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ подойдёт только $m = 2$, $k = 9$ $\Rightarrow$ тройка $(9, 2, 0)$

1) $n = 1$: $k \cdot 7 + m \cdot 11 = 68$

Аналогично подставляем и получаем только $(5, 3, 1)$

2) $n = 2$: $(1, 4, 2)$

При $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$ ничего не подходит, а при $n \geq 6$ ЛЧ $\geq 102 > 85$ $\Rightarrow$ подошли только три тройки

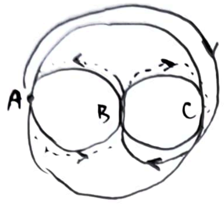
см. чист. стр. 5

Чистовик стр. 5

(k, m, n)

1. (5, 3, 1)

Такой случай возможен, приводится пример:



∪AC, CB, BC, CB, BA, AB, BA, AB, BA

Здесь $S = 5\cdot13+3\cdot21+34 = \boxed{162}$.

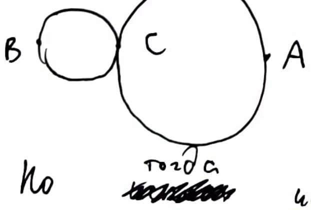
2. (9, 2, 0)

Т.к. окр. диам. AC не исп., то используем только послед. соединенные AB и BC => чтобы вернуться в т. A, число проехавших дуг в сумме должно быть чёт., но 9+2=11 – нечёт. => этот сл. не м.б.

3. (1, 4, 2)

1) первая и последняя ∪AC => мы должны из т. C внутри маршрута вернуться в т. C => аналог. 2. 1+4 должно быть чёт. – ⊘

2, 3) первая / последняя (без разницы, НУО первая) это ∪ AB (тогда посл. ∪AC) => имеем:



← отсимм. окр. AC

теперь из т.B должны попасть в т. C за 4 ∪BC и 1 ∪AC

Но тогда использовать ∪AC сможем только C→A и не сможем оттуда уехать => ∪AC не используем, но 4 ∪BC: т.B → т.B => этот случай тоже не подх.

Ответ: 162 км

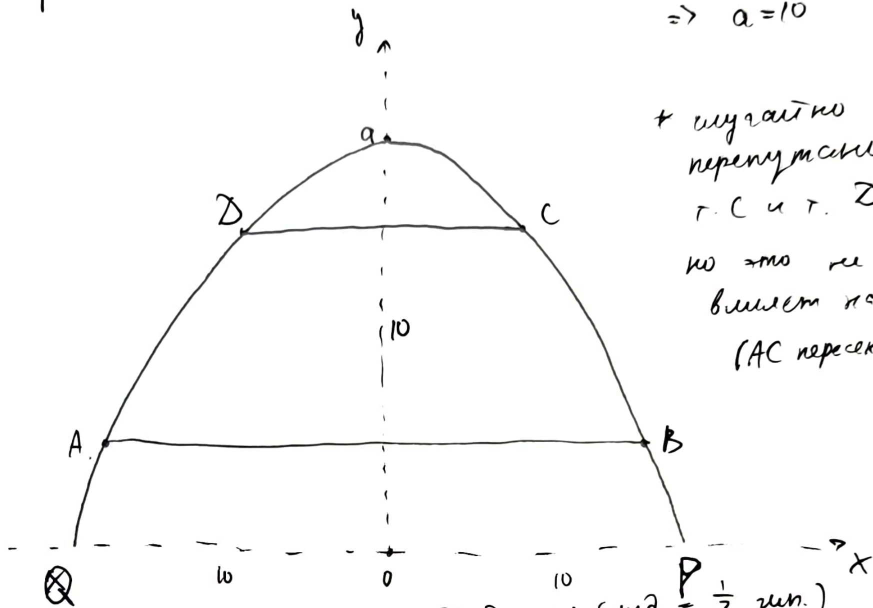
см. лист. стр. 6

Чистовик стр. 6

№6

парабола $y = a - bx^2$ => это просто парабола $-x^2$, растянутая (сжатая) вдоль оси Oy и подвинутая вдоль этой же оси => она симм. отн. Oy => см. рис.:

=> $a = 10$



+ случайно перепутала т. C и т. D, но это не влияет на реш. (AC пересек. BD)

$Oa = OP = OQ = 10$ => $\angle PaQ = 90^\circ$ (мед = $\frac{1}{2}$ гип.) ~~=> ∠PaQ = 90° (мед. = ½ гип.)~~

AB и $CD \parallel PQ$ => $ABCD$, $ABPQ$, $CDQP$ – равнобок. трап. из симм.

$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ => $ABCD$ – впис., AB – диам.

Для нашей параболы: т. $P \in$ ей => $0 = 10 - b \cdot 100$ => $b = \frac{1}{10}$

Назначим координаты $B(k; 10 - \frac{1}{10}k^2)$, $C(n; 10 - \frac{1}{10}n^2)$

=> $A(-k; 10 - \frac{1}{10}k^2)$. Ищем $h = 10 - \frac{1}{10}n^2 - 10 + \frac{1}{10}k^2 = \frac{1}{10}(k^2 - n^2)$

$\overline{BC}\,(n-k;\ \frac{1}{10}(k^2-n^2))$; $\overline{AC}\,(n+k;\ \frac{1}{10}(k^2-n^2))$

$\overline{AC} \perp \overline{BC}$ => скаляр. произв. = 0:

$$(n-k)(n+k) + \frac{1}{100}(k^2-n^2)^2 = 0$$

$$(n^2-k^2) + \frac{1}{100}(n^2-k^2)^2 = 0$$

$$(n^2-k^2)\left(1 + \frac{1}{100}(n^2-k^2)\right) = 0 \quad ; \quad n \neq k$$

=> $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}(k^2-n^2) = 1$ => $h = 10$, т.е. такое могло быть только в крайнем случае (это понятно и из того что $\angle QaP = 90^\circ$)

$\boxed{\text{Ответ: } 10}$