

сдан дорожно в 14.37
АВР

0 911953 070005
91-19-53-07
(38.9)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гаврилова Андрея Максимовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
91-19-53-07	70	5	15	5	15	0	15	15	

N1 по т. Велеса:

$$\left(\frac{1}{m} - 2\right) + \left(\frac{1}{n} - 2\right) = -a$$

$$\left(\frac{1}{m} - 2\right)\left(\frac{1}{n} - 2\right) = b$$

$$a+b = 2 - \frac{1}{m} + 2 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{m} - 2\right)\left(\frac{1}{n} - 2\right) = 4 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{mn} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + 4 =$$

$$= 8 - \frac{3}{m} - \frac{3}{n} + \frac{1}{mn}$$

a и b - целые числа $\Rightarrow a+b$ - целое число.

$\Rightarrow 8 - \frac{3}{m} - \frac{3}{n} + \frac{1}{mn}$ - целое число. $m \neq 0; n \neq 0; m \neq n$.

Возможные варианты:

1. $m=2; n=1$

~~$$8 - \frac{3}{2} - \frac{3}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} = 4$$~~

$$a+b = 8 - \frac{3}{2} - \frac{3}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} = 8 - 1,5 - 3 + 0,5 = 4$$

2. $m=1; n=2$

$a+b = 4$

От перестановки сумма не меняется.

3. $m=-1; n=2$

$a+b = 8 + \frac{3}{1} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 8 + 3 - 1,5 - 0,5 = 9$

4. $m=1; n=-2$

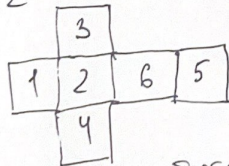
$a+b = 8 - \frac{3}{1} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 8 - 3 + 1,5 - 0,5 = 6$

5. $m=-1; n=-2$

$a+b = 8 + \frac{3}{1} + 1,5 + \frac{1}{2} = 8 + 3 + 1,5 + 0,5 = 13$

Ответ: 4; 6; 9; 13

N2



- развертка игральной кости.

Так как требуется возрастающая последовательность из трех чисел на гранях, имеет смысл рассмотреть в качестве кости варианты 1, 2, 3, 4, потому что для 5 и 6 такую последовательность получить невозможно.

Начнем с 4: для 4 есть только одна последовательность (4, 5; 6).

- Для 2: $(2, 3, 6)$
 $(2, 3, 5)$
 $(2, 4, 6)$
 $(2, 4, 5)$

4 послед-ти.

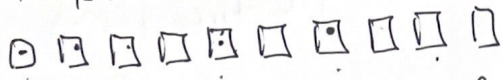
- Для 1: $(1, 2, 3)$ $(1, 2, 6)$
 $(1, 2, 4)$ $(1, 5, 6)$
 $(1, 3, 5)$
 $(1, 3, 6)$
 $(1, 4, 5)$
 $(1, 4, 6)$

8 послед-тей.

Итого: $1+1+4+8=14$ Ответ: 14

Чернык.

№4 кинотеатр



Кол-во вариантов рассадки девочек

$$44 + 17 \cdot 2 = 78$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 5$$

$$a_1 = 7$$

$$4,5 + 0,125$$

$$4,5 + 0,3125$$

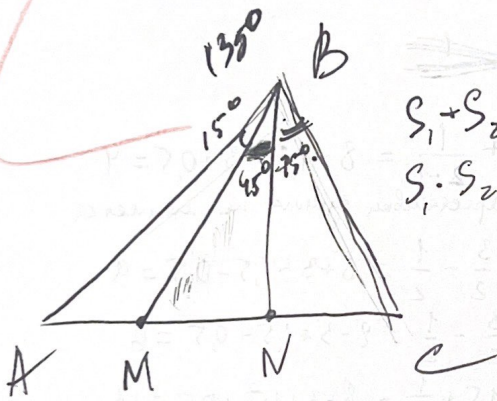
$$4,5 +$$

78

68

34

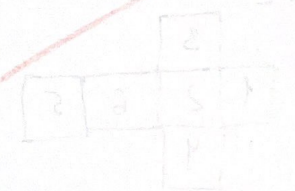
$$17 + 33 + 35$$



$$S_1 + S_2 = 5$$

$$S_1 \cdot S_2 = 3$$

$$\begin{array}{r} 11100 \\ \times 6 \\ \hline 864 \end{array}$$



N	S	t
AB	15 км	7 мин
BC	25 км	11 мин
AC	40 км	17 мин.

$$12 \cdot 25 \text{ мин} = 85 \text{ мин}$$

Для того, чтобы ровно уложиться по времени, автомобиль должен два раза проехать маршрут S

~~Всего $AB+BC$ и $AB+2 \cdot BC$~~

$$t = x \cdot AB + y \cdot BC + z \cdot AC \quad (\text{по времени})$$

Если x - четное $\Rightarrow y$ - четное и z - четное } чтобы автомобиль
 Если x - нечетное $\Rightarrow y$ - нечетное и z - нечетное } был вернувшись.

$$7x + 11y + 17z = 85 \quad \text{- фактовое уравнение.}$$

Но, если x, y, z - четные, то сумма факта будет четной, но 85 - нечетное
 \Rightarrow противоречие.

Получились варианты:

$$x=5; y=3; z=1 \quad (\text{нечетные} \Rightarrow \text{получили})$$

$$5 \cdot 7 + 11 \cdot 3 + 17 = 35 + 33 + 17 = 85$$

~~$$AB = \pi R_1 = 15$$~~

$$BC = \pi R_2 = 25$$

$$AC = \pi(R_1 + R_2) = \pi R_1 + \pi R_2 = 15 + 25 = 40.$$

$$S = 15x + 25y + 40z$$

$$S = 15 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 40 = 75 + 75 + 40 = 190 \text{ (км)}$$

Ответ: 190 км.

N 6

Объем воды можно задать формулой прогрессии:

$$a_1 = 7; a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 5$$

$$a_2 = 3,5 + 5 = 8,5$$

$$a_3 = 9,25$$

$$a_4 = 9,625$$

$$a_5 = 9,8125$$

$$a_6 = 9,90625$$

$$a_7 = 9,953125$$

$$a_8 = 9,9765625$$

$$a_9 = 9,98828125$$

$$a_{10} = 9,994140625$$

$$a_{11} = 9,9970703125$$

$$4,5 + 0,40625 + 5 = a_6$$

$$4,5 + 0,453125 + 5 = a_7$$

$$4,5 + 0,4765625 = a_8$$

$$4,5 + 0,48828125 + 5 = a_9$$

$$4,5 + 0,494140625 = a_{10}$$

$$4,5 + 0,4970703125 + 5 = a_{11}$$

- объем увеличился 99,9%.

- а) Кубики имеют объем 10 литров, ~~тогда~~ ~~образуют~~ потому что площадь их поверхности не может увеличиться 5 метров, которые мы добавим каждый день.
- б) Это невозможно на 10-ый день.

№3

$$\frac{2bc - 2a^2 + a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} =$$

$$= \frac{bc - a(a+1)}{a} + \frac{ca - b(b+1)}{b} + \frac{ab - c(c+1)}{c} =$$

$$= \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - (a+1) - (b+1) - (c+1) = \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{abc} - a - b - c - 3 =$$

$$= \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c - 3 = \text{???}$$

Предположим, что ~~все~~ a, b, c равны $a = b = c = x$

Тогда минимальное значение выражения при

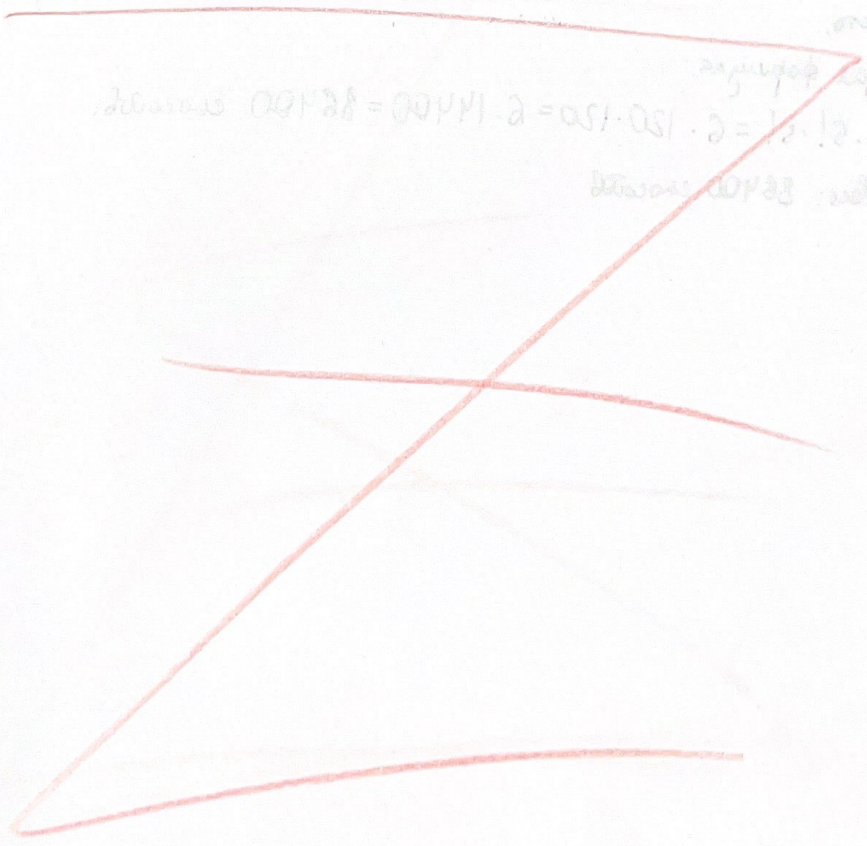
Тогда:

$$\frac{x^2}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x^2}{x} - 3x - 3 = 3x - 3x - 3 = -3$$

Ответ: -3 .

Если брать различные числа, то значение выражения будет больше, так как в общем случае будет увеличиваться

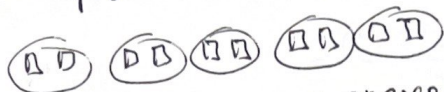
Ответ: -3 .



№ 4

Матно разбить 10 мест в кинотеатре на пары

Девочки не могут сидеть рядом.



В каждой паре должна оказаться ^{только} одна девочка.
 Она может слева или справа.

Получается всего 6 вариантов рассадить девочек (без учета порядка)



6 вариантов
 (закрашенные места - девочки).

Для каждой рассадки 5! способов расставить 5 девочек на 5 местах.

Также 5! способов рассадить 3 мальчика, учителя и незанятое место.

Общая формула.

$$6 \cdot 5! \cdot 5! = 6 \cdot 120 \cdot 120 = 6 \cdot 14400 = 86400 \text{ способов.}$$

Ответ: 86400 способов

