0 468850 470006

46-88-50-47
(40.16)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 5

Место проведения Москва
город

выход 14:11 – 14:14

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гайфуллина Карима Нурматовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	−	+	−	72

46-88-50-47
(40.16)

черновик.

№1

3 врат. $C_5^2 \cdot C_6^3 + C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^3 +$

5 защ. $+ C_3^2 \cdot C_6^3 + C_5^1 \cdot C_6^2 \cdot C_3^1 +$

6 кап. $+ C_5^2 \cdot C_6^1 \cdot C_3^2 + C_5^2 \cdot C_3^3 +$

3 унив = ~~защ+кап~~.

$+ C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_2^1 +$

n – ? $+ C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_6^1 + C_3^2 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2 = \underline{5355}$

n – 1 вр-арь; 2 защ.; 3 кап.

~~1) рассмотрим с 1 вр-ым вратарём~~

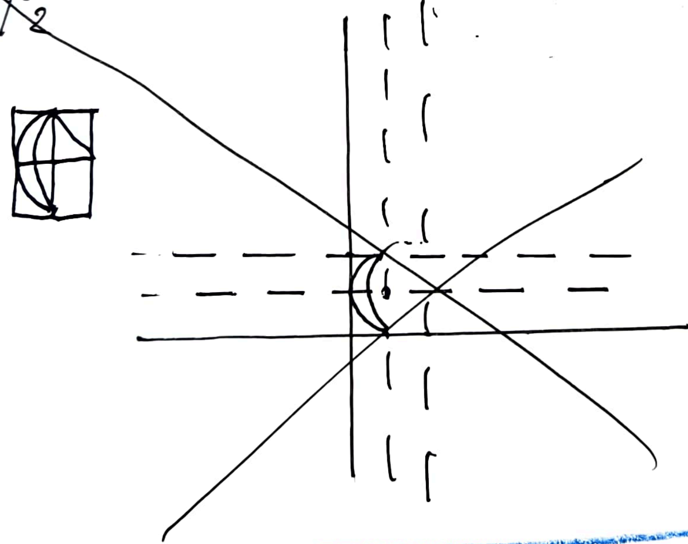
~~1 вр, остаётся 8 защ (5з + 3у) и 8 кап (5кап и 3у)~~

~~т.к. защ требуется меньше => предельное значение будет у кап. $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 84$ с 1 вр.~~

~~2) т.к. вратарей 3 => $n = 3 \cdot C_8^3 = 3 \cdot 84 = 252$ варианта~~

Ответ: ~~252~~ 5355 варианта.

№2

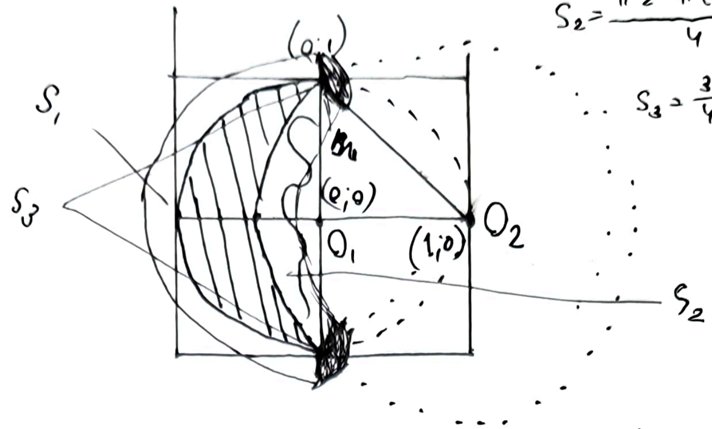


№2 чистовик

$S_1 = \frac{\pi(1+\frac{1}{4})^2 - \pi}{2}$

$S_2 = \frac{\pi \cdot 2 - \pi(\sqrt{2} - \frac{1}{4})^2}{4}$

$S_3 = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$



0) радиус у $O_2 = \sqrt{2} = R$ (по Т. Пифагора) $\Rightarrow S_{O_2} = \pi R^2$

радиус у $O_1 = 1 = r \Rightarrow S_{O_1} = \pi r^2$

1) найдем площадь $\frac{S_{O_2}}{4} = \frac{\pi \cdot R^2}{4} = \frac{\pi}{2}$

2) тогда площадь кусочка показанного волнистой линией:

$S' = \frac{S_{O_2}}{4} - S_{тр} = \frac{\pi}{2} - 1$

4) $S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\pi \cdot \frac{25}{16} - \pi}{2} + \frac{2\pi - \pi(2 + \frac{1}{16} - \frac{2\sqrt{2}}{2})}{4} + \frac{3}{4}\pi \cdot \frac{1}{16} = \frac{18\pi}{64} - \frac{\pi}{64} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{3\pi}{64} = \frac{20\pi}{64} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} = \frac{5\pi}{16} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$

3) тогда площадь закраш фигур:

$S_{закр} = \frac{S_{O_1}}{2} - S' = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$

~~4) $\frac{S_{O_1}}{S_{закр}} = \pi$, т.к. „расплывается" весь рисунок, то:~~

~~$\frac{S_{O_1\,распл.}}{S_{закр.\,распл}} = \pi \Rightarrow S_{закр.\,распл} = \frac{S_{O_1\,распл}}{\pi} = \frac{\pi(r+0{,}25)^2}{\pi} =$~~

~~$= (1+0{,}25)^2 = 1{,}25^2 = \frac{25}{16}$~~

Ответ: $S = \cancel{\frac{25}{16}}$

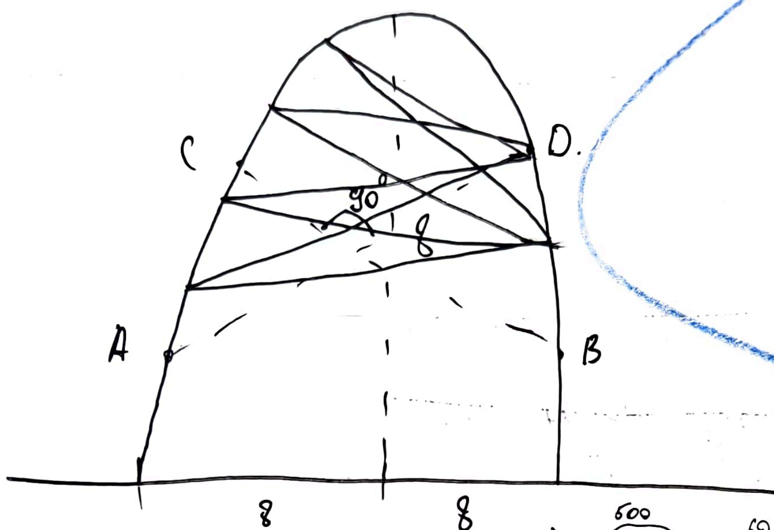
$= 1 + \frac{5\pi}{16} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$

46-88-50-47
(40.16)

черновик.

$S_1 = \pi R^2$

$S_2 = \pi (R + 0{,}25)^2$

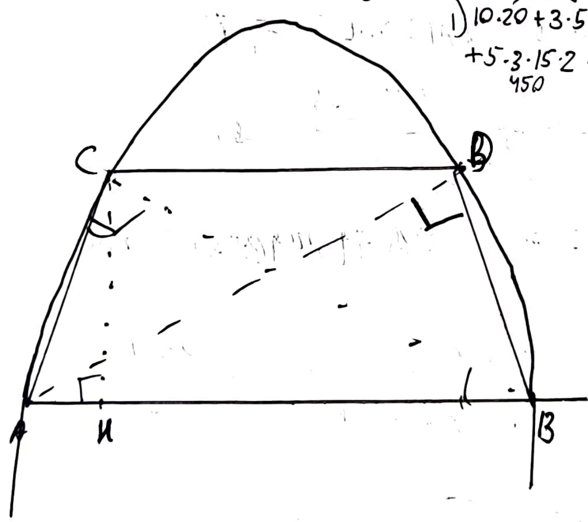


600 60 450 120

1) $10 \cdot 20 + 3 \cdot 5 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 10 \cdot 15 \cdot 3 + 10 \cdot 6 \cdot 3 + 10 +$

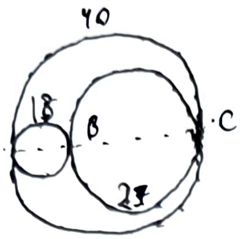
$+ 5 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 15 = \underline{\underline{5355}}$

450 90 45



чистовик

№4



$\cancel{V_{AB}=\frac{\breve{AB}}{t_{AB}}=\frac{13000\text{ метр}}{5\text{ мин}}=2,6\text{ км/м}}$.

$\cancel{V_{BC}=\frac{\breve{BC}}{t_{BC}}=\frac{27}{13}\text{ км/м}}$

$V_{AC}=\cancel{\frac{\breve{AC}}{19\text{мин}}}$

$T_{общ}=1ч.\ 35м=95м.$

$\breve{AC}=\frac{\pi\cdot AC}{2}=\frac{\pi\cdot(AB+BC)}{2}$

$\breve{AB}=\frac{\pi\cdot AB}{2}=\cancel{1,5\cdot\pi\text{ км}}\Rightarrow AB=\frac{2\cdot\breve{AB}}{\pi}=\frac{26000}{\pi}$ метров.

$\breve{BC}=\frac{\pi\cdot BC}{2}\Rightarrow BC=\frac{54000}{\pi}$ метр.

$\breve{AC}=\frac{\pi(AB+BC)}{2}=40000$ метров $=40$ км.

1) ~~Ма~~ Маршрут автомобиля: ~~AC→CB→BA~~

$\underbrace{\underset{19}{A\to}\ \underset{13}{C\to}\ \underset{5}{B\to}\ \underset{19}{A\to}\ \underset{19}{C\to}\ \underset{5}{A\to}\ \underset{5}{B\to}\ \underset{5}{A\to}\ \underset{5}{B\to}\ A}_{95\text{ минут.}}$

$\breve{AC}+\breve{CB}+\breve{BA}+\breve{AC}+\breve{CA}+\breve{AB}+\breve{BA}+\breve{AB}+\breve{BA}=3\cdot\breve{AC}+5\cdot\breve{AB}+\breve{CB}$

$=3\cdot 40\text{км}+5\cdot 13\text{км}+27=120+65+27=120+92=212\text{ км}$

Ответ: 212 км.

46-88-50-47 (40.16)

№5 чистовик.

$y=f(x)$ $\quad f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{x-1}$

$g(x)=\underbrace{f(f(\ldots(x))}_{10\text{ раз}}$

$tg\alpha$ – ?

пусть $\frac{x+1}{x-1}=t$

$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}=t \Rightarrow \frac{1}{x-1}=\frac{t-1}{2}$

1 раз: $f(t)=\frac{t-1}{2}=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}$

2 раза: $f(f(t))=\frac{\frac{t-1}{2}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{t-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{t}{4}-\frac{3}{4}$

3 раза $f(f(f(t)))=\frac{\frac{t-1}{2}-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{t-1}{8}-\frac{3}{4}$

1) Можно заметить, что наша функция линейна и имеет вид $y=ax+b$, где $a=tg\alpha$

2) взяв функцию $\{$ 2 и 3 раза видим зависимость:

$a=\frac{1}{2^n}$, где n – кол-во раз взятия функции $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $tg\alpha=a=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$

Ответ: $tg\alpha=\frac{1}{1024}$

№3 чистовик

$$\begin{cases}(xy+4x-y-4)|y-x-8|=(x-4)|xy+4x-y-4|\\ \sqrt{y-x+10}=y-3\end{cases}$$

$y-3\geq 0$, ведь $y-3=\sqrt{-11-}$, а $\sqrt{-11-}$ всегда ≥ 0.

$y\geq 3$

$\sqrt{y-x+10}\geq 0$

$y-x+10\geq 0$

$y_{min}=3$, подставим и получим $3-x+10\geq 0$

$x\leq 13$

~~$y-x-8$ — принимает макс. знач. при x_{max}, y_{min}:~~

рассмотрим отдельно первое выражение.

~~3-1~~

$$\Big(x(y+4)-(y+4)\Big)|y-x-8|=(x-4)\big|x(y+4)-(y+4)\big|$$

$$(x-1)(y+4)\,|y-x-8|=(x-4)\big|(x-1)(y+4)\big|\quad (x\neq 1)$$

т.к. $y+4>0$, то второй модуль раскрывается с $(+)$, при $x-1\geq 0$, $x\geq 1$, и с $(-)$, при $x<1$

а) $\begin{cases}|y-x-8|=x-4\\ x\in[4;13]\\ y\geq 3\end{cases}$ б) $\begin{cases}|y-x-8|=4-x\\ x\in(-\infty;1)\\ y\geq 3\end{cases}$

случай $x=1$ рассмотрим отдельно: $\sqrt{y+9}=y-3$

$y+\cancel{8}=y^2-6y+\cancel{8}\Rightarrow y_1=7\quad y_2=0$ не подх. по догр.

$\Rightarrow \boxed{(1;7)}$

Рассмотрим систему а. + 2 выр. листов к.

$$\begin{cases}\sqrt{y-x+10}=y-3\\ |y-x-8|=x-4\\ x\in[1;13]\\ y\geq 3\end{cases}$$

$|y-x-8|\geq 0 \Rightarrow x-4\geq 0$

$x\geq 4.$

$$\begin{cases}\sqrt{y-x+10}=y-3\\ |y-x-8|=x-4\\ x\in[4;13]\\ y\geq 3\end{cases}$$

$\sqrt{y-x+10}=y-3$

$y-x+\cancel{10}^{1}=y^2-6y+\cancel{9}$

$x=7y-y^2+1$ подст. в 2 выр.

$|y-7y+y^2-1-8|=7y-y^2-3$

$|y^2-6y-9|=7y-y^2-3$

1) $y^2-6y-9\geq 0$

$(y^2-6y+9-18)\geq 0$

$(y-3)^2\geq 18$

$y\in[3-\sqrt{18};3+\sqrt{18}]$

$2y^2-13y-6=0$

$D=169-48=121$

$y=\frac{13\pm 11}{4}=\left[\begin{array}{l}y_1=6 - \text{не подх}\\ y_2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\cancel{4}\ 4{,}25\end{array}\right.$

1реш. $(7;4)$

$y=6$, $x=6\cdot 7-7^2+1=-6$

1реш: $(6;-6)$ – НЕ подх. по огр.

$y=\frac{1}{2}$ $x=3{,}5-0{,}25+1=4{,}25$

2реш: $(4{,}25;\frac{1}{2})$ – не подх. по огр.

$|y-7y+y^2-1-8|=y^2-7y-1+4$

1) $y\in[3-\sqrt{18};3+\sqrt{18}]$

$y-9=3$

$y=12$

$x=7\cdot 12-12^2+1=-59.$

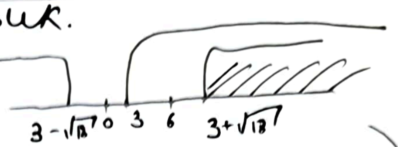
$\boxed{3\text{реш}: (-59;12)}$

– НЕ подх., т.к. $x\in[4;13]$

чистовик.

1) $y^2-6y-9<0$

$y\in(-\infty;\ 3-\sqrt{18})\cup(3+\sqrt{18};\ \infty)$



2)

$\cancel{y^2}-6y-9=-7y+\cancel{y^2}+3$

$y-9=3$

$y=12.$

$x=7\cdot12-12^2+1=-59$

4 реш: $(-59;\ 12)$

$-6y+y^2-9=-y^2+7y-3$

$2y^2-13y+6=0$

$D=169-48=121$

$y_{12}=\frac{13\pm11}{4}=\left[\begin{array}{l} y=6 \Rightarrow x=-6 \\ y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=4{,}25 \end{array}\right.$

но, не подх., под огр.

~~всего получилось 6 решений,~~ ~~5 реш: $(6;\ -6)$~~

~~но некоторые из них совпадают. 6 реш: $(4{,}25;\ \frac{1}{2})$~~

Ответ: 1 решение: $x=-59;\ y=12$

2 решение: $x=1;\ y=7$

~~3 решение: $x=4{,}25;\ y=\frac{1}{2}$.~~

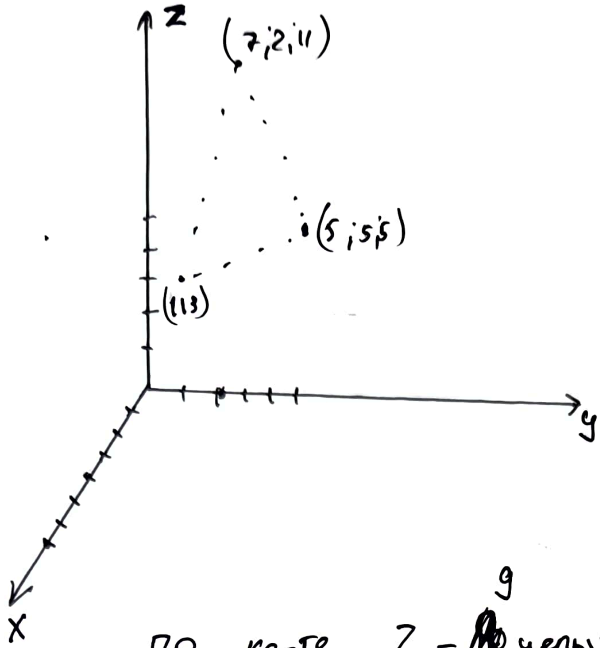
№7.

существует только 1 вид чисел, сумма цифр которых не меняется при умножении их на любое натуральное число — 9 и все числа, состоящие только из 0 и 9, например 909 $S(n)=18;\ S(kn)=18$ и т.д.

Тогда наибольшее 85знач. число, сумма цифр которого удовлетворяет требованиям — $\underbrace{99\ldots9}_{85\text{ раз}}$ или же $10^{85}-1$

Ответ: $10^{85}-1=\underbrace{999\ldots9}_{85\text{ раз}}$.

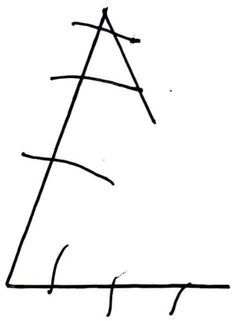
№8 черновик.

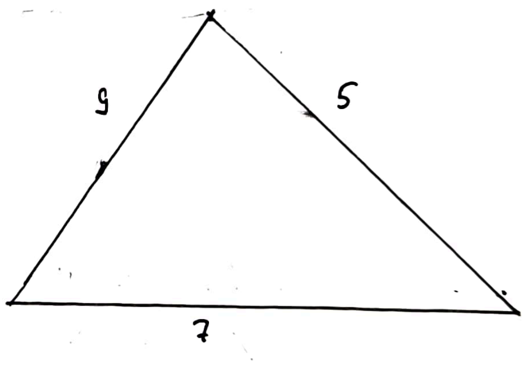


по ко-те Z – ~~10~~ 9 целых т.

по коорд-те y – 5 целых т

по коор-те X – 7 целых т.

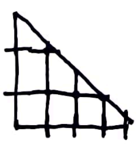


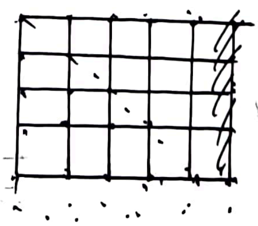


$S=20$

$S=a\cdot b$

кол-во-точек $=(a+1)(b+1)$



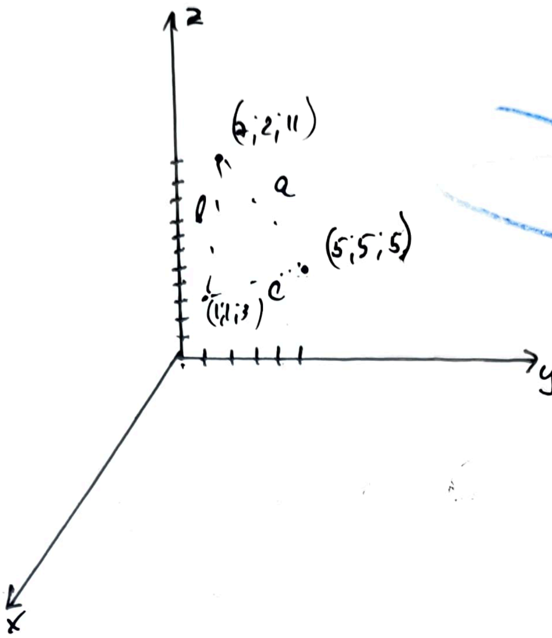


$\frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}}\cdot \cancel{4}\cdot 4\sqrt{2}=8.$

$\frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}}\cdot 5(4\sqrt{2}+1)$

№ 8

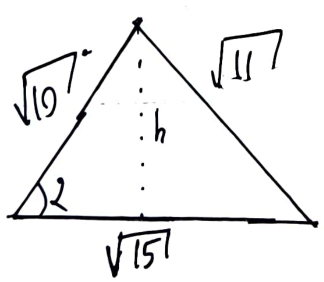
чистовик



$a = \sqrt{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)+(z_2-z_1)} = \sqrt{2+3+6} = \sqrt{11}$

$b = \sqrt{6+1+8} = \sqrt{15}$

$c = \sqrt{4+4+2} = \sqrt{10}.$



$11 = 10 + 15 - 2\sqrt{150} \cdot \cos\alpha.$

$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{150}} \Rightarrow S_{тр\text{-}ка} = \sqrt{150} \cdot \frac{7}{2\sqrt{150}} = 3,5.$

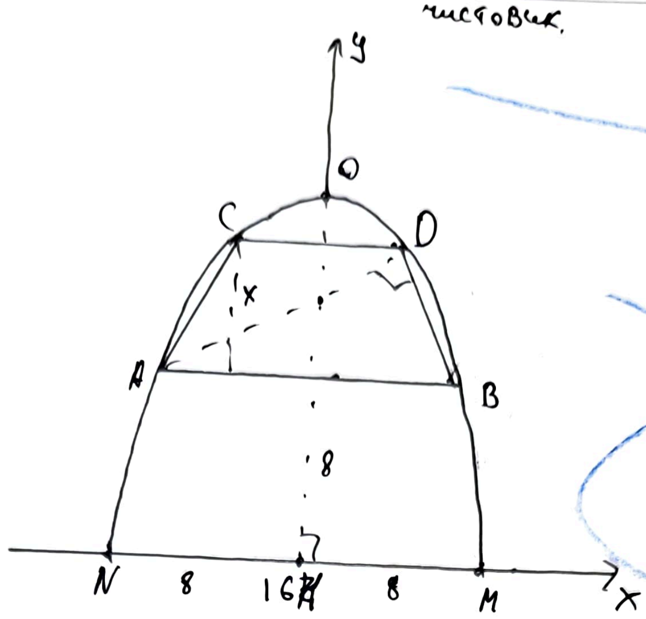
$S_{тр\text{-}ка} = 3,5 = \frac{h \cdot \sqrt{15}}{2} \Rightarrow h = 7 - \sqrt{15} \Rightarrow$ кол-во точек $=$

$= \frac{(8-\sqrt{15})(1+\sqrt{15})}{2} = \frac{8-\sqrt{15}+8\sqrt{15}-15}{2} = \frac{7\sqrt{15}-7}{2} \approx 10$ точек

Ответ: 10 точек.

№6.

чистовик.



1) $AC = BC$, т.к. $AB \parallel CD$ и они обе принадлежат параболе

2) $y = a - bx^2 = 8 - bx^2$

$x = 8,\ y = 0 \Rightarrow 0 = 8 - bx^2 \Rightarrow b = \frac{1}{8}$

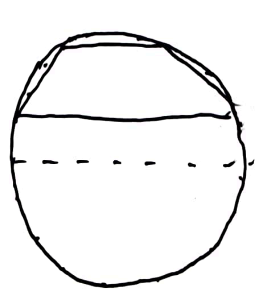
$y = 8 - \frac{x^2}{8}$

~~ответ:~~

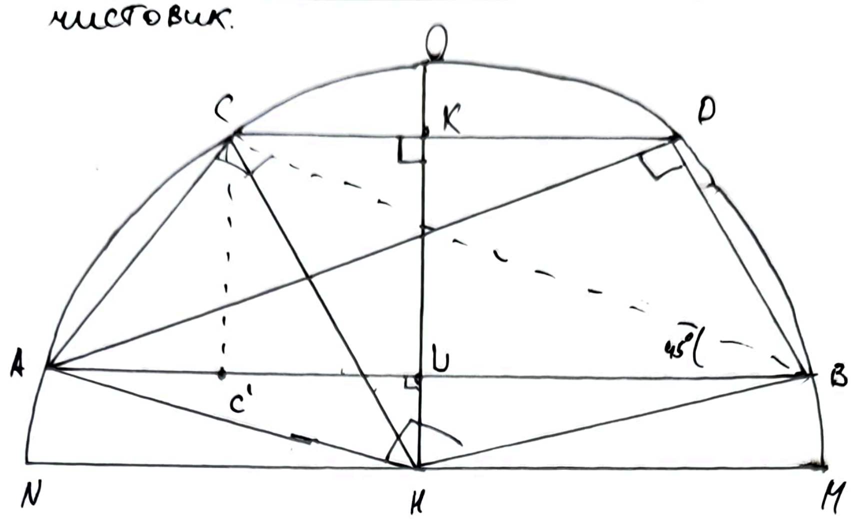
по ~~Т. Пиф: $HO = \sqrt{320} = 4\sqrt{20} = 8\sqrt{5}$~~

ΔOHM: Т. Пиф: $OM = 8\sqrt{2}$

Т.к. $OH = OM \Rightarrow$ дуга $\breve{NM}$ – половина окр-ти, тогда получаем:

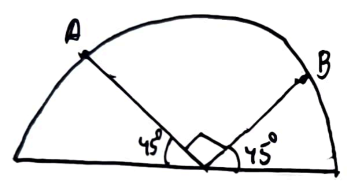


чистовик.



т.к. $\angle ADB \in \breve{AB}$ и $\angle AHB \in \breve{AB}$ и $\angle ADB = 90° \Rightarrow \angle AHB = 90°$

$\Rightarrow OU = \frac{OH}{2} \Rightarrow KU = \frac{OH}{2}$ – ок.



$\triangle ABC$: $\angle ABC = 45°$ (по подобию и как смежные с $\angle NHA$)