0 618980 210007

61-89-80-21
(40.16)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Гараева Артёма Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника
Гар

Чистовик

~~№1~~

~~Дано:~~

~~3 вратаря~~

~~4 защитника~~

~~7 нападающих~~

~~3 универсала~~

~~по усл. надо: 3 вр., 4 защ., 7 напад.~~

~~Решение:~~

$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \Rightarrow 2 \cdot C_4^3 \cdot C_7^3 = 2 \cdot \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = 2 \cdot \frac{24}{6 \cdot 1} \cdot \frac{24 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{6 \cdot 24} =$

$= \frac{5040}{144} = 280$

~~Ответ: 280~~

№4

Дано:

$vAB = 15$ км за 7 мин.

$vBC = 25$ км за 11 мин.

$vAC = ?$ км за 17 мин.

Из АвА = 1ч. 25 мин, S - ?.

Решение: 1ч. 25 мин. = 85 мин.

$S = \pi R^2$

$2\pi R = 15 \Rightarrow R = \frac{15}{2\pi}$

$2\pi R = 25 \Rightarrow R = \frac{25}{2\pi} \Rightarrow R^2 = \frac{40}{2\pi}$

$\pi R^2 = AC = 40$ км

Для того, чтобы найти S, пойдем от обратного:

Всего 85 мин. $\Rightarrow \underbrace{85 - 7}_{\text{км: } 15} = 78$ $\quad \underbrace{78 - 2 \cdot 11}_{2 \cdot 25} = 56$ $\quad \underbrace{56 - 7}_{15} = 49$ $\quad \underbrace{49 - 17}_{40} = 32$

$\underbrace{32 - 11}_{\text{км: } 25} = 21$ $\quad \underbrace{21 - 7 \cdot 3}_{3 \cdot 15} = 0 \Rightarrow$ S общ. будет равен.

61-89-80-21 (40.16)

Чистовик

$15+50+15+40+25+45=190$ км.

Ответ: 190 км. [redacted]

№5

Дано: $f(x)=y$

$\frac{x-2}{x+2}=t \Rightarrow x-2=t(x+2) \Rightarrow x-2=tx+2t \Rightarrow x=-\frac{2t+2}{t-1} \Rightarrow$

$x+2=2-\frac{2+2t}{t-1}=\frac{2t-2-2-2t}{t-1}=-\frac{4}{t-1} \Rightarrow \frac{1}{x+2}=-\frac{t-1}{4} \Big| \frac{2}{x+2}=-\frac{t-1}{2} \Rightarrow -\frac{2}{x+2}=\frac{t-1}{2}$

$f(x)$ $\cancel{f(t)}$

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=-\frac{2}{x+2}$

$f(x)=\frac{t-1}{2}$

$f(f(x))=\frac{\frac{f(x)-1}{2}}{}=$

$g(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{11}$

$=\frac{\frac{t-1}{2}-1}{2}=\frac{t-3}{4}$

tg-? $x=0$ $\quad f f(f(x))=\frac{\frac{t-1}{2}-3}{4}=$

$=\frac{t-7}{8}\ldots \Rightarrow 2^{11}=2048$

Решение Ответ: 2048

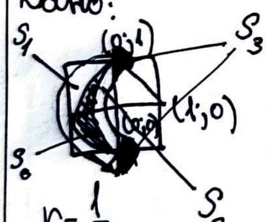
$-\frac{2}{\frac{x-2}{x+2}+2}=-2\cdot\frac{x+2}{3x+6}=-\frac{2x+2}{3x+6}$

$f'(x)=-\frac{2}{3}$, т.к по усл. $g(x)=\underbrace{f(\ldots f(x))}_{11}$, то $tg=\left(-\frac{2}{3}\right)^{11}$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}\right)^{11}$

№2

Дано: $S=S_0+S_1+S_2+S_3$



$S_0=1$

$r=\frac{1}{3}$

Найти: $S_{фигуры}$

~~Решение: в новом изображении надо рассмотреть 3 части.~~

~~1) прям-к. В нем отсутствует область с $r=\frac{1}{3}$~~

~~2) 3 четверти окр. $r=\frac{1}{3}$~~

3) $\frac{1}{2}$ окр. $r=1+\frac{1}{3}$

$S_1=\frac{\pi(1+\frac{1}{3})^2-\pi}{2}=\frac{\pi\cdot\frac{16}{9}-\pi}{2}=\frac{7\pi}{18}$

$S_2=\frac{2\pi-\pi(\sqrt{2}-\frac{1}{3})^2}{4}=\frac{2\pi-\pi(2+\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\sqrt{2})}{4}=$

$=\frac{-\frac{\pi}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi}{4}=-\frac{\pi}{36}+\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$

$S_3=\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{1}{9}=\frac{\pi}{12}$

~~Найдем площади и сложим все, чтобы найти S новой фигуры.~~

~~1) $S=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cdot 3)-\frac{1}{4}\pi(\frac{1}{3})^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{36}\pi$~~

$S=1+\frac{7\pi}{18}+\frac{\sqrt{2}\pi}{6}-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi}{12}=1+\frac{4\pi}{9}+\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$

~~2) $S=\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{3})^2=\frac{3}{36}\pi$~~

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

~~3) $S=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}\pi$~~

~~$S=\frac{3}{4}-\frac{1}{36}\pi+\frac{3}{36}\pi+\frac{8}{9}\pi=\frac{3}{4}-\frac{4}{36}\pi+\frac{8}{9}\pi=\frac{3}{4}-\pi$~~

Ответ: $\frac{1+4\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$

№7

$S(mn)=S(n)$

$m(1\le m\le n)$

№3

$$\begin{cases}(xy+2x-y-2)|y-x-10|=(x-4)|xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8}=y-5\end{cases}$$

пусть $y=7$ $x=11$, тогда

$$\begin{cases}(77+22-7-2)\cdot 8=77+22-7-2(-8) \\ \sqrt{7-11+8}=y-5\end{cases}$$

№1

$C_3^1(C_4^2\cdot C_{10}^3+C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_9^3+C_3^2\cdot C_8^3)=$

$=3\left(\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}+4\cdot 3\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6}+3\cdot\frac{336}{6}\right)=$

$=3(6\cdot 120+4\cdot 3\cdot 84+3\cdot 56)=5688$ Ответ: 5688

Черновик

№4.

3 трассы, по каждой со своей скоростью

$vAB = 15$ км за 7 мин

$v BC = 25$ км за 11 минут

$v AC = ?$ км за 17 минут.

$S = \pi R^2$

$2\pi R = 15$ $R = \frac{15}{2\pi}$

$2\pi R = 25$ $R = \frac{25}{2\pi}$

$R = \frac{40}{2\pi}$

15 × 60 = 00, 90, 900 $\frac{900}{7}$

25 × 60 = 00, 150, 1500 $\frac{1500}{11}$

$\frac{60x}{17}$

$\pi R^2 = AC = 40$ км

A → A за 85 минут

~~7+7+7 11+11+11 = 36 43~~

км 15 (85 → 68; 78; 25: 67; 25: 56; 15: 49; 40: 32; 25: 21; 15: 14; 15: 7; 15: 6

$17 + \cancel{22}^{11} = 28$

$28 + 7 = 35$

~~35 + 17 = 52 + 11 = 63~~

$15 + 25 + 25 + 15 + \cancel{40}^{40} + 25 + 15 + 15 + 15$

$80 + 40 + 25 + 45 = 120 + 70 = 190.$

№5

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$

$-\frac{2}{\frac{x+2+2x+4}{x+2}} = -2 \cdot \frac{x+2}{3x+6} = -\frac{2x+2}{3x+6}$

$tg\alpha = f'(x) = > \frac{2}{3}''$

№6

61-89-80-21 (40.16)

Черновик

№7

Дано:

$S(n)$ - сумма цифр n

$m\ (1 \leq m \leq n)$

~~S(...) = S(...)~~

Пусть x - кол-во цифр числа $n \Rightarrow x = 100$.

Найти: n_{max} : $\forall m \in [1, n]$; верно: $S(mn) = S(n)$; $S(2n) = S(n)$ $\Rightarrow \ldots$ $S(100n) = S(n) \ldots$

$S(n(n-2)) = S(n)$

$S(n(n-1)) = S(n)$

$S(n^2) = S(n)$

Рассмотрим условие задачи на более простом примере: пусть $x = 4$

$S(n^2) = S(n)$ для $n_{max} = 9999$; $S(n) = 36$; $9999^2 = (10000-1)^2 = 10000^2 - 20000 + 1 = 99980001$ $S(n^2) = 36$; $S(n(n-1)) = S(n) \Rightarrow n_{max} = 9999$; $9998 \cdot 9999 = (9999-1)(9999) = 9999^2 - 9999 = 99970002$; $S(n(n-1)) = 36$. Проверяя далее, получим ту же закономерность: например, $S(5n) = S(n) \Rightarrow 5n = 49995 \Rightarrow S(5n) = 36$. Аналогично, если проверить $x = 6$, получим ту же картинку: $S(n^2) = S(n)$ для $n_{max} = 999999$ ... $S(5n) = S(n)$ для $n_{max} = 999999 \Rightarrow$ при $x = 90$ получаем:

$$n_{max} = \underbrace{99\ldots95}_{90\text{ цифр}} = 10^{90} - 1$$

Ответ: $10^{90} - 1$