0610529420007

61-05-29-42
(40.18)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Глиёва Глеба Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» 02 2024 года

Подпись участника
Г. Глиёва

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	0	8	4	12	12	12	0	60

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

61-05-29-42 (40.18)

60 (шестьдесят)

Черновик

№ 1

1 вратарь, 2 защитника, 7 нападающих

2 вратаря, 4 защитника, 7 нападающих, 3 универсала

8 5

$= 11a + 17b$

$7a + 11b + 17c$

$\overline{\text{врат}}$ $\overline{\text{защит}}$ $\overline{\text{напад}}$

1) нет универсалов:

$2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 12 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ 7a

2) 3 универсала:

~~$3 \cdot (3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}) = 3 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 56 = 560 \cdot 9$~~

1 2 0 $3 \cdot 1 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 3 \cdot 35 = 105$

1 1 1 ~~$3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot C_7^2$~~

1 0 2 $3 \cdot C_4^2 \cdot 1 \cdot 7$ $\frac{7}{13} = \frac{11}{21}$

0 1 2

0 2 1 $2 \cdot$ $147 = 110 + 33$

0 0 3 4

443

~~$5 \cdot C_7^2 \cdot C_{10}^3$~~

$\overline{5}$ $\overline{C_7^2}$ $\overline{C_{10}^3}$

№ 3

$(xy + 3x - 2y - 6)|y - x - 8| = (x - 5)|xy + 3x - 2y - 6|$

$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)|y-x-8| \\ \sqrt{y - x + 10} = y - 4 \end{cases}$

$x \geq 5$

$x = -y^2 + 8y - 16$

$-\frac{9}{-2} = \frac{9}{2}$

$-\frac{81}{4} + \frac{81}{2} - 16$

$= \frac{81}{4} - 16$

$\frac{17}{4}$

$y \geq 4$

$(y+3)(x-2)|y - x - 8| = (x-5)|(x-2)(y+3)|$

$(x-2)|y-x-8| = (x-5)|x-2|$

$y \geq 4 \Rightarrow |y+3| = (y+3)$

$y + 3 > 0$ (т.к $y \geq 4$)

$x = 2$

$\Rightarrow \sqrt{y+8} = y - 4$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$

$y^2 - 8y + 16 = y + 8$

$y^2 - 9y + 8 = 0$ $\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 8 \end{array}\right.$

1) $x \geq 2$

$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ |y - x - 8| = (x - 5) \end{array}\right.$

$y^2 - 8y - 2 = f(y)$

$y_0 = 4$

$f(y_0) = 16 - 32 - 2$

$= -18$

$y - x + 10 = y^2 - 8y + 16$

$y - x = y^2 - 8y + 6$

$|y^2 - 8y - 2| = (x - 5)$

$D = 64 + 8 = 72 = (6\sqrt{2})^2$

$y = \frac{8 \pm 6\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 3\sqrt{2}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чер[illegible]

№5

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$ $\quad x \neq 2$ $\quad x := \frac{2(x+1)}{x-1}$

$x := \frac{x+2}{x-2}$ $\quad f\left(\frac{\frac{2x+2}{x-1}+2}{\frac{2x+2}{x-1}-2}\right)$

$f\left(\frac{\frac{x+2}{x-2}+2}{\frac{x+2}{x-2}-2}\right) = \frac{2}{\frac{x+2}{x-2}-2} = f\left(\frac{4x}{2x+2-2x+2}\right)$

$f\left(\frac{x+2+2x-4}{x+2-2x+4}\right) = \frac{2(x-2)}{x+2-2x+4}$ $\quad = f(x) = \frac{2(x-1)}{2x+2-2x+2}$

$= \frac{x-1}{2}$

$f\left(\frac{3x-2}{6-x}\right) = \frac{2(x-2)}{6-x}$ $\quad f(x) = \frac{x-1}{2}$

$\frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2} = y$

$y-1 = \frac{4}{x-2} \Rightarrow x-2 = \frac{4}{y-1} \Rightarrow x = \frac{4+2y-2}{y-1} = \frac{2y+2}{y-1} = \frac{2(y+1)}{y-1}$

$x := \frac{2(x+1)}{x-1}$ $\quad f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$

$f\left(\frac{\frac{2x+2+2x-2}{x-1}}{\frac{2x+2-2x+2}{x-1}}\right) = \frac{2}{\frac{2x+2-2x+2}{x-1}}$ $\quad$ ~~[illegible]~~ $y = \frac{1}{4096}x - \frac{4095}{4096}$

$f\left(\frac{4x}{4}\right) = \frac{x-1}{2}$ $\quad \underbrace{f(f(f(f\ldots(f(x)\ldots))))}_{n} = \frac{x-2^n+1}{2^n}$

$f(x) = \frac{x-1}{2}$

$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$ $\quad n = 12 \Rightarrow \frac{x-2^{12}+1}{2^{12}}$

$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4}-1}{2} = \frac{x-7}{8}$

$f(f(f(f(x)))) = \frac{\frac{x-7}{8}-1}{2} = \frac{x-15}{16}$ $\quad g(x) = \frac{x-4095}{4096}$

$64^2 = 3600+480+16 = 4096$ $\quad g'(x) = \frac{1}{4096}$ $\quad \frac{1}{4096}$

61-05-29-42
(40.18)

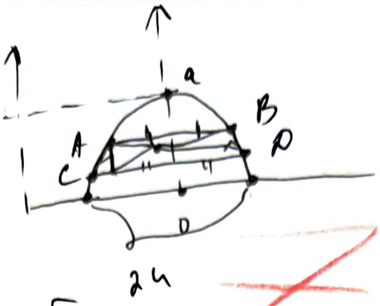
Черновик №6 $a = 18$

$y = a - bx^2$

шир $= 24$

$h = 18$

$AB \parallel CD \parallel Ox$



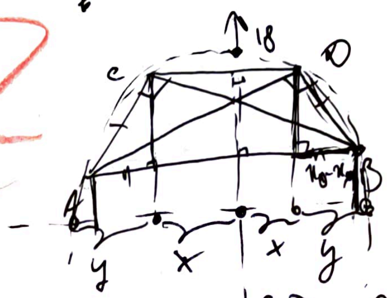
$x^2 = \frac{a}{b}$, $x = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\left|\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right| = 2\sqrt{\frac{a}{b}} = 24 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = 12$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = 144 \Rightarrow b = \frac{a}{144} = \frac{18}{144} = \frac{9 \cdot 2}{9 \cdot 16}$

$b = \frac{1}{8}$

$y = 18 - \frac{x^2}{8}$



$y = 18 - \frac{x^2}{8}$

$B\left(x_0, 18 - \frac{x_0^2}{8}\right)$ $D\left(x_1, 18 - \frac{x_1^2}{8}\right)$

$A\left(-x_0, 18 - \frac{x_0^2}{8}\right)$

$C\left(-x_1, 18 - \frac{x_1^2}{8}\right)$

$18 - \frac{x_1^2}{8} - \left(18 - \frac{x_0^2}{8}\right) = \frac{x_0^2 - x_1^2}{8}$

$2x_0 - (x_0 - x_1) = x_0 + x_1$ $(x_0^2 - x_1^2)^2 = \left(\frac{x_0^2 - x_1^2}{8}\right)$

~~$x_0 \neq x_1$~~ 1) $x_0 = x_1) \Rightarrow 18 - \frac{x_0^2}{8} = 18 - \frac{x_1^2}{8} \Rightarrow$ ~~$x_0^2 = x_1^2$~~

$\Rightarrow x_0 \neq x_1$

2) $x_0^2 - x_1^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow 18 - \frac{x_1^2}{8} - \left(\frac{18 - x_0^2}{8}\right) = \frac{x_0^2 - x_1^2}{8} = \frac{1}{64}$

№7

n — 75 значное число $\in \mathbb{N}$ $S(mn) = S(n)$

$\forall m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n \mapsto$

$S(n)$ — сумма цифр числа $\Rightarrow n(m-1) \vdots 9$,

$n \equiv_9 S(n) \equiv_9 S(mn) \equiv_9 mn \Rightarrow n \equiv_9 mn$ но т.к $\forall m$

это верно, но может быть, что $(m-1) \not\vdots 9 \Rightarrow$

$n \vdots 9$ ~~ann~~ $n = \underbrace{999\ldots9}_{75}$

$(9 \cdot 75)$

~~его~~ $99\ldots99 \cdot 2$

$199\ldots998$

черновик

$\overline{k} \cdot 99\ldots9$ $\quad S(99\ldots9) = 9 \cdot 75$

$99\ldots9 = 100\ldots0 - 1$

$\underbrace{100\ldots0}_{75}\overline{k} - \overline{k}$ $\quad \overline{2}$ $\quad$ заняг $\quad$ помад

$\overline{k}0000\ldots0 - \overline{k}$

$\overline{k-1}\,99\ldots$ $\quad + 0000\ldots0$

$100\ldots0 - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{75}$

$2\underbrace{000\ldots0}_{75} - 2 = 1\underbrace{999\ldots9}_{75}8$

2 1
2 1
2 0
1 2
1 0
0 1
0 2
0 3
0 0

$300\ldots0 - 3$

$74 \cdot 9 + 9$ $\quad = 299\ldots97$

$9 \cdot 75$

$S(\overline{k}00\ldots0 - \overline{k}) = 75 \cdot 9$

$45000\ldots0 - 45$

$44999\ldots955$

$\overline{k+1}00\ldots0 - (k+1)$

$= \overline{k}00\ldots0 + 100\ldots0 - k - 1$

$= \overline{k}00\ldots0 - k + \underbrace{99\ldots9}_{75}$

$46000\ldots0 - 45 + 99\ldots9$

$$\begin{array}{r} 44999\ldots955 \\ +\ 999\ldots999 \\ \hline 459\ldots9954 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \\ +\ 9\ldots999 \\ \hline \end{array}$$

$(9+a_n)\%10 + (9+a_{n-1})\%10 + \ldots + (9+a_{75})\%10$

$+(\ldots)$ $\quad (9+a_n)\%10 = a_n - 1 \quad (a_n \neq 0)$

$(10+a_n-1)\%10 = a_n - 1 \quad (a_n \geq 1)$

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times\ 21 \\ \hline 110 \\ 220\ \ \\ \hline 2310 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 174 \\ \times\ 7 \\ \hline 1218 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22 \\ \times\ 12 \\ \hline 44 \\ 22\ \ \\ \hline 264 \end{array}$$

$1218 + 264 + 2310$

$= 1482 + 2310$

$= 3792$

61-05-29-42 (40.18)

Чистовик

№1

Т.к. универсалы могут быть выбраны только в качестве защитника или полузащитника, то у нас всегда есть только 2 варианта, чтобы выбрать вратаря.

_ _ = защитники

_ _ _ = полузащитники

Рассмотрим все возможные варианты входа универсалов в защитников и полузащ

защ	пол	
0	0	(1)
0	1	(2)
0	2	(3)
0	3	(4)
1	0	(5)
1	1	(6)
1	2	(7)
2	0	(8)
2	1	(9)

(1): $2\cdot C_4^2\cdot C_7^3 = 2\cdot 6\cdot \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = 2\cdot 6\cdot 7\cdot 5 = 420$

(2): $2\cdot C_4^2\cdot C_7^2\cdot 3 = 6\cdot 6\cdot \frac{7\cdot 6}{2} = 36\cdot 21$

(3) $2\cdot C_4^2\cdot C_7^1\cdot C_3^2 = 2\cdot 6\cdot 7\cdot 3 = 36\cdot 7$

(4) $2\cdot C_4^2 = 2\cdot 6$

(5) $2\cdot 3\cdot 4\cdot C_7^3 = 24\cdot 7\cdot 5$

(6) $2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot C_7^2 = 48\cdot 21$

(7) $2\cdot 3\cdot 4\cdot 7 = 24\cdot 7$

(8) $2\cdot 3\cdot C_7^3 = 6\cdot 35$

(9) $2\cdot 3\cdot C_7^2 = 6\cdot 21$

=> Всего способов: $420 + 36\cdot 21 + 36\cdot 7 + 12 + 24\cdot 35 + 48\cdot 21 + 24\cdot 7 + 6\cdot 35 + 6\cdot 21 = 21\cdot 56 + 12\cdot 22 + 30\cdot 35 + 54\cdot 21 + 24\cdot 7 = 21\cdot 110 + 7\cdot 174 + 12\cdot 22 = 3792.$

Ответ: 3792

черновик

№3 $(xy+3x-2y-6)|y-x-8| = (x-5)|xy+3x-2y-6|$

$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)|y-x-8| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

$y \geq 4$ (из 2 уравнения)

$(x-2)(y+3)|y-x-8| = (x-5)|x-2|\cdot|y+3|$

$y \geq 4 \Rightarrow y+3 \geq 7$

$\Rightarrow |y+3| = y+3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y+3=0 \\ (x-2)|y-x-8| = (x-5)|x-2| \end{array}\right.$

$y \geq 4 \Rightarrow y+3 \neq 0$

$\Rightarrow (x-2)|y-x-8| = (x-5)|x-2|$

(1) $x \geq 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & 1. \\ |y-x-8| = x-5 & 2. \end{array}\right.$

1. $x=2$

$\Rightarrow \sqrt{y+8} = y-4$

$\begin{cases} y^2-8y+16 = y+8 \\ y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-9y+8=0 \\ y \geq 4 \end{cases} \Rightarrow y=8$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8. \end{cases}$

2. $|y-x-8| = x-5$, $x \geq 5$

$\begin{cases} y \geq 4 \\ x = y+10-(y^2-8y+16) \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} y-x-8 = x-5 \\ y-x-8 = 5-x \end{array}\right.$

$x = -y^2+9y-6$ $\left[\begin{array}{l} y = 2x+3 \\ y = 13 \end{array}\right.$

$y=13 \Rightarrow x = -169+117-6 = -58$, но $x \geq 5$

$x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow$ $y-3 = -2y^2+18y-12$

$2y^2-17y+9=0$ $D = 289-\cancel{88}\ 72 = 217$

$y = \frac{17 \pm \sqrt{217}}{4}$, при $y = \frac{17 - \sqrt{217}}{4}$ чистовик

$x = \frac{5 - \sqrt{217}}{8} < 0$, $x \geq 5$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{17 + \sqrt{217}}{4} \\ x = \frac{5 + \sqrt{217}}{8} \end{cases}$ $\frac{5 + \sqrt{217}}{8} < 5$, но $x \geq 5$

(2) $x < 2$

$\Rightarrow |y - x - 8| = (x - 5)(-1)$

$\begin{cases} 5 - x = |y - x - 8| \\ x = -y^2 + 9y - 6 \end{cases}$

1. $5 - x = y - x - 8$
$y = 13$
$x = -169 + 117 - 6 = -58$

$(-58; 13)$ — реш.

2. $5 - x = x - y + 8$
$2x = y - 3$

$y - 3 = -2y^2 + 18y - 12$
$2y^2 - 17y + 9 = 0$
$D = 289 - 72 = 217$
$\Rightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{217}}{4}$, $y \geq 4$

$\Rightarrow y = \frac{17 + \sqrt{217}}{4}$
$\Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{217}}{8} < 5$
$\Rightarrow \left(\frac{5 + \sqrt{217}}{8}; \frac{17 + \sqrt{217}}{4}\right)$ — реш.

Ответ: $(2; 8)$; $(-58; 13)$; $\left(\frac{5 + \sqrt{217}}{8}; \frac{17 + \sqrt{217}}{4}\right)$

N5

$y = f(x)$: $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$ $x \neq 2$

$x = 0$

$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{12}$

$x := \frac{2(x+1)}{x-1}$ $(x \neq 1)$

$f\left(\frac{2x + 2 + 2x - 2}{2x + 2 - 2x + 2}\right) = \frac{2}{\frac{2x+2}{x-1} - 2}$

$f(x) = \frac{x-1}{2}$ $(x \neq 1)$, $x \neq 2$

$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$

$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \frac{x-7}{8}$

$\Rightarrow \underbrace{f(f(f \dots (f(x))))}_{n} = \frac{x - 2^n + 1}{2^n}$

$\Rightarrow g(x) = \frac{x - 2^{12} + 1}{2^{12}} = \frac{x - 4095}{4096}$ — прямая (лин. ф-я)

$6\ x = 0\ g(0) = \frac{-4095}{4096}$

Данная прямая имеет только 1 касательную (шестой) - саму себя => $tg\alpha = k$, $k = \frac{1}{4096}$,

т.к $g(+) = \frac{1}{4096}x - \frac{4095}{4086}$

Ответ: $\frac{1}{4096}$

№6

$y = a - bx^2$

вершина параболы $(0; a)$

расстояние м/у нулями функции = ширина туннеля. высота $= |a| > 0$, т.к если $a < 0$, $b > 0$, то $y < 0$. По условию график ограничен Ox => y у 2 корня, т.к расстояние м/у ними $= 24$.

БОО: $a > 0$, $b > 0$

т.к $y = a - bx^2$, то данная парабола симметрична отн Oy => ~~...~~ A и B имеют одинаковые координаты по Oy и разные позицию по Ox (но одинаковые по модулю). Аналогично с C и D.

$y = a - bx^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{a}{b}} = 24$ (условие)

$a = 144b$, $a = 18$ (вершина туннеля)

$\Rightarrow b = \frac{18}{144} = \frac{9 \cdot 2}{9 \cdot 16} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow y = 18 - \frac{x^2}{8}$

$B(x_0, 18 - \frac{x_0^2}{8})$ $A(-x_0, 18 - \frac{x_0^2}{8})$

$D(x_1, 18 - \frac{x_1^2}{8})$ $C(-x_1, 18 - \frac{x_1^2}{8})$

чистовик

№6 (продолжение) $=90^0$

т.к. $\angle ACB = \angle ADB$, то $ACDB$ - вписанный четырехугольник (равные углы опираются на 1 сторону)

и $AB \parallel CD$ => $ACDB$ - равнобокая трапеция,

т.к. $x_1 \neq x_0$, т.к. если $x_1 = x_0$ => $18 - \frac{x_0^2}{8} = 18 - \frac{x_1^2}{8}$ и

точки B и D совпадают, но они разные.

$DH \perp AB$

$DH = 18 - \frac{x_1^2}{8} - (18 - \frac{x_0^2}{8}) = \frac{x_0^2 - x_1^2}{8}$

$\triangle ADB$ - прямоуг

=> $DH^2 = AH \cdot HB$, DH - высота $\triangle ADB$

$AH = x_1 + x_0$ => $AH \cdot HB = (x_0^2 - x_1^2)$

$HB = x_0 - x_1$

=> $\frac{(x_0^2 - x_1^2)^2}{64} = (x_0^2 - x_1^2)$

$x_0^2 \neq x_1^2$ => $x_0^2 - x_1^2 = 64$

$DH = \frac{x_0^2 - x_1^2}{8} = 8$. $DH = \rho(CD, AB)$

Ответ: 8

№7

$S(n)$ - сумма цифр $n \in \mathbb{N}$

$\max(n)$ - ? $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le n$

$S(mn) = S(n)$ ~~..~~ 75-значное число

($\overline{75}$-значное число)

$\underbrace{100\ldots0}_{74} \le n \le \underbrace{999\ldots9}_{75}$

Докажем по индукции, что для каждого $m \in \mathbb{N}$, $m \in [1; n]$ верно, что $S(m \cdot \underbrace{99\ldots9}_{75}) = S(9\ldots9)$

База: $m = 1$ $S(99\ldots9) = S(99\ldots9)$

Предположение: Пусть для $m = k \in \mathbb{N}$ ~~...~~ это верно.

=> $S(k \cdot 999\ldots9) = S(99\ldots9) = 9 \cdot 75$

=> $k \cdot \underbrace{99\ldots9}_{75} = k0000\ldots0 - k$

Рассмотрим $m = k+1$

$$(k+1)\cdot\underbrace{99\ldots9}_{75} = (k+1)(\underbrace{10000\ldots0}_{75}-1) = A =$$

$$= k\cdot\underbrace{1000\ldots0}_{75} - k + 100\ldots0 - 1 = k\cdot\underbrace{100\ldots0}_{75} - k + \underbrace{99\ldots9}_{75}$$

$$\Rightarrow A = \overline{k\underbrace{00\ldots0}_{75}} + \underbrace{99\ldots9}_{75} - k =$$

$$= \overline{k\underbrace{99\ldots9}_{75}} - k$$

$$k\cdot\underbrace{1000\ldots0}_{76} - k = \overline{k\underbrace{000\ldots0}_{75}} - k = k\cdot\underbrace{999\ldots9}_{75}$$

$$\Rightarrow A = k\cdot\underbrace{99\ldots9}_{75} + \underbrace{999\ldots9}_{75}$$

$S(A) = S(k\cdot 99\ldots9)$, т.к.

$$\left(\begin{array}{r} -\overline{k99\ldots9} \\ k \\ \hline \end{array}\right)$$

$k = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$

$\Rightarrow \overline{k9\ldots9} = \overline{a_1a_2\ldots a_n99\ldots9}$

$A = \overline{a_1a_2\ldots a_n99\ldots9} - \overline{a_1a_2\ldots a_n}$

$0 \le a_1, a_2, \ldots, a_n \le 9$ $\quad n \le 75$

$\Rightarrow A = \overline{a_1a_2\ldots a_n(9-a_n)(9-a_{n-1})\ldots(9-a_1)}$

$\Rightarrow S(A) = \sum a_i + 9+\ldots+9$

$\overline{k000\ldots0} - k = \overline{a_1a_2\ldots a_n000\ldots0} - \overline{a_1a_2\ldots a_n} =$

$= \overline{(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1)(9-a_n)(9-a_{n-1})\ldots(10-a_1)}$

~~$\Rightarrow S(k\cdot 99\ldots9) = S(A)$~~

~~$\Rightarrow n = 99\ldots9$~~ ~~Ответ: $\underbrace{99\ldots9}_{75}$~~

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$A = k\cdot\underbrace{999\ldots9}_{75} + \underbrace{99\ldots9}_{75} = k\cdot1000\ldots0 - k + 100\ldots0 - 1$

$k\cdot\underbrace{99\ldots9}_{75} = k\cdot 1000\ldots0 - k$

~~Оценка~~ ~~$k\cdot1000\ldots0 - k + \underbrace{100\ldots0}_{75}$~~

~~сумма цифр:~~

$k\cdot 100\ldots0 - k = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $a_1 + \ldots + a_n = 9\cdot75$

$n \geq 75$

$k\cdot100\ldots0 - k + 100\ldots0 - 1 = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{t+1}(a_t+1)\ldots a_1}$

Если $a_t \leq 8$

$\Rightarrow A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{t+1}(a_t+1)\ldots a_n} - 1$

Если $a_n \geq 1 \Rightarrow A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{t+1}(a_t+1)\ldots(a_n-1)}$

$\Rightarrow S(A) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 9\cdot75$

$\Rightarrow S(k\cdot9\ldots9) = S(A)$.

Если $a_n = 0 \Rightarrow$ ~~смотрим на следующие разряды~~ ~~$a_n \neq 0$, т.к $99\ldots9\cdot k$, где $k\in\mathbb{N}$, $k\geq1$~~ ~~$\Rightarrow$ последние цифра никогда не 0, 9~~

Если $a_n = 0$ смотрим на следующие разряды

$\Rightarrow S(A) = a_1 + \ldots + a_n$, т.к если какие-то разряды были 0, они стали 9 и какой-то из них уменьшится на 1. Рассматривая все остальные случаи приходим к тому, что $S(A) = a_1 + \ldots + a_n = 9\cdot75$

Ответ: $\underbrace{99\ldots9}_{75}$

Ответ: 142

№4

Пусть по AB он проехал $= a$ раз, по $BC = b$ раз, по $AC = c$ раз

$a \equiv_c b$ $\Downarrow$ $a \equiv b \pmod c$

$\Rightarrow 85 = 7a + 11b + 17c$

$\Rightarrow (7a + 11b) \vdots 17$

$0 \le a \le 12$, иначе $7a \ge 91$, но сумма $= 85$

$0 \le b \le 7$, иначе $11b \ge 88$, но сумма $= 85$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 7a + 17c \equiv_{11} 8 \\ 7a + 11b \equiv_{17} 0 \\ 11b + 17c \equiv_{7} 1 \end{cases}$

(он не кончит) в случае (3)

Он проедет нечётное кол-во дуг по кругу $\Rightarrow$ проедет 2 полных круга по среднему по большому $\Rightarrow$ не подходит

$7a + 11b = 17k$, $7a + 17c = 11n + 8$, $\boxed{11b + 17c = 7r + 1}$

$n, k, r \in \mathbb{Z}$ $17c - 11b = 11n - 17k + 8$

Если $a = 0 \Rightarrow b \vdots 17$, $\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases}$

Если $a = 2 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 3 \Rightarrow$ реш. нет

$a = 3 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 13$, $a = 4 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 6$, $a = 5 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 16$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} 11b \equiv_{17} 0 \\ 11b \equiv_{17} 11 \\ 11b \equiv_{17} 5 \\ 11b \equiv_{17} 16 \\ 11b \equiv_{17} 10 \\ 11b \equiv_{17} 4 \\ 11b \equiv_{17} 15 \\ 11b \equiv_{17} 9 \end{array} \right.$

$a = 6 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 8$

$a = 7 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 15$

$a = 8 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 12$

$a = 9 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 12$

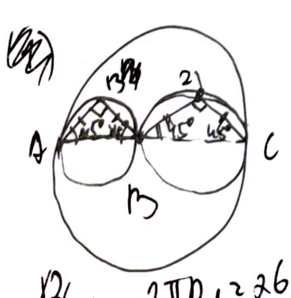
$a = 10 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 2$

$a = 11 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 3$

$a = 12 \Rightarrow 11b \equiv_{17} 14$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases} & (3) \end{array} \right.$

т.к. если всех своих заездов он снова оказался в A, то верно; -ые переходят, т.к. нечётное кол-во раз проехал по большой дуге $\Rightarrow$ не верно



(1) $p = 34 \cdot 5 = 170$, (2) $5 \cdot 13 + 3 \cdot 21 + 34$
$= 63 + 34 + 65$
$= 77 + 65 = 142$

$R_2 = \frac{42}{2\pi} = \frac{21}{\pi}$ (3) $13 + 84 + 68 = 165$

$\frac{13}{2\pi R_1}$ $2\pi R_1 = 26$ $\Rightarrow R_1 = \frac{13}{\pi}$

$\Rightarrow AC = \frac{2 \cdot 34}{\pi} = 2R \Rightarrow R = \frac{34}{\pi}$

$\Rightarrow 2 \smile AC = 2\pi \cdot \frac{34}{\pi} \Rightarrow \boxed{\smile AC = 34 \text{ км}}$