



0 396527 890003

39-65-27-89

(38.6)



# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант \_\_\_\_\_

Место проведения г. Москва  
город

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников \_\_\_\_\_  
Ломоносов  
название олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Тодунина Дмитрий Алексеевич

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
39-65-27-89	85	10	15	15	15	10	5	15	

## ЧЕРНОВИК

Оценка = 8

н.д.

 $m, n \in \mathbb{Z}$ 

$$\frac{1}{m} - 2 \quad \text{корни } x^2 + ax + b = 0 \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{n} - 2$$

 $a+b=?$ 

$$\left(\frac{1}{m} - 2\right)\left(\frac{1}{n} - 2\right) = b$$

$$2 - \frac{1}{m} + 2 - \frac{1}{n} = a$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn}$$

$$4 + \frac{1}{mn} - 2 \frac{m+n}{mn} = b$$

$$4 - \frac{m+n}{mn} = a$$

 $\frac{m+n}{mn}$  $m:n \quad |m| \geq |n|$  $n:m \quad |n| \geq |m|$  $\downarrow$   
 $|m| = |n|$ 1)  $m=n$ :

$$4 - \frac{2m}{m^2} = a$$

$$4 - \frac{2}{m} = a$$

$$4 + \frac{1}{m^2} - \frac{4}{m} = b$$

$$4 + \frac{1-4m}{m^2} = b$$

Найдено однородное

 $m = \pm 1, \pm 2$ 

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a} + \frac{2ca-2b^2+2b}{2b} +$$

$$+ \frac{2ab-2c^2+2c}{2c} =$$

$$= 3 - (a+b+c) + \left( \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right) = 3$$

$$\min \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \quad (a+b+c) =$$

$$= \frac{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 - a^2 bc}{abc} \quad b^2 ac - c^2 ab$$

$$ab(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\boxed{1} - \boxed{6}$$

$$\boxed{2} - \boxed{5}$$

$$\boxed{3} - \boxed{4}$$

$$4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$$

$$3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$$

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$$

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 6$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

$$\cancel{2 \rightarrow 5 \rightarrow 6}$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 6$$

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$$

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 6$$

$$\frac{24}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{24}{2,2,2} = \frac{1}{2}$$

$$24 \cdot \frac{1}{2} - 2 - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\min \left( \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} - (a+b+c) \right) - ?$$

k 11

k 12

$$\therefore a+b+c \leq \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b}$$

N4.  
5g 3m 1y

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$$a^2 bc + b^2 ac + c^2 ab \leq (bc)^2 + (ab)^2 + (ac)^2$$

$$a^2(b^2 - bc + c^2) - a(b^2 c + c^2 b) + (bc)^2 \geq 0$$

$$D = (b^2 c + c^2 b)^2 - 4(bc)^2 \cdot (b^2 - bc + c^2) \geq 0$$

$$= (bc)^2(b^2 + 2bc + c^2) - 4(bc)^2(b^2 - bc + c^2) =$$

$$= (bc)^2(b^2 + 2bc + c^2 - 4b^2 + 4bc - 4c^2) =$$

$$= (bc)^2(-3(b^2 - 2bc + c^2)) =$$

$$= -3(bc)^2(b - c)^2 \leq 0$$

корней нет  
U

$$S_{ABN} + S_{CBN} = 5$$

$$S_{ABN} \cdot S_{CBN} = 3$$

$$x+4=5$$

$$x=5-y$$

$$x=3$$

$$A$$

$$M$$

$$N$$

$$C$$

$$B$$

$$60+75=$$

$$=135^\circ \text{ OK}$$

$$5y - y^2 \geq 3$$

$$25 - 12 = 13$$

$$y^2 - 5y + 3 = 0$$

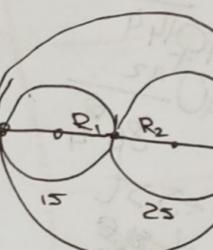
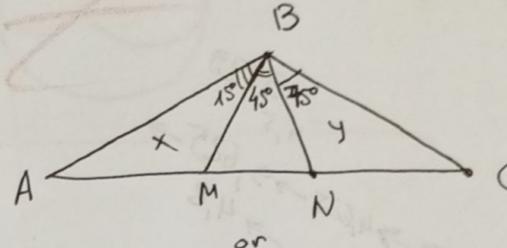
$$y = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{2}$$

$$\frac{5+\sqrt{15}}{2} \quad \frac{5-\sqrt{15}}{2}$$

ЧЕРНОВИК

$$x = \frac{5+\sqrt{15}}{2}$$

$$y = \frac{5-\sqrt{15}}{2}$$



$$15 = \pi R_1$$

$$25 = \pi R_2$$

$$40 = \pi R_3$$

or know.

$$\frac{AN}{BN} \cdot BC \cdot \sin 75^\circ = \frac{5-\sqrt{15}}{2}$$

$$\frac{AB}{BN} \cdot \frac{BC}{BN} \cdot ?$$

$$S_{ABC} \cdot S_{NBN} = t(t+5)$$

$$\frac{NB \cdot BN \cdot AB \cdot BC}{P} \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 135^\circ =$$

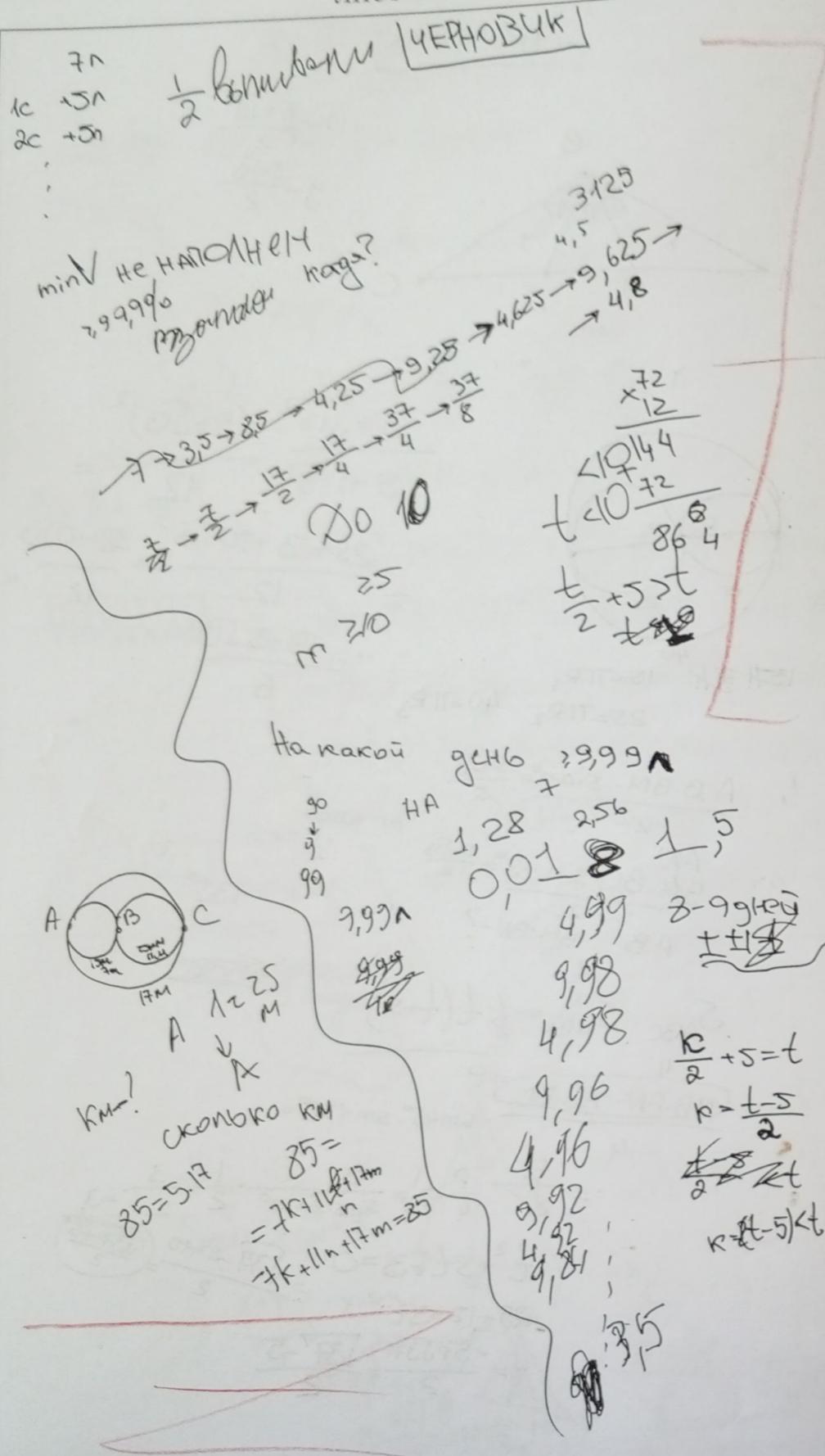
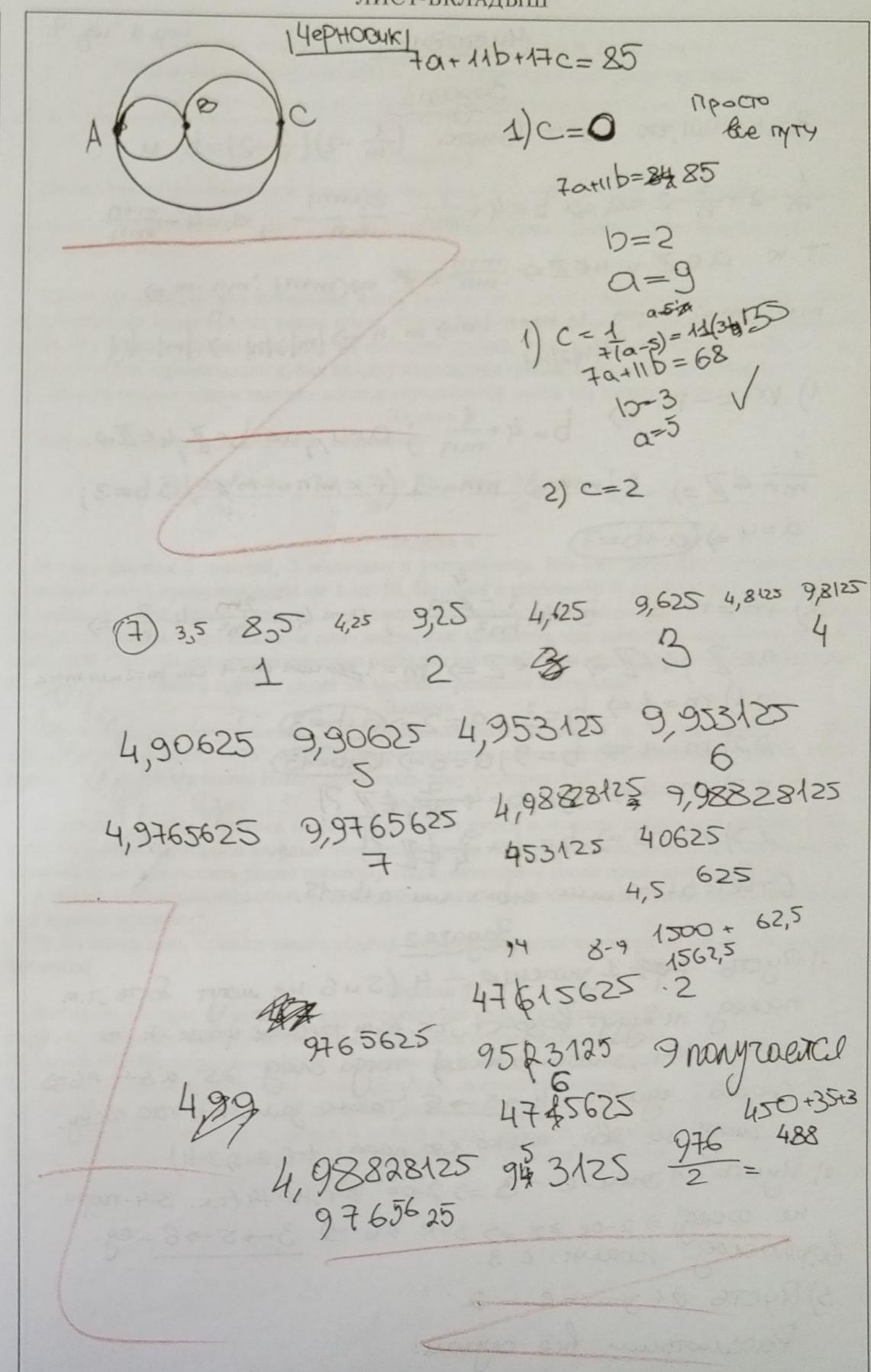
$$= \frac{P}{8} \cdot \frac{P}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$t^2 + 5t - 3 = 0$$

$$\sqrt{37 - 5 + 10} = \frac{\sqrt{37} + 5}{2}$$

$$25 + 12 = 37$$

$$t = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2} = \frac{\sqrt{37} - 5}{2}$$

39-65-27-89  
(38,6)

Числовик

Gr. 1 № 7.

Задача 1Заметили, что по Т. Виета  $(\frac{1}{m}-2)(\frac{1}{n}-2)=b$  и

$$\frac{1}{m}-2 + \frac{1}{n}-2 = a \Rightarrow b = 4 + \frac{1}{mn} - \frac{2(m+n)}{mn}; a = 4 - \frac{m+n}{mn}$$

т.к.  $a \in \mathbb{Z}$  и  $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{m+n}{mn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (m+n) \mid mn \mid m \Rightarrow$ 

$$m+n \mid m \Rightarrow n \mid m \text{ и } m+n \mid n \Rightarrow m \mid n \Rightarrow |m| \geq |n| \Rightarrow |m|=|n|$$

$$1) m=-n \Rightarrow b=4+\frac{1}{mn}; a=4, \text{ но } b \in \mathbb{Z}, 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{mn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \mid mn \Rightarrow mn=-1 (\text{т.к. } mn=-m^2 \leq 0) \Rightarrow b=3;$$

$$a=4 \Rightarrow \boxed{a+b=7}$$

$$2) m=n \Rightarrow b=4+\frac{1-\cancel{2m}}{m^2}; a=4-\frac{2m}{m^2}=4-\frac{2}{m} \Rightarrow$$

$$a \in \mathbb{Z}; 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{2}{m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=1 \text{ или } m=-1 \text{ или } m=2 \text{ или } m=-2$$

$$2.1) m=1 \Rightarrow b=1; a=2 \Rightarrow \boxed{a+b=3}$$

$$2.2) m=-1 \Rightarrow b=9; a=6 \Rightarrow \boxed{a+b=15}$$

$$2.3) m=2 \Rightarrow b=4-\frac{7}{4} \notin \mathbb{Z}?$$

$$2.3) m=-2 \Rightarrow b=4+\frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}?$$

Ответ:  $a+b=7$  или  $a+b=3$  или  $a+b=15$ .Задача 21) Пусть первое значение - 4 (5 и 6 не могут быть т.к. послед. не будут возраст., т.к. если первое  $\geq k$ , то $2-е \geq k+1, 3-е \geq k+2$ , тогда след.  $\geq 5$ , а  $3-е \geq 6 \Rightarrow$ След. единст.  $4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$  (такие заметили про сосед. к числу не был. только это пара: 1-6, 2-5, 3-4).2) Пусть 1 значение - 3  $\Rightarrow 2-е \geq 4$ , но  $\neq 4$  (т.к. 3-4-пара не сосед.)  $\Rightarrow 2-е \geq 5 \Rightarrow 3-е \geq 6 \Rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$  - ег. возраст. сосед. можно с 3.

3) Пусть 2 значение - 2:

Рассмотрим все случаи:

Числовик

Gr. 2 № 7.

2 → 3 → 5, 2 → 3 → 6 - если 2-е зна-е 3.2 → 4 → 5, 2 → 4 → 6 - если 2-е зна-е 4.2 → 5 → 6 - если 2-е зна-е 5 - Необходимо, т.к. 2-5-пара не сосед. чисел.2 → 6 - Если 2-е зна-е - 6, то 3-е  $\geq 7$  ?!

4) Пусть 1 значение - 1:

Рассмотрим все случаи:

1 → 2 → 3, 1 → 2 → 4, 1 → 2 → 6 - если 2-е зна-е 2(1 → 2 → 5 X, т.к. 2-5 пары не сосед.)1 → 3 → 5, 1 → 3 → 6 - если 2-е зна-е 3 (1 → 3 → 4 X, т.к. 3-4 пары не сосед.)1 → 4 → 5, 1 → 4 → 6 - если 2-е зна-е 41 → 5 → 6 - если 2-е зна-е 5.1 → 6 → 7 ?!Итого получилось 14 возраст. чисел.  
Ответ: 14.ФундаментальнаяЗадача 3

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a} + \frac{2ca-2b^2+2b}{2b} + \frac{2ab-2c^2+2c}{2c} =$$

$$= \frac{bc}{a} - a + 1 + \frac{ca}{b} - b + 1 + \frac{ab}{c} - c + 1 =$$

$$= 3 + \left( \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c \right) \geq 3, \text{ т.к.}$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq ab - a - b - c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

$$\Leftrightarrow (bc)^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq a^2bc + b^2ac + b^2bc \geq 0 \Leftrightarrow a^2(b^2 - bc + c^2) - a(b^2 + c^2)$$

$$+ (bc)^2 \geq 0 - \text{заметили, что в левой части квадр. трехчлен}$$

$$\text{относ. } a, \text{ при } a^2 \text{ квадр. } b^2 - bc + c^2 > 0, \text{ т.к. } b^2 - bc + c^2 > b^2 + bc - bc - bc =$$

$$\text{Верно, т.к. } b, c > 0, \text{ также у нас есть квадр. трехчлен } 2 = (c^2b + b^2c)^2 - 4b^2c^2(b^2 - bc + c^2) = b^2c^2(b^2 + 2bc + c^2) - 4b^2c^2(b^2 - bc + c^2) =$$

$$\frac{b^2c^2}{b^2+2bc+c^2-4b^2+4bc-4c^2} = b^2c^2(-3(b^2-2bc+c^2)) =$$

Гр. 3 уж 7.

$$= -3 \overset{\text{Числобум}}{\underset{\text{Знаменатель}}{\frac{b^2c^2}{b^2+2bc+c^2}}} (b-c)^2 \leq 0 \Rightarrow \text{когда гр. трехзначный и не имеет } \leq 1 \text{ кратн}$$

и у него быть бы вверх  $\Rightarrow$  при любом шаге. Это означает, что  
трёхъяруска будет 20 р.т.р.

Зказування - е зразок оральних вправ. № 3.

### Пример.

17pu  $a=b=c=1$  zuerst. 661pa\*.  $\Rightarrow = 3.$

OBET:3.

Zagaza 4.

Dabaité charana <sup>ayum</sup> pacagut geboren:

между соседними гонками добить за 1 место настройка  
Рассмотрим края не закрытые ( $u \neq s$ ), тогда как  
могут расположиться места заборов и створов, которые  
закрыты.  $g_{\text{eb.}}$ :

В като же из 6 мест — может сесть 0 или 1 чел.  
(?) Не могут, чтобы настолько же мест. Кто же зайдет в сид. мест?!

Способов покрасить деб. места  $C_6^5 = 6$ , такие наименее  
деб. места из всех возможных 5! способов  $\Rightarrow$  всего  
способов раскрасить дерево - 6! способов где  
какого из этих способов 1-ий покрасить есть

5 см., 2-й ман. - 4 см., 3-й ман. - 3 см., читерн - 2 см.  
(каждого на 2-3 см в шир. мест) => всего 10 см.

$$61 \cdot 51 = 320 \cdot 120 = 86400$$

Offer: 86400.00000000

Zagara s.

Заметим, что  $M$  лежит между  $A$  и  $N$ .  
 $\angle ABM = \angle CAB + \angle MBN$  (для ?)

$$\text{Знаем } S_{ABC} = S_{ABN} + S_{NBN} + S_{BNC} =$$

$$= S_{MBN} + 5, \text{ nyci } S_{MBN} = t \Rightarrow S_{ABC} = t + 5$$

$$\begin{aligned} S_{MBN} \cdot S_{ABC} &= \frac{MB \cdot BN \cdot \sin \angle MBN}{2} \cdot \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC}{2} = \\ &= \frac{AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC}{4} \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin (\angle ABM + \angle MBN + \angle NBC) = \\ &= \frac{AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AB \cdot BN \cdot BC}{4} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S_{ABM} \cdot S_{BNC} = \frac{AB \cdot BN \cdot \sin \angle ABM}{2 \cdot \sin 90^\circ} \cdot \frac{BN \cdot BC \cdot \sin \angle NBC}{2} =$$

$$= \frac{AB \cdot BN \cdot BN \cdot BC}{4} \cdot \frac{2 \sin 15^\circ \sin 75^\circ}{2} = \frac{AB \cdot BN \cdot BN \cdot BC}{4} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 3 \Rightarrow S_{MBN} \cdot S_{ABC} = 3 \Leftrightarrow t(t+5) = 3 \Leftrightarrow t^2 + 5t - 3 = 0$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}; t > 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{37} - 5}{2} \Rightarrow S_{ABC} = t \cdot 5 = \frac{\sqrt{37} + 5}{2}$$

$$\text{Orfer: } \frac{5+\sqrt{33}}{2}$$

Загара 6

a) Sonstige Anmerkungen: - Auf Arbeit: 10

1) Заметим, что  $\approx 10$  метров в кубике никакого не будет, т.к. путь первый раз надо  $\approx 10$  метров, тогда же этого было  $t - 5 \cancel{25}$  метров, а же этого  $2t - 10 \approx 10$  метров?!, но значит это было не 1-й раз?!

2) Теперь док-ем, что  $t < 10$  минут в кубинке всегда наберётся  $\sqrt{2t}$  листов  $t$ -мин. обёртку кубинки при котором кубинка полностью не покончена, значит когда в кубинке будет  $2(t-5)$  листов, т.к.

$$2t - 10 \leq 2(t-5) \quad (t < 10)$$

зисад листов при кот. кубинка таким обёрткам не кончена

$$2(t-5),$$

следующим шагом будет  $\frac{2(t-5)}{2} = t-5$  листов,

а занес  $(t-5) + 5 = t$  мтров - противоречие (если у нас не дефицита на 2, а пред. 5 на зан. шаре, то  $(t-5) + 5 > t$ , т.к.  $t > 5$  (у нас. шар. не  $\neq$  мтров  $\Rightarrow t \geq 7 \Rightarrow x > 5$ )).

Числовик

Гр. 5 из 7.

5) Давайте просто выполните действие, пока тут не будет  $\geq 9,99$  метров в кубинке:

$$\begin{array}{r} \text{примечание} \\ \exists \frac{8,5}{\text{дн}} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,25 \\ 2 \text{дн} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,625 \\ 3 \text{дн} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,625 \\ 4 \text{дн} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,8125 \\ 5 \text{дн} \end{array} \quad \begin{array}{r} 9,8125 \\ 6 \text{дн} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,90625 \\ 7 \text{дн} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,90625 \\ 5 \text{дн} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,953125 \\ 6 \text{дн} \end{array} \quad \begin{array}{r} 9,953125 \\ 7 \text{дн} \end{array}$$

$$4,98828125 \quad \begin{array}{r} 9,98828125 \\ 8 \text{дн} \end{array} \quad k \quad \begin{array}{r} k+5 \\ 9 \text{дн} \end{array}$$

$$k = \frac{9,98828125}{2} > \frac{9,98}{2} = 4,99 \Rightarrow k+5 > 9,99 \Rightarrow \text{На 9дн}$$

Было  $\geq 9,99$  от 10н.

Ответ: а) 10 ; б) ~~заправка 9дн~~ 9дн

Задача 7.

Рисунок  $R_1$  - радиус окр. на кот. лек.  $A \cup B$ ,  $R_2$  - радиус окр. на кот. лек.  $B \cup C$

$\pi R_1 = 15$ ;  $\pi R_2 = 25$  т.к. это длины дуг  $\overarc{AB}$  и  $\overarc{BC}$  в  $w_1$  и  $w_2$  соответственно)

Радиус 3-й окруж.  $(w_3) - R_3 = R_1 + R_2$ , т.к.  $AC = 2R_3$  (так как)

$$AC = AB + BC = 2R_1 + 2R_2$$

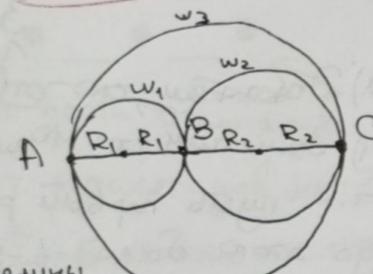
Тогда длина дуги  $\overarc{AC}$   $w_3 = \pi R_3 = \pi(R_1 + R_2) = \pi R_1 +$

$$+\pi R_2 = 40.$$

Заметим, что автомобиль проехал некот. дистанцию  $b$  по  $w_1$ , некот.  $w_2$  и некот.  $w_3$ .

Учтите, что дуга  $\overarc{AC}$  в  $w_3$  т.к. она не имеет только трассы в точках кас. и не разбита на  $180^\circ$ .

$$7a + 11b + 7c = 65$$



Гр. 6 из 7.

$$1) C=0 \Rightarrow 7a + 11b = 65 \quad 85$$

$$\Downarrow \quad 7(a-3) = 11(2-b)$$

12a

$a-3 : 11 \Rightarrow a=9$  или  $a \geq 19$  ( $a \geq 0 \Rightarrow a \leq -2$  и менять не подходит)

$$\Downarrow \quad 7a > 85$$

$$a=9$$

$$11b > 0$$

$$2-b=0 \Rightarrow b=2$$

?

Но этот случай не подходит, т.к. тогда автомобиль должен  $A \rightarrow B$ , а ранее 3 раза проехали кег из дуг  $\overarc{BC}$   $w_2$  (иначе он едет  $B \rightarrow A$  и ранее не может ехать, т.к. по  $w_1$  он все проездил, а по  $w_2$  не всё, но на  $w_2$  он попасть не может).

$$2) C=1 \Rightarrow 7a + 11b = 68$$

$$7(a-5) = 11(3-b)$$

$$\Downarrow \quad a-5 : 11 \stackrel{(a \geq 0)}{\Rightarrow} a=5 \text{ или } a \geq 16$$

$$\Downarrow \quad 3b=0 \Rightarrow b=0$$

$$7a > 68 ?!$$

$$a=5, b=0$$

Тогда он проехал  $5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot 40 = 190 \text{ KM}$ , этот случай возможен, например!

$$A \xrightarrow{w_1} B \xrightarrow{w_1} A \xrightarrow{w_1} B \xrightarrow{w_1} A \xrightarrow{w_1} C \xrightarrow{w_1} B \xrightarrow{w_1} C \xrightarrow{w_1} B \xrightarrow{w_1} A$$

$$3) C=2 \Rightarrow 7a + 11b = 51$$

$$7(a-1) = 11(4-b) \stackrel{a-1 \geq 0}{\Rightarrow} a=1 \text{ или } a \geq 12$$

$$\Downarrow \quad a=1 \\ b=4$$

$$7a > 51 \quad 7a > 51$$

$$11b > 0$$

?

Этот случай не возможен, т.к.

Тогда из А он проехал  $w_1$  и  $w_2$  3 раза, но тогда в конце автомобиль не в А, т.к.

Чистовик,

Он 1 раз выехал ~~когда-то~~, потом ~~выехал~~, потом ~~выехал~~,  
но не въезжал, это он автам. всегда 3 раза выезж./  
въезж. ~~из А в А~~.

$$4) C=3 \rightarrow 7a+11b=34$$

$$\begin{aligned} 4.1) b=0 &\Rightarrow b=0 \quad 7(0+3)=11(1+b) \\ 4.2) b=1 &\Rightarrow 7a=34 ?! \end{aligned}$$

$$4.1) b=0 \Rightarrow 7a=34 ?!$$

$$4.2) b=1 \Rightarrow 7a=23 ?!$$

$$4.3) b=2 \Rightarrow 7a=12 ?! \Rightarrow \text{ЭТОТ случай невозможен}$$

$$4.4) b=3 \Rightarrow 7a=1 ?!$$

$$4.5) b \geq 3 \Rightarrow 7a < 0 ?! (a \geq 0)$$

$$5) C=4 \Rightarrow 7a+11b=17$$

$$5.1) b=0 \Rightarrow 7a=17 ?! \Rightarrow \text{ЭТОТ случай}$$

$$5.2) b=1 \Rightarrow 7a=6 ?! \Rightarrow \text{невозможен}$$

$$5.3) b \geq 2 \Rightarrow 7a < 0 ?! (a \geq 0)$$

$$6) C=5 \Rightarrow 7a+11b=0$$

$$\begin{array}{l} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{array} \Rightarrow a=b=0$$

автомобиль 5 раз проехал  
но  $w_3 \Rightarrow$  он оказался в С



$$7) C \geq 6 \Rightarrow 7a+11b < 0 \quad ?!, \text{т. к. } a \geq 0 \text{ и } b \geq 0$$

$$\text{ЭТОТ случай невозможен} \Rightarrow 7a+11b \geq 0 ?!$$

Ответ: 190 км.